

01;03

## Влияние меридионального течения и термомагнитной конвекции на характеристики магнитожидкостного уплотнения

© М.С. Краков, И.В. Никифоров

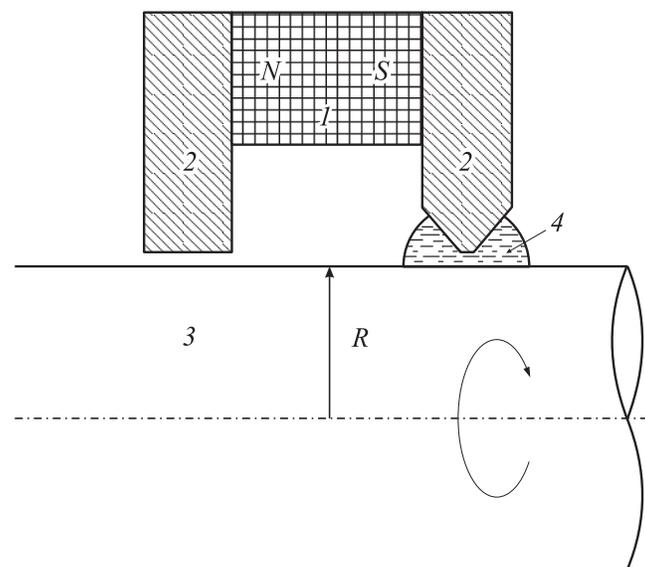
Белорусский национальный технический университет,  
220013 Минск, Беларусь  
e-mail: mskrakov@gmail.com

(Поступило в Редакцию 24 февраля 2011 г.)

Исследовано влияние вызванного вращением вала течения в меридиональном сечении магнитожидкостного уплотнения на распределение концентрации магнитных частиц в объеме магнитной жидкости в низкоскоростных уплотнениях. Изучено также влияние термомагнитной конвекции на структуру этого течения и на распределение температуры в высокоскоростных магнитожидкостных уплотнениях. Проблемы исследованы численными методами. Обнаружено, что даже слабое вращение вала гомогенизирует распределение концентрации магнитных частиц в уплотнении и тем самым существенно повышает его эксплуатационный ресурс. В высокоскоростных уплотнениях термомагнитная конвекция обеспечивает доставку потока жидкости в область узкого зазора и выравнивает распределение температуры, снижая ее максимальное значение, и тем самым также увеличивает ресурс. Обнаружено также, что влияние термомагнитной конвекции возрастает с увеличением вязкости магнитной жидкости.

### Введение

Магнитожидкостное уплотнение (МЖУ) практически любой конструкции сводится к схеме, изображенной на рис. 1. Вращающийся вал, выполненный из магнитопроводящего материала (как правило, стали), охватывается магнитной системой, концентрирующей магнитный поток в узком зазоре, в котором напряженность магнитного поля достигает максимального значения (до  $H_{\max} \approx 1.5 \cdot 10^6$  А/м). В этом зазоре располагается кольцевой объем магнитной жидкости, выполняющий функцию герметизатора.



**Рис. 1.** Схема МЖУ: 1 — постоянный магнит, 2 — магнитопровод, 3 — уплотняемый вал, 4 — магнитная жидкость.

В статике при отсутствии вращения вала перепад давления  $\Delta p$ , удерживаемый МЖУ, определяется выражением [1]

$$\Delta p = \mu_0 [(MH)_{\max} - (MH)_s], \quad (1)$$

где  $M$  — намагниченность магнитной жидкости,  $H$  — напряженность магнитного поля, индекс  $\max$  соответствует значениям в наиболее узкой части рабочего зазора МЖУ, а индекс  $s$  — значениям на поверхности объема магнитной жидкости.

Магнитная жидкость представляет собой коллоидный раствор магнитных наночастиц в жидкости-носителе (средний диаметр 10 nm). В гравитационном поле такой раствор в силу малости частиц является устойчивым, седиментация частиц компенсируется их броуновским движением, и магнитная жидкость остается стабильной на протяжении десятков лет. Но в рабочей зоне МЖУ градиент магнитного поля столь велик, что эффективное ускорение свободного падения частиц в магнитном поле превышает гравитационное на четыре порядка, т. е. составляет величину порядка 10 000 g. В этой ситуации магнитные частицы в коллоидном растворе не могут стабилизироваться тепловым движением и концентрация частиц в зазоре МЖУ растет. Это приводит, с одной стороны, к росту намагниченности магнитной жидкости в зазоре и соответственно к росту удерживаемого МЖУ перепада давления с течением времени [2]. С другой стороны, этот процесс ведет к распаду магнитной жидкости как целого и может привести к выходу МЖУ из строя. Вращение вала может внести существенные изменения в равновесное распределение концентрации магнитных наночастиц в объеме магнитной жидкости, причем эти изменения зависят от структуры течения в объеме магнитной жидкости.

Еще одна сторона функционирования МЖУ, тесно связанная с течением в объеме магнитной жидкости, проявляется при высоких скоростях вращения вала. Так как в объеме магнитной жидкости под действием сил вязкого трения выделяется тепло, то жидкость нагревается. В результате отвода тепла в полюс магнитной системы температура может стабилизироваться, но характер ее распределения в объеме магнитной жидкости, а также максимальное значение установившейся температуры будут определяться не только уравнениями теплового баланса, но и структурой течения в объеме магнитной жидкости.

Таким образом, для расчета ряда характеристик МЖУ определяющим может оказаться учет меридионального течения в объеме магнитной жидкости.

## Определяющие уравнения

Так как течение в МЖУ является осесимметричным, то известное уравнение Навье-Стокса, записанное в цилиндрической системе координат, принимает вид

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right), \quad (2)$$

$$v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \frac{v_r v_\varphi}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right), \quad (3)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad (4)$$

а уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0. \quad (5)$$

Для моделирования рабочей зоны МЖУ в дальнейшем будем использовать геометрическую модель, предложенную в [3]. В рамках этой модели полагаем, что полюс магнитной системы, под которым удерживается магнитная жидкость, описывается гиперболой с углом раствора  $2\beta$ , минимальное расстояние от полюса до поверхности вала равно  $a$ , а форма свободной поверхности магнитной жидкости фиксирована и совпадает с изолинией постоянного значения напряженности магнитного поля (рис. 2).

Так как для МЖУ типичными размерами являются зазор шириной  $a \sim 0.2 \text{ mm}$ , а радиус вала  $R \sim 20\text{--}50 \text{ mm}$ , то заведомо выполняется соотношение  $R \gg a$ . Так как все производные по  $r$  и по  $z$  имеют порядок  $1/a$ ,

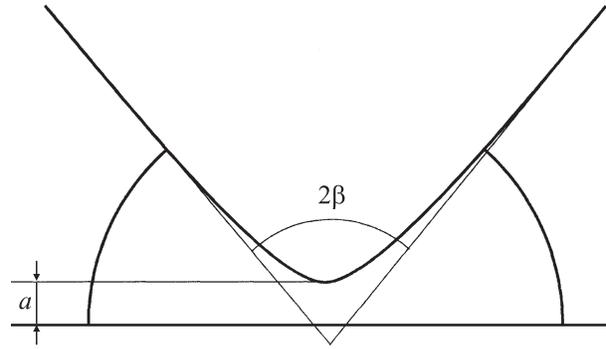


Рис. 2. Геометрия задачи.

производная по углу  $\varphi$  равна нулю для осесимметричного течения, а величина  $r$  в уравнениях (2)–(5) имеет порядок  $R$ , то эта система уравнений может быть существенно упрощена. Уравнения (2), (4) и (5) примут вид

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

а уравнение (3) требует более детального рассмотрения. Введем безразмерные скорости и координаты и выберем в качестве масштабов линейную скорость поверхности вращающегося вала  $V$ , радиус вала  $R$  в качестве характерного размера радиуса, а величину зазора  $a$  в качестве характерного масштаба, на котором вычисляются производные. Так как азимутальное течение  $v_\varphi$ , вызванное вращением вала, играет роль источника в уравнении (6), то из его левой части следует, что должно выполняться соотношение

$$v_r, v_z \sim \sqrt{\frac{a}{R}} v_\varphi.$$

Тогда уравнение (3) для безразмерных компонент скорости может быть записано в виде

$$\text{Re} \sqrt{\frac{a}{R}} \left( v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right), \quad (9)$$

где  $\text{Re} = Va/\nu$  играет роль числа Рейнольдса. В дальнейшем предполагается, что выполняется соотношение  $\text{Re} \sqrt{a/R} \ll 1$ , и уравнение (9) может быть записано в виде

$$\left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, в дальнейшем для анализа течения магнитной жидкости используются уравнения (6)–(8) и (10). Нужно отметить, что уравнение (10) дает возможность найти распределение азимутальной скорости  $v_\varphi$  независимо от радиальной и осевой компонент.

Последние же связаны с азимутальной скоростью только через последний член в левой части уравнения (6). Это дает возможность использовать азимутальную скорость, найденную из уравнения (10), для определения меридионального течения из уравнений (6)–(8). Уравнение (8) дает возможность ввести функцию тока  $\psi$  так, что  $v_r = -\partial\psi/\partial z$ ,  $v_z = \partial\psi/\partial r$ . Введем также функцию вихря  $\omega = \text{rot} v$  для меридиональных компонент скорости и, продифференцировав уравнение (6) по  $z$ , а уравнение (7) по  $r$ , получим следующее безразмерное уравнение:

$$\text{Re} \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial r^2} + \frac{\text{Re}}{R} \frac{\partial v_\varphi^2}{\partial z}, \quad (11)$$

где в качестве масштабов использованы скорость поверхности вала  $V$ , ширина зазора  $a$  и вязкость магнитной жидкости  $\nu$ .

### Влияние вращения вала на распределение концентрации магнитных наночастиц в МЖУ и стабильность его характеристик

Под действием неоднородного магнитного поля магнитные наночастицы стремятся двигаться в область максимального поля, т.е. наиболее узкую часть зазора. Концентрация частиц в этой области росла бы бесконечно, если бы не ограничивающие факторы. Прежде всего это диффузия частиц, вызываемая их тепловым движением. Под действием диффузионного процесса частицы движутся в противоположном направлении, т.е. из области с повышенной концентрацией. Так как магнитное поле является осесимметричным, то трансляционное движение частиц лежит в плоскости  $r-z$ . Вращение вала вызывает азимутальное движение жидкости, т.е. направленное перпендикулярно трансляционному движению частиц и, казалось бы, не должно оказывать влияния на их движение в меридиональной плоскости, т.е. и на установившуюся концентрацию частиц и, как следствие, на удерживаемый уплотнением перепад давления (так как намагниченность жидкости, входящая в выражение (1), зависит от концентрации частиц). Однако, как видно из уравнения (11), решение  $\psi = 0$ ,  $\omega = 0$  возможно только в случае

$$\frac{\partial v_\varphi^2}{\partial z} = 0, \quad (12)$$

т.е. движение жидкости может оставаться строго азимутальным только в бесконечном цилиндрическом зазоре. Если зазор имеет конечную длину вдоль вала или его границы не параллельны поверхности вала, то условие (12) не выполняется, и возникает вторичное течение в плоскости  $r-z$ . Очевидно, что такое течение будет делать распределение частиц в объеме магнитной жидкости более однородным, т.е. и удерживаемый уплотнением перепад давления будет меньше изменяться во времени.

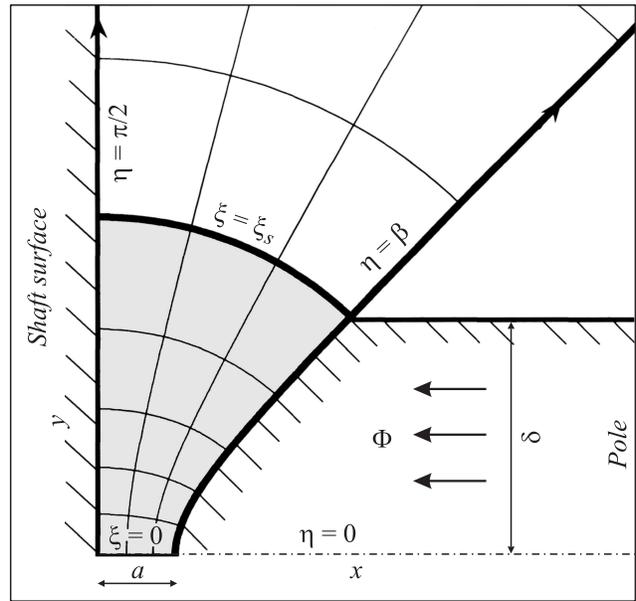


Рис. 3. Расчетная область.

В рамках используемой геометрии рабочего объема можно ввести координаты эллиптического цилиндра (рис. 3)

$$x = c \cos \eta \cosh \xi,$$

$$y = c \sin \eta \sinh \xi, \quad (13)$$

где  $c = a / \cos \beta$ ,  $0 \leq \xi \leq \infty$ ,  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ . Координата  $x$  вводится так, что  $r = R + x$  и направлена перпендикулярно поверхности вала МЖУ, а координата  $y = z$  и направлена вдоль поверхности вала.

Так как для равновесного распределения концентрации наночастиц под полюсом МЖУ принципиально важное значение имеет распределение магнитного поля, то найдем решение уравнений Максвелла в заданной геометрии. Считаем магнитную проницаемость вала и полюса МЖУ бесконечно большими ( $\mu = \infty$ ). Так как магнитное поле в зазоре уплотнения очень велико ( $H > 10^6$  A/m) и значительно превосходит намагниченность магнитной жидкости ( $M \sim 5 \cdot 10^4$  A/m), то магнитную проницаемость магнитной жидкости можно считать равной проницаемости вакуума ( $\mu = \mu_0$ ). Это означает, что магнитное поле в объеме неэлектропроводной магнитной жидкости определяется уравнениями

$$\text{div} \mathbf{B} = \text{div} \mu \mathbf{H} = \mu_0 \text{div} \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{H} = 0. \quad (14)$$

Можно ввести функцию  $\Psi$  такую, что  $H_x = \partial\Psi/\partial y$ ,  $H_y = -\partial\Psi/\partial x$ . Тогда уравнение  $\text{div} \mathbf{H} = 0$  удовлетворяется автоматически, а уравнение  $\text{rot} \mathbf{H} = 0$  сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\Psi = 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) в системе координат эллиптического цилиндра имеет простой вид

$$H = \frac{A}{\sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}}. \quad (16)$$

Если весь магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый магнитом, проходит через полюс шириной  $2\delta$  и сосредоточен внутри объема магнитной жидкости, ограниченного координатной линией  $\xi_s$ , то магнитное поле задается выражением

$$H = \frac{(\Phi/2\delta)\gamma \cos \beta}{\xi_s \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta}}, \quad (17)$$

где  $\gamma = \delta/a$ .

Уравнения движения в эллиптической системе координат (13) принимают вид

$$\left( \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \eta^2} \right) = 0, \quad (18)$$

$$\omega = -\frac{\cos^2 \beta}{(\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta)} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \xi} - \text{Re} \omega \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \text{Re} \omega \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \\ & = \frac{\text{Re}}{R \cos \beta} \left( \cosh \xi \sin \eta \frac{\partial v_\varphi^2}{\partial \xi} + \sinh \xi \cos \eta \frac{\partial v_\varphi^2}{\partial \eta} \right). \quad (20) \end{aligned}$$

Еще раз подчеркнем, что из уравнения (20) видно, что нулевое решение  $\omega = 0$ ,  $\psi = 0$  возможно только тогда, когда  $\partial v_\varphi / \partial \eta = 0$ , т.е. только в зазоре между бесконечными цилиндрами. Если же форма капли магнитной жидкости отличается от цилиндрической, то  $\omega \neq 0$ ,  $\psi \neq 0$ . Это означает, что при вращении вала в капле магнитной жидкости кроме азимутального течения  $v_\varphi$  обязательно существует меридиональное течение  $v_x$ ,  $v_y$ . Так как такое течение лежит в плоскости градиента концентрации ( $c = c(x, y)$ ), то вращение вала должно влиять на распределение магнитных частиц в объеме магнитной жидкости.

Задача о течении магнитной жидкости решалась численно методом конечных разностей в системе координат эллиптического цилиндра. На твердых поверхностях использовалось условие прилипания:  $v_\varphi = 0$  на поверхности полюса,  $v_\varphi = 1$  на поверхности вала,  $v_x = 0$ ,  $v_y = 0$ . На свободной поверхности  $\xi = \xi_s$  и в плоскости симметрии  $\xi = 0$  использовалось условие равенства нулю касательных напряжений  $\partial v / \partial \eta = 0$ . Типичная картина течения представлена на рис. 4.

Для броуновских наночастиц с концентрацией  $c$  и плотностью  $\rho$  закон сохранения массы имеет вид

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div} \mathbf{i} = 0, \quad (21)$$

где  $\mathbf{i}$  — плотность потока массы, которая равна

$$\mathbf{i} = \rho D \nabla c + \rho c \mathbf{b} \mathbf{f} + \rho \mathbf{v}. \quad (22)$$

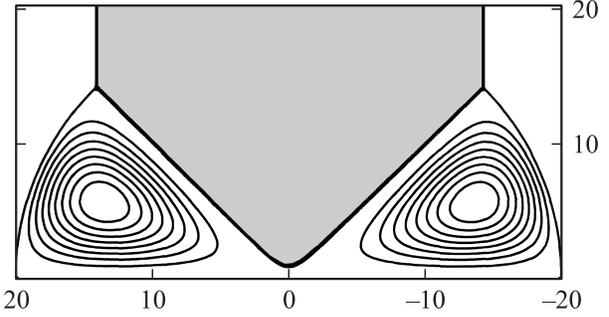


Рис. 4. Типичная картина течения:  $\gamma = 10$ ,  $\beta = 45$  deg,  $\text{Re} = 1$ ,  $R = 100$ .

В этом выражении  $D$  — коэффициент диффузии,  $b = D/kT$ ,  $\mathbf{v}$  — скорость движения жидкости,  $\mathbf{f}$  — сила, действующая на частицы со стороны магнитного поля. Для сферической частицы  $b = 1/6\pi\eta R$ , где  $R$  — радиус частицы,  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости,  $\mathbf{f} = \mu_0 m \nabla H$ ,  $m$  — магнитный момент частицы,  $m = (4/3)\pi R^3 M_I$ ,  $M_I$  — намагниченность материала частицы.

Подстановка выражения (22) в уравнение (21) дает уравнение для распределения концентрации частиц в движущейся жидкости

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c - \frac{D}{kT} \mu_0 m \nabla H \nabla c - \frac{D}{kT} \mu_0 m c \Delta H - \mathbf{v} \nabla c \quad (23)$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \Delta c - U \nabla H \nabla c - U c \Delta H - \text{Re} \text{Sc} \mathbf{v} \nabla c, \quad (24)$$

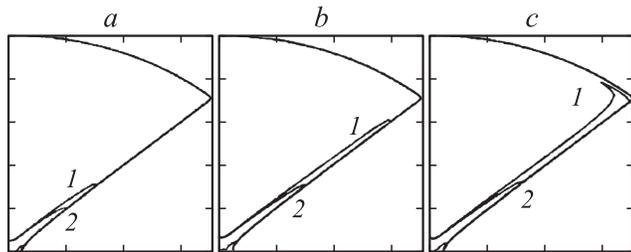
где  $U = \mu_0 m H_0 / kT$ ,  $H_0 = \Phi / 2\delta$ ,  $\text{Re} = Va/\nu$  — число Рейнольдса,  $\text{Sc} = \nu/D$  — число Шмидта, а в качестве масштабов используются  $a^2/D$  — для времени,  $V$  (скорость поверхности вала) — для скорости жидкости,  $a$  — для расстояний,  $H_0$  — для магнитного поля.

В координатах эллиптического цилиндра уравнение (24) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} = & \frac{\cos^2 \beta}{\sinh^2 \xi + \sin^2 \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial c}{\partial \xi} - U c \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial c}{\partial \eta} - U c \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) - \text{Re} \text{Sc} \left( \frac{\partial c}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial c}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

Решение уравнения (25) также находилось численно по методу конечных разностей. В качестве граничных условий для концентрации использовалось условие равенства нулю потока массы на всех границах объема.

В качестве характерных величин использовались следующие значения: вязкость жидкости  $\nu = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ , плотность  $\rho = 1100 \text{ kg}/\text{m}^3$ , диаметр частиц  $d = 10^{-8} \text{ m}$ , температура  $T = 300 \text{ K}$ . Тогда коэффициент диффузии  $D = kT/3\pi\nu\rho d = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ , а число Шмидта  $\text{Sc} = 5 \cdot 10^6$ . Все расчеты проводились для значений  $\text{Sc} = 5 \cdot 10^6$ ,  $U = 0.2; 0.5; 1$ ;  $\text{Re} = 0-2$ .



**Рис. 5.** Изолинии концентрации  $c$ .  $a - t = 1$ ,  $b - t = 3$ ,  $c - t = 5$ ; кривая 1 —  $c = 1.3$ ; 2 —  $c = 1$ ;  $Re = 1$ ,  $\gamma = 10$ ,  $R = 100$ ,  $\beta = 45$  deg.

Изменение профиля концентрации частиц в магнитной жидкости показано на рис. 5. Видно, что концентрация является максимальной около точки  $\xi = 0$ ,  $\eta = \beta$  (вершина полюса). Также видно, что с течением времени частицы равномерно распределяются по объему магнитной жидкости.

Удерживаемый уплотнением перепад давления в условиях переменной концентрации магнитных частиц в рабочем объеме МЖУ уже не описывается уравнением (1), а определяется разностью давлений в зазоре МЖУ и на свободной поверхности капли магнитной жидкости

$$\Delta p = p_{\max} - p_s,$$

которые нужно рассчитывать с учетом переменной концентрации. Максимальное давление можно найти как  $p_{\max} = (\mu_0 M H)_{\max} = (\mu_0 M_I c H)_{\max} = \mu_0 M_I (c H)_{\max}$ ,  $M_I$  — намагниченность частиц,  $c$  — концентрация частиц, найденная из уравнения (21),  $H$  — напряженность магнитного поля, найденная из (17). Соответственно  $p_s = \mu_0 M_I (c H)_s$ . Это означает, что удерживаемый МЖУ-перепад давления определяется выражением

$$\Delta p = \mu_0 M_I [(c H)_{\max} - (c H)_s]. \quad (26)$$

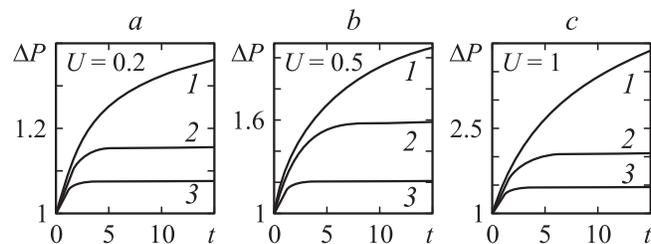
Из численных решений уравнений (17) и (21) находились максимальное и минимальное значение изолиний  $cH$ , пересекающих объем магнитной жидкости от полюса до вала. Их разность, согласно (26), и считалась величиной удерживаемого перепада давления. На рис. 6 показано, как изменяется величина  $\Delta p$  во времени для различных значений параметра  $U$  и числа Рейнольдса  $Re$ .

Из представленных на рис. 6 данных видно, что для всех значений параметра  $U$  величина  $\Delta p$  возрастает во времени и достигает некоего максимального значения, которое тем больше, чем больше величина  $U$ , т.е. магнитный момент частиц. Это означает, что магнитные жидкости с крупными частицами менее устойчивы в МЖУ. Обращает на себя внимание тот факт, что максимальное значение  $\Delta p$  зависит от числа Рейнольдса: с ростом  $Re$  величина  $(\Delta p)_{\max}$  уменьшается. Таким образом, вращение вала, вызывающее меридиональное течение в рабочем объеме МЖУ, способствует перемешиванию жидкости и тем самым приближает распределение частиц в магнитной жидкости к равномерному.

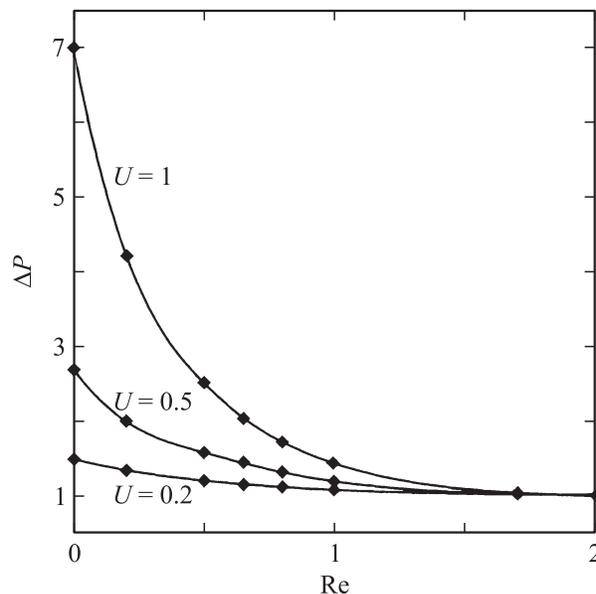
Соответственно величина  $\Delta p$  приближается к начальному значению  $\Delta p_0 = \mu_0 M_S (H_{\max} - H_s)$ , когда  $c = c_0$ .

Из рис. 7 видно, что при  $Re \sim 2 \Delta p / \Delta p_0 \approx 1$ . Это означает, что в магнитоожидкостном уплотнении с зазором  $a = 2 \cdot 10^{-4}$  м, вязкостью жидкости  $\nu = 1.4 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с уже для скорости вала  $V \approx 0.1$  м/с (т.е.  $Re \approx 1.5$ ) меридиональное течение выравнивает распределение частиц в объеме магнитной жидкости. В результате удерживаемый МЖУ-перепад давления практически не изменяется во времени.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что при вращении вала в меридиональной плоскости возникает циркуляционное течение, которое приводит к более равномерному распределению магнитных наночастиц в рабочем объеме магнитоожидкостного уплотнения. Интенсивность этого течения пропорциональна скорости вращения вала. Если в случае неподвижного вала концентрация частиц в рабочем зазоре возрастает во времени, увеличиваясь в конечном счете в 2–3 раза, то вращение вала существенно уменьшает этот рост. Уже при скорости поверхности вала около 0.1 м/с концентрация наночастиц в объеме жидкости остается



**Рис. 6.** Зависимость перепада давления, удерживаемого МЖУ, от времени.  $a$  и  $c$ : 1 —  $Re = 0$ ; 2 — 0.65; 3 — 1;  $b$ : 1 —  $Re = 0$ ; 2 — 0.5; 3 — 1.



**Рис. 7.** Зависимость удерживаемого МЖУ перепада давления от скорости вращения вала.  $\gamma = 10$ ,  $R = 100$ ,  $\beta = 45$  deg.

однородной и неизменной во времени. Это означает, что даже небольшое вращение вала значительно стабилизирует эксплуатационные характеристики МЖУ.

## Распределение температуры в рабочем объеме МЖУ

Аналогично влиянию циркуляционного течения на распределение концентрации магнитных частиц следует ожидать и выравнивания температурного поля в высокоскоростных МЖУ, в которых магнитная жидкость нагревается из-за вязкого трения. Это влияние было исследовано ранее в работе [4]. Однако в дополнение к циркуляционному течению в таких МЖУ может оказаться существенным еще один фактор — естественная термомагнитная конвекция. На первый взгляд, исходя из привычных нам масштабов явлений, естественная конвекция всегда слабее, чем вынужденная. То есть маловероятно, что в высокоскоростном МЖУ, в котором скорость вала достигает 10 м/с при том, что капля магнитной жидкости имеет в сечении размеры до 5 мм, естественная конвекция может оказаться существенной. Однако следует учесть, что магнитные силы в объеме МЖУ очень велики. Если проводить аналогию с гравитационными силами, то эффективное ускорение свободного падения в объеме магнитной жидкости в МЖУ достигает  $g_{\text{эф}} = \mu_0 M \nabla H / \rho \approx (1.28 \cdot 10^{-6}) \times (4 \cdot 10^4) (10^6 / 2 \cdot 10^{-4}) / 10^3 \approx 10^5 \text{ м/с}^2 \approx 10\,000 \text{ г}$ .

Таким образом, термомагнитная конвекция в МЖУ возникает под воздействием силы, на четыре порядка превосходящей гравитационную, т.е. и интенсивность ее может оказаться на четыре порядка превосходящей естественную гравитационную конвекцию в аналогичных условиях. Эти соображения говорят о том, что при расчете теплового режима высокоскоростных МЖУ нельзя пренебречь естественной термомагнитной конвекцией, тем более что и перепады температур в объеме магнитной жидкости в таких МЖУ весьма велики.

Так как вектор градиента магнитного поля лежит в меридиональной плоскости, то компоненты термомагнитной выталкивающей силы добавляются только в уравнения для радиальной и аксиальной компонент скорости (6) и (7). В приближении Буссинеска эти уравнения приобретают вид

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial M}{\partial T} (T - T^*) \frac{\partial H}{\partial r}, \quad (27)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial M}{\partial T} (T - T^*) \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (28)$$

При стандартном переходе к переменным „функция тока–вихрь в безразмерной форме“ эти уравнения сводятся к системе уравнений

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\text{Re}}{R} \frac{\partial v_\varphi^2}{\partial z} - \frac{\text{Gr}_m}{\text{Re}} [\nabla \times (MT \nabla H)]_\varphi, \quad (29)$$

$$\Delta \psi = -\omega,$$

где  $\text{Gr}_m = \mu_0 \beta_\rho \Delta T^* H_0 M_S a^2 / \rho_0 v^2$  — магнитное число Грассофа. Здесь полагается, что  $\partial M / \partial T \approx M \beta_\rho [1]$ .

Уравнение переноса тепла в меридиональной плоскости имеет вид (с учетом того, что  $v_r, v_z \ll v_\varphi$ )

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T = \kappa \Delta T + \frac{v}{2c_p} \left[ \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{R} \frac{\partial v_\varphi^2}{\partial r} + \frac{v_\varphi^2}{R^2} \right], \quad (30)$$

где последний член представляет собой источник тепловыделения вследствие вязкого трения.

В безразмерной форме уравнение (30) может быть переписано в виде

$$\text{Pe} v \nabla T = \Delta T + \text{PrERe}^2 \left[ \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (31)$$

где  $\text{Pr} = \nu / \kappa$  — число Прандтля,  $\text{Re} = Va / \nu$  — число Рейнольдса,  $\text{Pe} = \text{RePr}$  — число Пекле,  $E = v^2 / c_p T_0 a^2$ ,  $\text{Gr}_m = \mu_0 \beta_\rho T_0 H_0 M_S a^2 / \rho_0 v^2$ , в качестве масштабов в дальнейшем используются значения  $V_0 = 1 \text{ м/с}$ ,  $T_0 = 1 \text{ К}$ ,  $H_0$  — максимальное значение напряженности магнитного поля под полюсом МЖУ.

Как видно из уравнения (27), существует два источника меридионального течения: первый  $v_\varphi^2 / R$  вызван вращением вала и пропорционален  $V^2 / R$ , а причина второго — термомагнитная конвекция, и он пропорционален  $\mu_0 M \beta_\rho H_0 \Delta T / \rho_0 a$ . В обычных условиях вторая величина существенно меньше первой, но в высокоскоростных МЖУ, в которых одновременно с чрезвычайно сильным градиентом магнитного поля присутствуют экстремально высокие градиенты температуры, ситуация может оказаться обратной. Так, например, для  $V = 10 \text{ м/с}$ ,  $R = 5 \text{ см}$  величина первого источника имеет порядок  $2 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2$ . Для типичных для МЖУ-величин  $M_S \sim 4 \cdot 10^4 \text{ А/м}$ ,  $H_0 \sim 10^6 \text{ А/м}$ ,  $\beta_\rho \sim 10^{-3} \text{ 1/К}$ ,  $\rho_0 \sim 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $a = 0.2 \text{ мм}$  второй источник имеет порядок  $2.5 \cdot 10^2 \Delta T \text{ м}^2/\text{Кс}^{-2}$ .

Ясно, что уже при перепадах температур внутри объема магнитной жидкости  $\Delta T$  больше 10 К влияние термомагнитной конвекции на меридиональное течение становится сопоставимым с влиянием вращения вала. Так как в высокоскоростных МЖУ-величина перегрева магнитной жидкости может достигать 100 К и более,

то необходимость учета термомагнитной конвекции при анализе течения в объеме магнитной жидкости и расчете распределения температуры в этом объеме становится очевидной.

Как известно, интенсивность термомагнитной конвекции пропорциональна степени неравномерности нагрева жидкости  $\Delta T$ . Последняя определяется уравнением переноса тепла (30), в котором источником тепла является вязкое трение. Таким образом, перепад температуры в объеме магнитной жидкости, т. е. и интенсивность термомагнитной конвекции, пропорциональны вязкости жидкости. Это весьма необычная ситуация для естественной конвекции, которая, как правило, слабее в более вязких жидкостях. В высокоскоростных МЖУ, как видим, влияние конвекции должно быть сильнее выражено для более вязких жидкостей.

Граничные условия для функции тока и вихря находятся из граничных условий для скорости: условия прилипания на твердых границах  $\eta = \beta$ ,  $\eta = \pi/2$ , условия симметрии на плоскости симметрии  $\xi = 0$  и условия нулевого трения  $\partial v / \partial \xi = 0$  на свободной поверхности  $\xi = \xi_s$ .

Граничные условия для температуры выбирались исходя из следующих соображений. Так как исследуется стационарное установившееся распределение температуры, то поток тепла во вращающийся вал после его прогрева становится пренебрежимо малым, и им можно пренебречь. Поэтому три границы  $\eta = \pi/2$  (вал),  $\xi = 0$  (плоскость симметрии) и  $\xi = \xi_s$  (свободная поверхность) считаются теплоизолированными:  $\partial T / \partial n = 0$ , где  $n$  — направление нормали к поверхности.

Полагаем также, что все диссипативное тепло отводится системой охлаждения полюса, через который прокачивается охлаждающая жидкость с температурой  $T_C = 0$ . Тогда условие теплообмена на границе полюса имеет вид

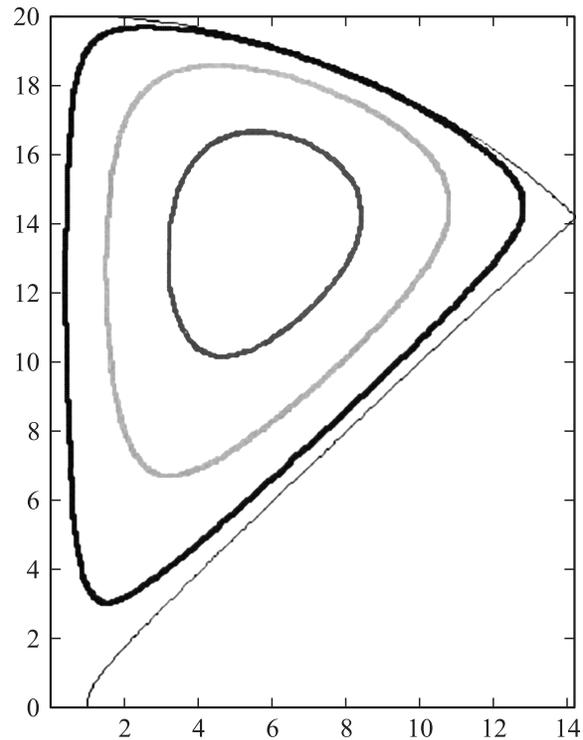
$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_C) \quad \text{или} \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha T,$$

где вектор  $\mathbf{n}$  направлен внутрь полюса, а  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи. В безразмерном виде это условие можно записать

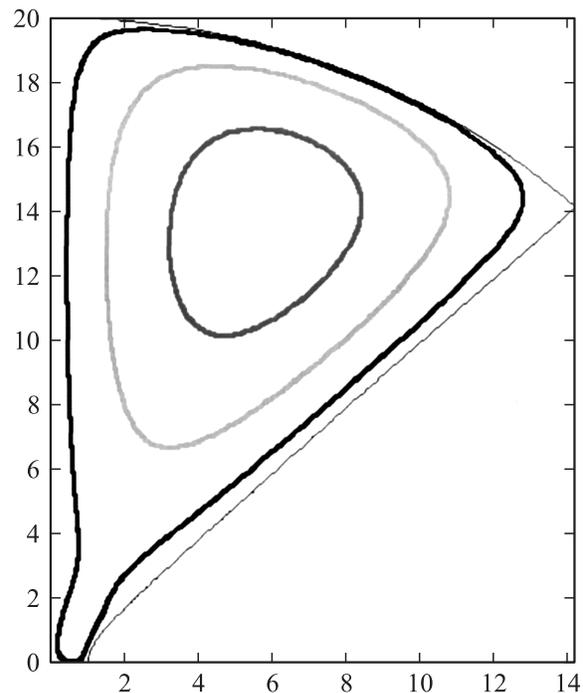
$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\text{Bi}T,$$

где  $\text{Bi} = \alpha a / \lambda$  — число Био. Известно, что для теплообмена между твердой металлической стенкой и жидкостью характерным является значение числа Био около 20. Это значение и использовалось в ходе численного анализа.

Уравнения (29), (31) решались численно по методу конечных разностей в геометрии, представленной выше (рис. 3), в координатах эллиптического цилиндра (13). При построении разностной схемы использовался метод контрольных объемов, причем для функции тока использовалась линейная интерполяционная функция, а для вихря и температуры — экспоненциальная функция Патанкара, учитывающая направление и величину скорости течения в контрольном объеме [5].

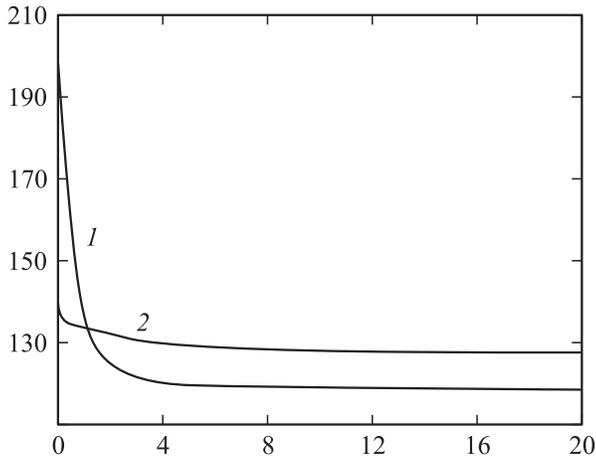


**Рис. 8.** Картина стационарного течения в меридиональной плоскости МЖУ.  $\text{Pr} = 5100$ ,  $E = 3.68 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\text{Re} = 5$  ( $V = 12.5 \text{ m/s}$ ),  $\text{Gr}_m = 0$ .

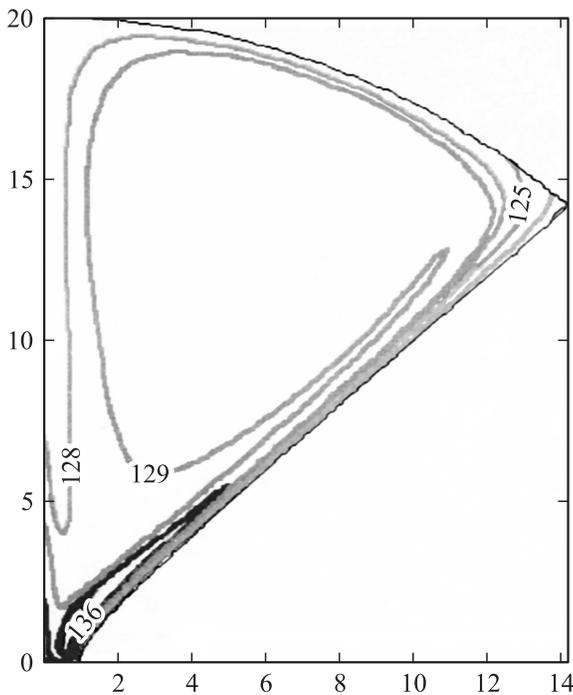


**Рис. 9.** Картина стационарного течения в меридиональной плоскости МЖУ.  $\text{Pr} = 5100$ ,  $E = 3.68 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\text{Re} = 5$  ( $V = 12.5 \text{ m/s}$ ),  $\text{Gr}_m = 0.0134$ .

В расчетах использовались типичные значения физических свойств магнитных жидкостей и геометрии МЖУ: величина зазора магнитопровода  $a = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ ,



**Рис. 10.** Зависимость перегрева вала (K) от расстояния до плоскости симметрии.  $Pr = 2040$ ,  $E = 5.88 \cdot 10^{-4}$ ,  $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $V = 30 \text{ m/s}$ . Кривая 1 —  $Gr_m = 0$ , 2 —  $Gr_m = 0.0838$ .



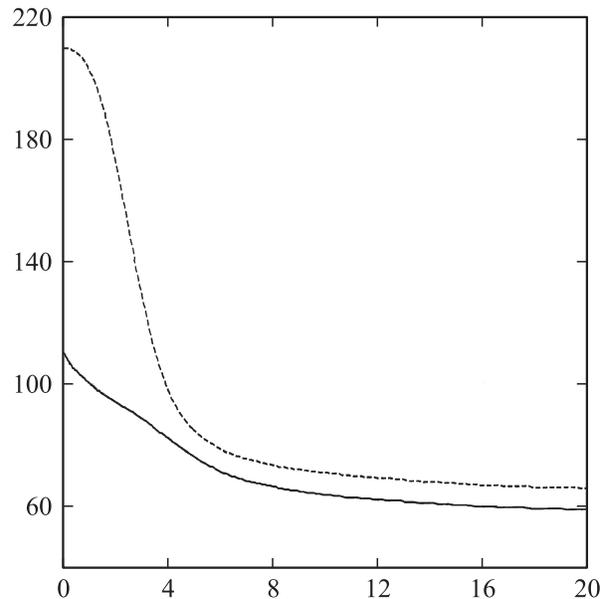
**Рис. 11.** Распределение температуры в объеме магнитной жидкости.  $Pr = 2040$ ,  $E = 5.88 \cdot 10^{-4}$ ,  $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $V = 30 \text{ m/s}$ .  $Gr_m = 0.0838$ .

угол заточки полюса  $\beta = 45 \text{ deg}$ , плотность жидкости  $\rho_0 = 1.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , теплопроводность  $\lambda = 0.2 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ , теплоемкость  $c_p = 1.7 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , коэффициент температуропроводности полагался равным  $\kappa = \lambda / (\rho_0 c_p) = 0.2 / (1.2 \cdot 10^3)(1.7 \cdot 10^3) \approx 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ , коэффициент объемного расширения  $\beta = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , намагниченность насыщения магнитной жидкости  $M_S^* = 4 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ . Скорость поверхности вала  $V$  (т.е. число Рейнольдса  $Re$ ) выбиралась в расчетах таким образом, чтобы перегрев магнитной жидкости не превышал 200 K.

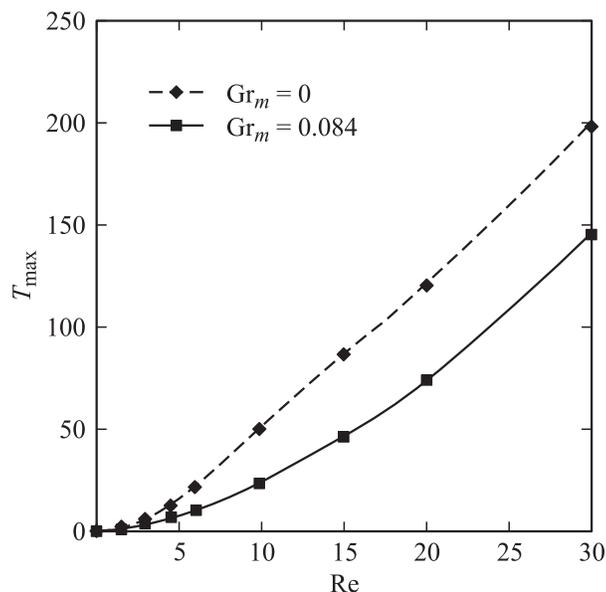
Вязкость жидкостей, используемых в МЖУ, варьируется в диапазоне от  $3 \cdot 10^{-5}$  до  $1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . В названном диапазоне вязкостей число Пекле изменялось от 180 000 при минимальной вязкости до 13 000 при максимальной. Все вычисления проводились на сетке из  $251 \times 151$  узлов с тестовыми вычислениями на более мелкой сетке для проверки точности численного счета. Так как для больших чисел Пекле точность была недостаточна, то вычисления были ограничены минимальной вязкостью  $2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Типичные картины меридионального течения в МЖУ без учета термомагнитной конвекции ( $Gr_m = 0$ ) и с ее учетом ( $Gr_m = 0.0134$ ) представлены на рис. 8 и 9. Из представленных картин видно, что течения отличаются только в области полюса. Течение, модифицированное термомагнитной конвекцией, которая особенно интенсивна там, где сильны магнитное поле и разогрев жидкости, т.е. именно в области вершины полюса, проникает в область узкого зазора. Это означает, что конвективный перенос тепла при этом должен значительно увеличиться, обеспечивая более равномерное распределение температуры в объеме магнитной жидкости.

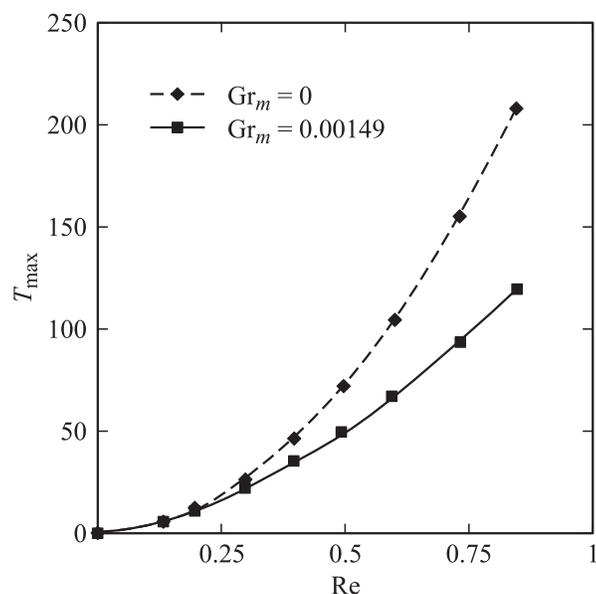
На рис. 10 представлено распределение температуры вдоль поверхности вала для вязкой жидкости  $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ . Расчет без учета термомагнитной конвекции (кривая 1) показывает, что температура вала в плоскости симметрии очень велика (на 194 K больше температуры охлаждающей системы). Учет термомагнитной конвекции (кривая 2) существенно снижает максимальную температуру под полюсом (на 137 K больше температуры охлаждающей системы).



**Рис. 12.** Зависимость температуры поверхности вала от расстояния до плоскости симметрии.  $Pr = 15300$ ,  $E = 3.31 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $V = 6.38 \text{ m/s}$ , штриховая кривая —  $Gr_m = 0$ , сплошная кривая —  $Gr_m = 0.00149$ .



**Рис. 13.** Зависимость перегрева магнитной жидкости под полюсом от скорости вращения вала.  $Pr = 2040$ ,  $E = 5.88 \cdot 10^{-4}$ ,  $\nu = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $V_{\max} = 30 \text{ m/s}$ .



**Рис. 14.** Зависимость перегрева магнитной жидкости под полюсом от скорости вращения вала.  $Pr = 15\,300$ ,  $E = 3.31 \cdot 10^{-2}$ ,  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $V = 6.38 \text{ m/s}$ .

Более того, из рис. 11 видно, что распределение температуры в объеме магнитной жидкости из-за конвективного течения является почти однородным.

Как следует из рис. 12, влияние термомагнитной конвекции на распределение температуры в высокоскоростном МЖУ становится более существенным для магнитной жидкости с большей вязкостью (в частности, наибольшая температура на поверхности вала снижается с 209 до 109 К).

В заключение отметим, что обычно интенсивность теплоотвода за счет вынужденной конвекции с ростом скорости течения возрастает и в конечном счете рано или поздно становится больше теплоотвода за счет естественной конвекции, которая от скорости внешнего течения не зависит. Так как в МЖУ разогрев жидкости определяется вязкой диссипацией, то с ростом скорости вращения вала, т. е. с ростом скорости меридионального течения, растет и перегрев магнитной жидкости. А это, в свою очередь, ведет к интенсификации термомагнитной конвекции. Таким образом, в МЖУ ситуация с термомагнитной конвекцией становится дважды уникальной: ее влияние возрастает как с ростом вязкости магнитной жидкости, так и с ростом скорости вращения вала. Это наглядно демонстрируют кривые, представленные на рис. 13 и 14.

## Заключение

Численный анализ меридионального течения в объеме магнитной жидкости показал, что оно существенно влияет на параметры как стояночных уплотнений, так и высокоскоростных МЖУ. В первом случае обнаружено, что даже очень медленное вращение вала приводит к гомогенному распределению концентрации магнитных наночастиц в рабочем зазоре. Это означает, что такое вращение предотвращает расслоение магнитной жидкости в узле МЖУ и тем самым существенно увеличивает ресурс уплотнения. Обнаружено также, что в высокоскоростных МЖУ существенным является учет термомагнитной конвекции, которая, как выяснилось, приводит к интенсивному течению непосредственно в узком рабочем зазоре под полюсом, снижая в этой области температуру жидкости. Этот анализ показывает, что эксплуатация МЖУ возможна при больших скоростях, чем предполагалось ранее.

## Список литературы

- [1] Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 240 с.
- [2] Taketomi S. // Japan. J. Appl. Phys. 1980. Vol. 19. N 10. P. 1929–1936.
- [3] Полевилов В.К. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 3. С. 170–175.
- [4] Berkovsky B.M., Krakov M.S., Pogirnikskaya S.G. // J. Magn. Magn. Mater. 1995. Vol. 149. N 1–2. P. 101–103.
- [5] Patankar S. // Numerical Heat Transfer And Fluid Flow. Hemisphere, 1980. 197 p.