

01;03

Об устойчивости цилиндрической струи, движущейся относительно материальной среды вдоль внешнего электростатического поля

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Н.А. Полянцев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 22 марта 2011 г.)

Выведено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды параллельно внешнему однородному электростатическому полю. Показано, что наличие тангенциального скачка поля скоростей на поверхности струи приводит к периодической неустойчивости типа неустойчивости Кельвина–Гельмгольца волн на границе раздела сред и носит дестабилизирующий характер как для осесимметричных, так и для изгибных и изгибно-деформационных волн. Как изгибная, так и изгибно-деформационная неустойчивости имеют пороговый характер и реализуются не при как угодно малых значениях скорости относительно движения струи и среды, но начиная с некоторых конечных ее значений. Показано, что периодический характер неустойчивости волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, является таковым лишь с формально математической точки зрения, в реальности струя разрывается при реализации неустойчивости за время, меньшее полупериода волны.

Введение

Еще Рэлей показал, что цилиндрическая струя неустойчива по отношению к длинным осесимметричным капиллярным волнам на ее поверхности с волновыми числами, удовлетворяющими соотношению $kR < 1$, где R — радиус струи [1,2]. Более короткие волны могут беспрепятственно распространяться по струе. Неосесимметричные волны (т.е. волны с азимутальными числами m , отличными от нуля) на незаряженной поверхности струи всегда устойчивы. Появление на струе электрического заряда приводит к проявлению неустойчивости и неосесимметричных волн, а также к расширению спектра неустойчивых осесимметричных волн в область более коротких длин волн [3,4]. Если струю жидкости поместить в коллинеарное ей внешнее электростатическое поле, то, как показано в [5–8], оно увеличит устойчивость осесимметричных капиллярных волн на поверхности струи за счет смещения правой границы области устойчивости в сторону более длинных волн. Неосесимметричные волны ($m \geq 1$) на поверхности незаряженной струи при этом остаются устойчивыми. Если же струя заряжена, то наличие внешнего продольного электростатического поля оказывает стабилизирующее влияние на неосесимметричные волны, проявляющееся в сужении диапазонов неустойчивых волн и уменьшении инкрементов их неустойчивости [8]. Наличие движения струи относительно несжимаемой диэлектрической среды приводит к дестабилизации как осесимметричных ($m = 0$) и изгибных ($m = 1$), так и изгибно-деформационных ($m = 2$) волн на поверхности струи [9–12].

Феномены стабилизации осесимметричных капиллярных волн продольным электростатическим полем и

дестабилизации движением относительно материальной внешней среды представляют значительный интерес из-за незавершенности физической трактовки многочисленных режимов электродиспергирования жидкости, наблюдаемых экспериментально [3,4,13–16]. В связи с вышесказанным и сформулировано настоящее исследование, в котором предполагается проанализировать устойчивость волн с произвольной симметрией на поверхности цилиндрической струи, движущейся относительно материальной среды вдоль однородного внешнего электростатического поля.

1. Постановка задачи

Пусть имеется бесконечная, движущаяся параллельно однородному электростатическому полю \mathbf{E}_0 с постоянной скоростью \mathbf{U} (т.е. $\mathbf{U} \parallel \mathbf{E}_0$) цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ_2 , диэлектрической проницаемостью ϵ_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения σ , имеющая радиус R . Массовая плотность внешней среды будет ρ_1 , а ее диэлектрическая проницаемость ϵ_{ex} .

Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью \mathbf{U} . В такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{V}_{in}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными волнами на ее поверхности и в безразмерных переменных $\rho_2 = \sigma = R = 1$, в которых будет проведено все рассмотрение, является величиной такого же порядка малости, что и амплитуды волн. Движение жидкости в струе и среде будем принимать потенциальным, т.е. $\mathbf{V}_{in}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \Psi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{V}_{ex}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \Psi_{ex}(\mathbf{r}, t)$, где $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы полей

скоростей волновых течений жидкости и среды ($j \in \{\text{in}; \text{ex}\}$). Зададимся целью исследования критических условий реализации неустойчивости капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности такой струи.

Весь анализ проведем в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью OZ , совпадающей с осью симметрии цилиндрической струи и направленной вдоль вектора скорости \mathbf{U} . Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением (т.е. имеющим размерные амплитуды $\sim \sqrt{\kappa T/\sigma}$, где κ — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура [17]), запишем в виде

$$F(r, \varphi, z, t) = r - (1 + \xi(\varphi, z, t)) = 0.$$

В этом соотношении $\xi(\varphi, z, t)$ — возмущение цилиндрической поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением, $|\xi| \ll 1$.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярного волнового течения жидкости в струе идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости и идеальной несжимаемой диэлектрической среде состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской), т.е. напряженности электрического поля определяются как $\mathbf{E}_j = -\nabla\Phi_j(\mathbf{r}, t)$, $j \in \{\text{in}, \text{ex}\}$

$$\Delta\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\psi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$\Delta\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

с граничными условиями

$$r = 1 + \xi: \quad \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + (\nabla\Psi_j, \nabla)F = 0,$$

$$(\mathbf{n}, \nabla\psi_{\text{in}}) = (\mathbf{n}, \nabla\psi_{\text{ex}}),$$

$$P_{\text{in}} - P_{\text{ex}} + P_E = P_\sigma,$$

$$\varepsilon_{\text{in}}[(\mathbf{n}, \nabla)\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)] = \varepsilon_{\text{ex}}[(\mathbf{n}, \nabla)\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)],$$

$$(\boldsymbol{\tau}, \nabla)\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = (\boldsymbol{\tau}, \nabla)\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t),$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) < \infty,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0, \quad \nabla\Psi_{\text{ex}} \rightarrow -\mathbf{U},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{n} — единичные векторы касательной и нормали к возмущенной поверхности струи, $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамические и электростатические потенциалы в струе и в среде соответственно, а

$$P_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) \equiv P_{\text{in}}^{(0)} - \partial_t\Psi_{\text{in}} - \frac{1}{2}(\nabla\Psi_{\text{in}})^2$$

и

$$P_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) \equiv -\rho\partial_t\Psi_{\text{ex}} - \frac{\rho}{2}(\nabla\Psi_{\text{ex}})^2$$

— поля давлений в струе и внешней среде, $P_{\text{in}}^{(0)}$ — постоянное давление в цилиндрической струе в отсутствие волнового движения на ее поверхности, $\rho \equiv \rho_1/\rho_2$ —

безразмерная плотность среды, $P_\sigma \equiv \text{div } \mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения, P_E — давление электрического поля на поверхность струи [7,8]:

$$P_E = -\frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi} \left[(\nabla\Phi_{\text{ex}})^2 - 2((\mathbf{n}, \nabla)\Phi_{\text{ex}})^2 \right] + \frac{\varepsilon_{\text{in}}}{8\pi} \left[(\nabla\Phi_{\text{in}})^2 - 2((\mathbf{n}, \nabla)\Phi_{\text{in}})^2 \right].$$

Кроме выписанных условий должно выполняться требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{1+\xi} \int_0^{2\pi} dz r dr d\varphi = \pi\lambda.$$

2. Дисперсионное уравнение

Решение сформулированной задачи не представляет трудности и может быть проведено по схеме, подробно описанной в [3,7,8,12]. В расчетах первого порядка малости оно ищется в виде разложений по бегущим цилиндрическим волнам:

$$\xi(\varphi, z, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty \alpha_m(t) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk,$$

$$\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_m^{(1)}(t) I_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk,$$

$$\Psi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = -Uz$$

$$+ \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_m^{(2)}(t) K_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk,$$

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = -E_0z$$

$$+ \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_m^{(3)}(t) I_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk,$$

$$\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = -E_0z$$

$$+ \int_0^\infty \sum_{m=0}^\infty C_m^{(4)}(t) K_m(kr) \exp(im\varphi) \exp(ikz) dk,$$

(1)

где i — мнимая единица, k — волновое число, m — азимутальный параметр, $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно [18], $\alpha_m(t)$ и $C_m^{(j)}(t)$ — зависящие от времени неизвестные амплитудные функции первого порядка малости.

Подставим проекты решений (1) в кинематическое граничное условие и условия для нормальных и касательных к поверхности струи компонент напряженности

электрического поля, выразим неизвестные коэффициенты $C_m^{(j)}(t)$ через амплитуды волн на границе раздела сред $\alpha_m(t)$ и из динамического граничного условия получим систему несвязанных дифференциальных уравнений относительно $\alpha_m(t)$:

$$\alpha_m''(t) + 2i\beta_m(k)\alpha_m'(t) - \delta_m(k)\alpha_m(t) = 0; \quad (2)$$

$$\beta_m(k) \equiv \sqrt{\rho \text{We}} \frac{k g_m(k)}{[h_m(k) - \rho g_m(k)]},$$

$$\delta_m(k) \equiv \frac{h_m(k)g_m(k)}{[h_m(k) - \rho g_m(k)]} \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})^2 k^2}{[\varepsilon_{\text{in}} g_m(k) - \varepsilon_{\text{ex}} h_m(k)]} - \text{We} \frac{k^2}{h_m(k)} \right),$$

$$h_m(k) \equiv \frac{k K'_m(k)}{K_m(k)}, \quad g_m(k) \equiv \frac{k I'_m(k)}{I_m(k)},$$

$$w \equiv E_0^2/4\pi, \quad \text{We} \equiv \rho U^2.$$

Штрихи у неизвестных амплитуд волн $\alpha_m(t)$ в (2) и у модифицированных функций Бесселя означают взятие производной по аргументу. Решение дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2), определяющего временную зависимость амплитуд волн, естественно искать в периодическом виде

$$\alpha(t) \sim \exp(ist), \quad (3)$$

где s — частота капиллярных волн, в общем случае комплексная. Подставим (3) в (2) и получим дисперсионное уравнение задачи

$$s^2 + 2\beta_m(k)s + \delta_m(k) = 0. \quad (4)$$

Решение уравнения (4) имеет вид

$$s_{1,2}(k) = -\beta_m(k) \pm \sqrt{\beta_m^2(k) - \delta_m(k)}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что частоты, а следовательно, и фазовые скорости волн, бегущих по струе в противоположных направлениях, будут отличаться.

Несложно видеть, что при $\rho = 0$ выполняются соотношения

$$\text{We} = 0, \quad \beta_m(k) = 0,$$

$$\delta_m(k) \equiv g_m(k) \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})^2 k^2}{[\varepsilon_{\text{in}} g_m(k) - \varepsilon_{\text{ex}} h_m(k)]} \right),$$

а дисперсионное уравнение (4) сведется к полученному в [6] для струи в продольном электростатическом поле, когда окружающая среда является вакуумом. При $\rho = 0$ и $\mathbf{E}_0 = 0$ получим $w = 0$, а дисперсионное уравнение (4) сведется к дисперсионному уравнению для капиллярных волн на поверхности незаряженной струи в вакууме [1–3].

3. Обсуждение полученных результатов

При изменении физических параметров системы волны на поверхности раздела сред будут сохранять устойчивость, пока частоты $s_{1,2}$ остаются вещественными, т.е. пока подкоренное выражение в (5) положительно. Когда подкоренное выражение станет отрицательным, у частот $s_{1,2}$ появится мнимая часть и они образуют пару комплексно сопряженных корней $s \equiv \text{Re } s \pm i \text{Im } s \equiv \omega \pm i\gamma$. При этом амплитуда волны с отрицательной мнимой частью частоты, пропорциональная $\exp[i(\omega - i\gamma)t] \equiv \exp[\gamma t] \exp[i\omega t]$, будет увеличивать свою амплитуду экспоненциально со временем с инкрементом γ , что приведет к распаду струи на отдельные капли. Амплитуда волны с положительной мнимой частью частоты будет экспоненциально во времени затухать.

На рис. 1, *a* приведены зависимости от волновых чисел частот $\omega(k)$ и инкрементов неустойчивости $\gamma(k)$ осесимметричных ($m = 0$) капиллярных волн на поверхности струи при $\rho = 0$ и различных значениях полевого параметра w . В соответствии с классическими представлениями об устойчивости струи [1–3] при $w = 0$ неустойчивы длинные осесимметричные волны с $k \leq 1$. Причем неустойчивость имеет аperiодический характер и реализуется под действием капиллярных сил. С ростом зарядового параметра w диапазон неустойчивых волн сужается к началу координат в согласии с существующими представлениями о стабилизирующем влиянии продольного электростатического поля [5–8].

При $\rho \neq 0$, $U \neq 0$ и $w = 0$ отсутствует стабилизирующее действие поля и включается дестабилизирующее влияние движения струи относительно среды (дестабилизирующее влияние тангенциального скачка поля скоростей на поверхности струи). Из рис. 1, *b* следует, что это дестабилизирующее влияние проявляется в расширении диапазона неустойчивых волн, изменении типа неустойчивости, которая становится периодической, и в увеличении инкрементов. Видно, что теперь у каждой неустойчивости волны имеется частота, определенная, согласно (4), (5), коэффициентом $\beta_m(k)$ (т.е. $\omega(k) \equiv -\beta_m(k)$, см. рис. 1, *c*), и инкремент, определенный радикалом в (5), $\gamma \equiv |\sqrt{\beta_m^2(k) - \delta_m(k)}|$. За пределами области неустойчивости существуют обычные капиллярные волны. Полная ветвь капиллярных волн состоит из двух частей: периодически неустойчивых (их можно назвать периодически неустойчивыми капиллярными волнами Кельвина–Гельмгольца) и устойчивых. В точке перехода от неустойчивых волн к устойчивым волнам кривая $\omega(k)$ претерпевает разрыв первого рода, как это видно из рис. 1, *b*. На рис. 1, *c* приведены зависимости $\beta_m(k)$ частот неустойчивых волн для первых трех значений азимутального числа ($m = 0, 1, 2$), порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, от волновых чисел при различных значениях параметра We .

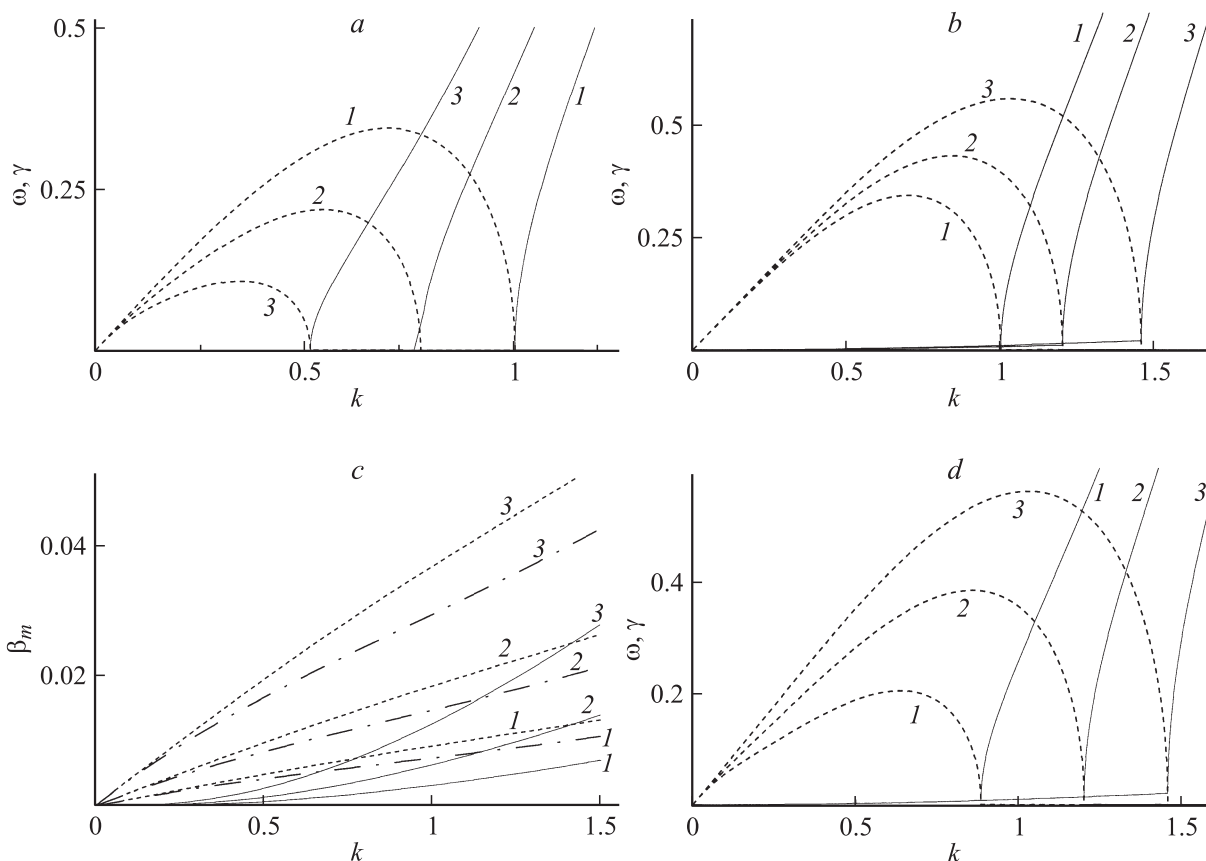


Рис. 1. *a* — зависимости от безразмерных волновых чисел безразмерных частот $\omega(k)$ (сплошные линии) и безразмерных инкрементов неустойчивости $\gamma(k)$ (штриховые линии) осесимметричных ($m=0$) капиллярных волн на поверхности струи при $We=0$, $\rho=0$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях полевого параметра w : 1 — 0, 2 — 0.0025, 3 — 0.005; *b* — те же зависимости, что на *a*, но рассчитанные при $w=0$, $\rho=0.001$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях параметра Вебера We : 1 — 0, 2 — 0.5, 3 — 1; *c* — зависимости от безразмерных волновых чисел безразмерных частот $\beta_m(k)$ капиллярных волн на поверхности струи при $w=0$, $\rho=0.001$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях параметра Вебера We : 1 — 0.1, 2 — 0.4, 3 — 1.6. Сплошные кривые — зависимости $\beta_0(k)$ для осесимметричных волн ($m=0$); штрихпунктирные — $\beta_1(k)$ для изгибных ($m=1$); штриховые — $\beta_2(k)$ для изгибно-деформационных ($m=2$); *d* — те же зависимости, что на рис. 1, *a*, но рассчитанные при $We=1$, $\rho=0.001$, $\varepsilon_{in}=80$, $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях полевого параметра w : 1 — 0, 2 — 0.0025, 3 — 0.005.

Феноменологическую картину распада струи под действием периодической неустойчивости определит волна с максимальной величиной инкремента неустойчивости. На рис. 1, *d* приведены зависимости от волновых чисел частот ω и инкрементов неустойчивости γ осесимметричных капиллярных волн на поверхности струи при наличии как внешнего электростатического поля, так и движения струи относительно внешней среды. Из сравнения рис. 1, *a-d* можно прийти к выводу, что при одновременном действии двух силовых факторов (стабилизирующего влияния электрического поля и дестабилизирующего влияния тангенциального скачка поля скоростей) основное влияние оказывает дестабилизирующий фактор. Так, например, кривые 3 на рис. 1, *b* и *d* полностью совпадают, хотя на рис. 1, *d* при том же значении параметра We действует еще и поле, характеризуемое значением полевого параметра $w=0.005$. Поле с указанным значением полевого параметра на рис. 1, *a* привело к значительному сужению диапазона неустойчивых волновых чисел и к существен-

ному снижению величины инкремента неустойчивости. Для кривых 2 на рис. 1, *b* и *d* ширины диапазонов неустойчивых волн совпадают, а величина инкремента на рис. 1, *d* лишь несколько уменьшилась по сравнению с рис. 1, *b*.

Из рис. 1, *b-d* несложно видеть, что частоты периодически неустойчивых капиллярных волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, имеющие, согласно рис. 1, *c* безразмерные величины ~ 0.01 , много меньше частот обычных капиллярных волн, имеющих, согласно рис. 1, *b* и *d*, безразмерные величины ~ 1 . В области неустойчивости частоты периодически неустойчивых капиллярных волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, много меньше величин своих инкрементов. Последнее обстоятельство позволяет принять, что периодический характер неустойчивости волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, формален. В самом деле, за время, равное полупериоду волны, характерная для осесимметричной моды ($m=0$) перетягивающая

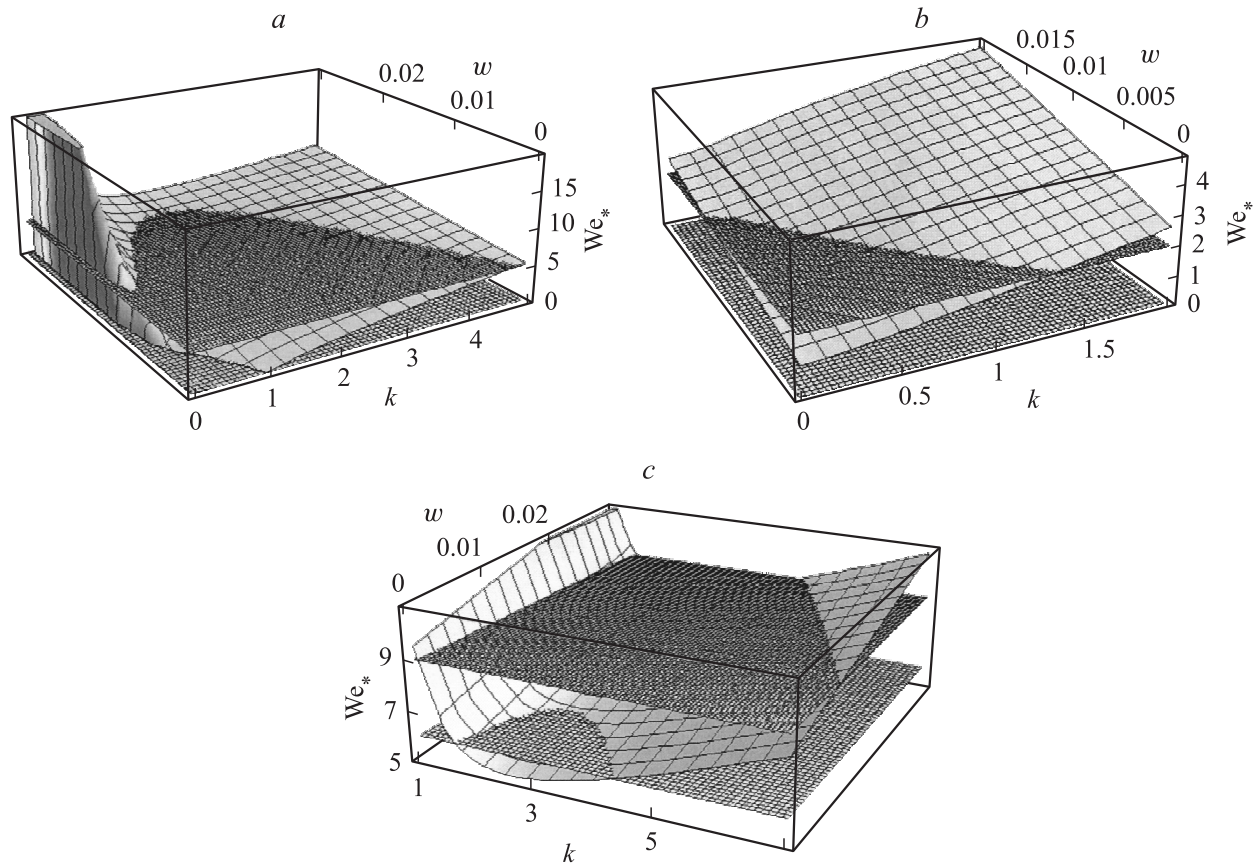


Рис. 2. Зависимости $We_* = We_*(k, w)$ для различных азимутальных чисел m , пересеченные плоскостями $We(k, w) = \text{const}$, рассчитанные при $\rho = 0.001$, $\varepsilon_{\text{in}} = 80$, $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$. *a* — $m = 0$, пересечено двумя плоскостями $We = 0$ и $We = 5$; *b* — $m = 1$, пересечено плоскостью $We = 2$; *c* — $m = 2$, пересечено двумя плоскостями $We = 6$ и $We = 9$.

(она же сосисочная) неустойчивость, реализующаяся с инкрементом на порядок больше частоты, завершится распадом струи. Из рис. 1, *b, c* и *d* видно, что величины частот волн, порожденных тангенциальным разрывом поля скоростей, по крайней мере на порядок меньше величин их инкрементов неустойчивости, т.е. $\gamma/\beta_0 \sim 10$. В рамках линейной теории начальная амплитуда неустойчивой волны ξ_0 за время, равное полупериоду волны $0.5T = \pi/\beta_0$, увеличит свою амплитуду в $\exp(0.5\gamma T) = \exp(\pi\gamma/\beta_0) \sim \exp(10\pi) \sim 10^{13}$. Даже если принять, что ξ_0 имеет тепловую природу и, следовательно [17], $\xi_0 \sim 0.1 \text{ nm}$, то и в этом случае разрыв струи произойдет еще до окончания полупериода волны. Учет реальной нелинейности феномена распада струи даст такую же оценку, как это было для капли и заряженной плоской поверхности жидкости [19,20].

Приравнявая в (5) подкоренное выражение нулю, получим аналитическую связь между физическими параметрами на рубеже перехода от устойчивых волн к неустойчивым $\beta_m^2 - \delta_m = 0$, или

$$k^2 We \left[\frac{1}{h_m(k) - \rho g_m(k)} \right] - \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})^2 k^2}{\varepsilon_{\text{in}} g_m(k) - \varepsilon_{\text{ex}} h_m(k)} \right) = 0. \quad (6)$$

Из (6) легко найти аналитическое выражение критического для начала реализации неустойчивости значения параметра $We = We_*(k, w, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}})$:

$$We_*(k, w, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}) = \left(1 - k^2 - m^2 - w \frac{(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})^2 k^2}{\varepsilon_{\text{in}} g_m(k) - \varepsilon_{\text{ex}} h_m(k)} \right) \frac{[h_m(k) - \rho g_m(k)]}{k^2}. \quad (7)$$

При $We > We_*$ у частот волн, определяемых (5), появляется мнимая часть (поскольку выражение под радикалом становится отрицательным) и волна с частотой $\text{Re } s \equiv \beta_m$ начинает экспоненциально со временем увеличивать свою амплитуду с инкрементом, определенным радикалом в соотношении (5). Следует отметить, что безразмерный параметр We , будучи выражен через размерные переменные, имеет вид $We \equiv (\rho_1 R U^2 / \sigma)$.

В различных приложениях феномена дробления струи максимально возможное значение параметра We будет ограничено. Так, согласно экспериментальным данным по спонтанному электродиспергированию жидкости, когда струя жидкости вытягивается из жидкого мениска внешним электростатическим полем, скорость струи не превышает 10^3 cm/s (см., например, [21]) и в газообразной среде величина параметра We ограничена сверху

значением $We \sim 1$. В других приложениях, когда струя выдавливается из капилляра или трубки под действием перепада давлений, ее скорость (а следовательно, и величина параметра We) может быть существенно больше. Так, в [22] приведена фотография незаряженной струи, распадающейся на мелкие капельки вследствие реализации на ее поверхности неустойчивости на тангенциальном скачке поля скоростей с $We \sim 100$.

На рис. 2, *a-c* приведены зависимости $We_* = We_*(k, w)$ для различных азимутальных чисел m , пересеченные плоскостями $We(k, w) = \text{const}$. Неустойчивость капиллярных волн на поверхности струи будет реализовываться при значениях k и w , лежащих на плоскости $We(k, w) = \text{const}$ в областях, ограниченных линией пересечения с поверхностью $We_* = We_*(k, w)$, для которых $We_* < \text{const}$.

Согласно рис. 2, *a*, область неустойчивости осесимметричных волн при $We = 0$ лежит на плоскости $We(k, w) = 0$ в окрестности начала координат множества точек $\{k, w\}$ и ограничена справа поверхностью $We_* = We_*(k, w)$. При $w = 0$ область неустойчивости сводится к отрезку $0 < k \leq 1$ в согласии с классическими представлениями об устойчивости струи в отсутствие внешних силовых воздействий [1–3]. С ростом w геометрическое место точек значений k , соответствующих неустойчивым состояниям, сокращается вследствие стабилизирующего влияния продольного электростатического поля [7]. С ростом параметра We размеры области неустойчивости расширяются.

На рис. 2, *b* приведены зависимости, аналогичные рис. 2, *a*, но построенные для изгибной моды $m = 1$. Как известно [1–3], в отсутствие внешних силовых полей и электрического заряда на струе неосесимметричные моды с $m \geq 1$ устойчивы. Внешнее продольное электростатическое поле повышает устойчивость неосесимметричных волн на поверхности струи, а ее движение относительно материальной внешней среды понижает. В отсутствие внешнего поля изгибная мода незаряженной струи теряет устойчивость при конечном значении параметра We , а именно при $We = 1$ теряют устойчивость весьма длинные волны с $k \sim 0$. На рис. 2, *b* поверхность $We_* = We_*(k, w)$ для изгибной моды $m = 1$ пересекается плоскостью $We = 2$, а область неустойчивости представляет собой часть плоскости $We = 2$ в левом переднем углу, ограниченная справа поверхностью $We_* = We_*(k, w)$. Видно, что с ростом полевого параметра геометрическое место точек значений волновых чисел k , соответствующих неустойчивым состояниям, сокращается.

На рис. 2, *c* приведены зависимости, аналогичные изображенным на рис. 2, *a*, но построенные для изгибно-деформационной моды $m = 2$: поверхность $We_* = We_*(k, w)$ для $m = 2$ пересекается плоскостями $We = 6$ и $We = 9$. Расчеты показывают, что в отсутствие внешнего электростатического поля, коллинеарного струе, неустойчивости моды с $m = 2$ проявляются лишь при достаточно большом значении скорости движения струи — при $We \approx 5.2$. При $We > 5.2$

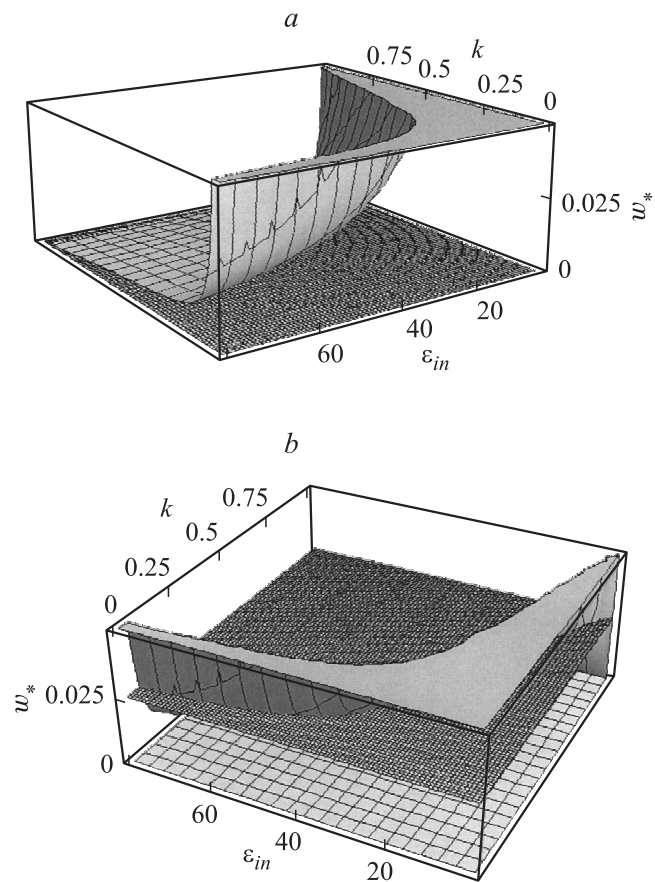


Рис. 3. *a* — зависимость $w_* = w_*(k, \epsilon_{in})$ для осесимметричных ($m = 0$) волн, пересеченная плоскостью $w_* = 0$. Рассчитано при $\rho = 0.001$, $We = 0$, $\epsilon_{ex} = 1$. *b* — то же, что на рис. 3, *a*. Пересечено двумя плоскостями $w_* = 0$ и $w_* = 0.025$.

неустойчивым состояниям соответствуют части плоскостей $We = \text{const}$, ограниченные слева и справа поверхностью $We_* = We_*(k, w)$. Из рис. 2, *c* видно, что с ростом полевого параметра w область неустойчивости сужается, а увеличение параметра We приводит к ее расширению. Интересно отметить, что в недавних экспериментах [4], посвященных экспериментальному исследованию распада капель в неоднородном электростатическом поле, зафиксирован выброс неустойчивой каплей струи жидкости, на которой реализуется неустойчивость моды с $m = 2$ (см. фотографию на рис. 13 в [4]). Это, в частности, означает, что в экспериментах по электродиспергированию могут достигаться достаточно большие значения скоростей струй: значения параметра We , бóльшие 5.2, если считать, что струя не заряжена. Наличие же на струе достаточно большого электрического заряда, приходящегося на единицу струи, может привести к реализации неустойчивости моды с $m = 2$ даже при $We = 0$ (в вакууме) [23].

Из (7) видно, что с увеличением напряженности внешнего электростатического поля E_0 (параметра w) критическая для начала распада струи величина скорости стационарного движения U (параметра We) снижается и

при $w = w_*$, где

$$w_* = (1 - k^2 - m^2) \frac{[\varepsilon_{in} g_m(k) - \varepsilon_{ex} h_m(k)]}{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 k^2}, \quad (8)$$

обращается в нуль. В этой ситуации приходим к задаче об устойчивости струи в продольном электростатическом поле в вакууме, разобранный в [7]. Поскольку продольное электростатическое поле играет стабилизирующую роль, то неустойчивость волны с азимутальным числом m реализуется при $w_* < w$ [3,7,8].

На рис. 3, *a* приведена поверхность $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$ для осесимметричных ($m = 0$) волн, пересеченная плоскостью $w_* = 0$ по линии $k = 1$. При $w_* = 0$ внешнее электростатическое поле отсутствует, область неустойчивости, расположенная на плоскости $w_* = 0$ под поверхностью $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$, не зависит от ε_{in} и определяется условием $0 < k \leq 1$. На рис. 3, *b* поверхность $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$ пересечена плоскостью $w_* = 0.025$. Неустойчивым состояниям соответствует часть плоскости $w_* = 0.025$, лежащая под поверхностью $w_* = w_*(k, \varepsilon_{in})$, справа от нее. Этот рисунок подтверждает стабилизирующую роль коллинеарного струе внешнего электростатического поля: с ростом полевого параметра область неустойчивости сокращается и появляется зависимость от ε_{in} . При $w_* = \text{const}$ с увеличением диэлектрической проницаемости жидкости ε_{in} диапазон величин волновых чисел, соответствующих неустойчивым состояниям, сокращается.

Неосесимметричные волны при $We = 0$ не возбуждаются, как это было ранее отмечено в [7].

Заключение

Для исследования временной эволюции амплитуд капиллярных волн с произвольной симметрией на поверхности струи диэлектрической несжимаемой идеальной жидкости, движущейся относительно материальной диэлектрической среды в коллинеарном струе электростатическом поле, выведено и исследовано дисперсионное уравнение. Выяснилось, что внешнее продольное электростатическое поле оказывает стабилизирующее влияние на волны независимо от их симметрии, а движение струи относительно внешней материальной среды играет дестабилизирующую роль. При одновременном влиянии обоих обсуждаемых воздействий на струю дестабилизирующее влияние движения струи относительно среды оказывает решающее воздействие. Неустойчивости неосесимметричных мод имеют пороговый характер по скорости, причем величины порогов увеличиваются с ростом напряженности внешнего продольного электростатического поля.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-08-00148.

Список литературы

- [1] *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)*. // Proc. London Math. Soc. 1878. Vol. 10. P. 4–13.
- [2] *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей)*. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
- [3] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль; Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [4] *Kim O.V., Dunn P.F.* // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15807–15813.
- [5] *Глотти Г.А.* // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 5. С. 1328–1330.
- [6] *Шутов А.А.* // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 52–67.
- [7] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 47–51.
- [8] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 57–68.
- [9] *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* // Phil. Mag. 1892. Vol. 34. Ser. 5. P. 177–180.
- [10] *Basset A.V.* // Amer. J. Math. 1894. Vol. 16. P. 93–110.
- [11] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Волкова М.В.* // ЭОМ. 2010. № 3. С. 22–28.
- [12] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 2. С. 16–22.
- [13] *Cloupeau M., Prunet Foch B.* // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.
- [14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 3. С. 13–25.
- [15] *Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I.* // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
- [16] *Jaworek A., Krupa A.* // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [17] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [18] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [19] *Ширяева С.О.* // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.
- [20] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 2. С. 19–27.
- [21] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов. Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.
- [22] *Eggers J., Willermaux E.* // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. N 036601. P. 1–79.
- [23] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 36–45.