

01;03

Нелинейный анализ особенностей взаимодействия капиллярных волн конечной амплитуды в слоисто-неоднородной жидкости

© А.И. Григорьев, М.С. Федоров, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия

e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 марта 2011 г.)

В аналитической асимптотической процедуре второго порядка малости по отношению амплитуды волны к толщине слоя жидкости исследованы закономерности реализации нелинейного капиллярного волнового движения в двухслойной стратифицированной по физико-химическим свойствам жидкости со свободной поверхностью. Показано, что в указанной системе реализуется капиллярный аналог эффекта „мертвой воды“ как в линейном, так и в квадратичном приближениях. Показано, что при отсутствии электрического заряда на поверхностях раздела внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие капиллярных волн независимо от места их происхождения отсутствует. При наличии же заряда на границе стратификации такое взаимодействие имеет место.

Введение

Пусть имеется бесконечно глубокая (в физическом смысле) слоисто-неоднородная жидкость со свободной поверхностью, физико-химические свойства верхнего слоя которой отличаются от физико-химических свойств нижнего. Так, феномен динамического поверхностного натяжения связан с образованием двойного электрического слоя у поверхности полярных жидкостей, приводящего к изменению их физико-химических свойств в приповерхностном (толщиной порядка $100 \mu\text{m}$) слоя по сравнению с объемными значениями [1–3]. Феномен самоорганизации магнитных коллоидов [4–6] реализуется на пространственных линейных масштабах порядка единиц μm . Ориентирующее действие твердой подложки на молекулы жидкости и соответствующее изменение свойств жидкости в слоях толщинами порядка десятых долей μm связано с действием флуктуационных сил [7–10]. В упомянутых ситуациях на границе областей стратификации возможно возникновение внутренних капиллярных волн и проявляется микроаналог эффекта „мертвой воды“ в диапазоне весьма коротких капиллярных волн [11]. Сам эффект „мертвой воды“ на гравитационных волнах истолкован Л.Н. Сретенским в начале 30-х годов XX века [12]. Однако нелинейные особенности взаимодействия гравитационных волн, порожденных различными поверхностями, при реализации этого эффекта стали объектом исследования лишь недавно [13]. Аналогичной проблеме, сформулированной для капиллярных волн в капиллярном аналоге эффекта „мертвой воды“ [11], посвящено настоящее рассмотрение.

1. Формулировка задачи

Пусть имеются две идеальные несмешиваемые несжимаемые жидкости, из которых верхняя (в поле силы

тяжести) имеет толщину h , плотность ρ_1 и характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ_1 , а нижняя — с плотностью ρ_2 (по определению $\rho_2 > \rho_1$) заполняет в поле силы тяжести полубесконечное (в физическом смысле) пространство $z \leq 0$. В реальности это означает, что толщина слоя жидкости на твердом дне значительно превышает величины капиллярных постоянных обеих жидкостей (или длины исследуемых капиллярных волн). Сразу подчеркнем, что поле силы тяжести в контексте нижеследующего изложения необходимо лишь для задания выделенного направления, которое может быть определено любым силовым полем, например ориентирующим влиянием твердой стенки или свободной поверхности верхней жидкости. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ_2 . Примем, что часть пространства над верхней жидкостью является вакуумом (представляет собой среду с плотностью, много меньшей плотностей обеих жидкостей, так, что ее влиянием на капиллярное волновое движение в системе можно пренебречь). Будем исследовать устойчивость капиллярного волнового движения на свободной поверхности и на границе раздела сред, а также закономерности обмена энергией между волнами. Следует отметить, что модель несмешиваемых жидкостей описывает реальную ситуацию, если толщина переходного от жидкости с заданным набором физико-химических свойств к жидкости с иным их набором (толщина зоны стратификации) будет много меньше длин рассматриваемых волн и толщины слоя верхней жидкости.

Математическая формулировка задачи имеет вид [11,13]

$$\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j, \nabla) \mathbf{V}_j = -\nabla \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right), \quad \text{div } \mathbf{V}_j = 0 \quad (j = 1; 2),$$

$$z = h + \xi_1 : \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \approx (\mathbf{n}_1, \mathbf{V}_1), \quad P_1 - P_{at} - P_{\sigma_1} = 0,$$

$$z = \xi_2: \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \approx (\mathbf{n}_1, \mathbf{V}_1) = (\mathbf{n}_2, \mathbf{V}_2), \quad P_2 - P_1 - P_{\sigma_2} = 0,$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad \mathbf{V}_2 \rightarrow 0. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)$ — поля скоростей в верхней и нижней жидкостях, индекс $j = 1$ определяет характеристики верхней жидкости, индекс $j = 2$ — нижней, \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — векторы нормали к свободной поверхности верхнего слоя и к границе раздела жидкостей соответственно, $\xi_1(x, t)$ и $\xi_2(x, t)$ — возмущения свободной поверхности слоя и границы раздела сред соответственно, амплитуды которых $|\xi_1| \approx |\xi_2| \ll h$ малые величины, $P_1(\mathbf{r}, t)$ и $P_2(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамические давления в верхнем слое и нижней жидкости, P_{at} — постоянное (атмосферное) давление верхней среды на свободную поверхность слоя, $P_{\sigma_1}(\mathbf{r}, t)$ и $P_{\sigma_2}(\mathbf{r}, t)$ — давления сил поверхностного натяжения на свободную поверхность и на границу раздела сред.

Для замыкания задачи систему уравнений (1) дополним начальными условиями на свободной поверхности и на границе раздела сред

$$t = 0: \quad \xi_1(x, t) = \xi_1 \cos(kx), \quad \xi_2(x, t) = \xi_2 \cos(kx),$$

$$\frac{\partial \xi_1(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \xi_2(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

т.е. рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени заданы волновые деформации с волновым числом k к свободной поверхности жидкости и границы раздела сред при нулевых скоростях движения жидкости.

Решение задачи (1) с начальными условиями (2) будем искать в приближении, квадратичном по малым отношениям амплитуд волн к их длинам.

2. Разделение задачи по порядкам малости

Решение сформулированной задачи естественно искать в рамках модели потенциального течения жидкостей: $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \varphi_j(\mathbf{r}, t)$ ($j = 1; 2$), где $\varphi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_2(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы полей скоростей волнового движения в верхней и нижней жидкостях соответственно. Поскольку движения обеих жидкостей вызваны малыми колебаниями их граничных поверхностей, то примем, что в безразмерных переменных (например $\rho_1 = \sigma_1 = h = 1$) потенциалы $\varphi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_2(\mathbf{r}, t)$ имеют тот же порядок малости, что и амплитуды волн $|\varphi_j| \approx |\xi_j| \approx \varepsilon$, где $\varepsilon \equiv \xi_1/h$ — безразмерная амплитуда начальной деформации, которую примем в качестве малого параметра задачи.

Решение будем искать методом многих временных масштабов [14,15] в виде асимптотических разложений

$$P_j(\mathbf{r}, t) \approx P_j^{(0)}(\mathbf{r}, T_0) + \varepsilon P_j^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1)$$

$$+ \varepsilon^2 P_j^{(2)}(\mathbf{r}, T_0) + O(\varepsilon^3) \quad (j = 1; 2),$$

$$\varphi_j(\mathbf{r}, t) \approx \varepsilon \varphi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \varphi_j^{(2)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^3),$$

$$\xi_j(x, t) \approx \varepsilon \xi_j^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 \xi_j^{(2)}(x, t) + O(\varepsilon^3). \quad (3)$$

В соответствии с основной идеей метода многих временных масштабов будем полагать, что искомые функции зависят не просто от времени t , но и от разных его масштабов T_m , определенных как $T_m \equiv \varepsilon^m t$. Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3).$$

В (3) верхний индекс, стоящий в скобках, означает порядок малости соответствующей компоненты: 0-ом помечены равновесные значения на поверхности, не связанные с возмущением, 1 и 2 — величины первого и второго порядков малости. Нижний индекс характеризует среду.

Подставив разложения (3) в задачу (1) и собрав слагаемые одного порядка малости по ε , несложно выделить краевые задачи различных порядков.

В 0-м порядке малости будем иметь

$$P_j^{(0)} = f_j,$$

$$z = h: \quad f_1 = P_{\text{atm}}, \quad z = 0: \quad f_2 = f_1.$$

Здесь f_1, f_2 — константы интегрирования уравнений Эйлера.

В 1-м порядке малости получим задачу

$$\Delta \varphi_j^{(1)} = 0, \quad P_j^{(1)} = -\rho_j \partial_t \varphi_j^{(1)} \quad (j = 1; 2),$$

$$z = h: \quad -\rho_1 \partial_t \varphi_1^{(1)} + \sigma_1 \partial_{xx} \xi_1^{(1)} = 0, \quad \partial_t \xi_1^{(1)} = \partial_z \varphi_1^{(1)},$$

$$z = 0: \quad -\rho_2 \partial_t \varphi_2^{(1)} + \rho_1 \partial_t \varphi_1^{(1)} + \sigma_2 \partial_{xx} \xi_2^{(1)} = 0,$$

$$\partial_z \varphi_1^{(1)} = \partial_z \varphi_2^{(1)} = \partial_t \xi_2^{(1)},$$

$$z \rightarrow -\infty: \quad |\nabla \varphi_2^{(1)}| \rightarrow 0. \quad (4)$$

Во втором порядке малости получим существенно более громоздкую задачу

$$\Delta \varphi_i^{(2)} = 0,$$

$$P_i^{(2)} = \rho_i \left[f_i^{(2)} - \partial_{T_0} \varphi_i^{(2)} - \partial_{T_1} \varphi_i^{(1)} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi_i^{(1)})^2 \right] \quad i = 1, 2,$$

$$z = h: \quad \partial_z \varphi_1^{(2)} - \partial_{T_0} \xi_1^{(2)} = \partial_x \xi_1^{(1)} \partial_x \varphi_1^{(1)} - \xi_1^{(1)} \partial_{zz} \varphi_1^{(1)} + \partial_{T_1} \xi_1^{(1)},$$

$$\rho_1 (f_1^{(2)} - \partial_{T_0} \varphi_1^{(2)}) + \sigma_1 \partial_{xx} \xi_1^{(2)}$$

$$= \rho_1 \left[\partial_{T_1} \varphi_1^{(1)} + \partial_{z, T_0} \varphi_1^{(1)} \xi_1^{(1)} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1^{(1)})^2 \right],$$

$$z = 0: \quad \rho_1 (\partial_{T_0} \varphi_1^{(2)} - f_1^{(2)}) - \rho_2 (\partial_{T_0} \varphi_2^{(2)} - f_2^{(2)}) + \sigma_2 \partial_{xx} \xi_2^{(2)}$$

$$= -\rho_1 \left[\partial_{T_1} \varphi_1^{(1)} + \partial_{z, T_0} \varphi_1^{(1)} \xi_2^{(1)} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1^{(1)})^2 \right]$$

$$+ \rho_2 \left[\partial_{z, T_0} \varphi_2^{(1)} \xi_2^{(1)} + \partial_{T_1} \varphi_2^{(1)} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_2^{(1)})^2 \right],$$

$$\begin{aligned} \partial_z \varphi_1^{(2)} - \partial_z \varphi_2^{(2)} &= \xi_2^{(1)} \partial_{zz} \varphi_2^{(1)} - \partial_x \xi_2^{(1)} \partial_x \varphi_2^{(1)} \\ &\quad - \xi_2^{(1)} \partial_{zz} \varphi_1^{(1)} + \partial_x \xi_2^{(1)} \partial_x \varphi_1^{(1)}, \\ \partial_z \varphi_2^{(2)} - \partial_{T_0} \xi_2^{(2)} &= \partial_x \xi_2^{(1)} \partial_x \varphi_2^{(1)} - \xi_2^{(1)} \partial_{zz} \varphi_2^{(1)} + \partial_{T_1} \xi_2^{(1)}, \\ z \rightarrow -\infty: \quad |\nabla \varphi_2^{(2)}| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

3. Решение задачи

3.1. Расчет в нулевом и первом порядке малости

В нулевом порядке малости получим выражения для распределения гидродинамических давлений в равновесном состоянии системы

$$P_1^{(0)} = P_2^{(0)} = P_{\text{atm}}.$$

В расчетах первого порядка малости решение задачи запишется в виде

$$\begin{aligned} \xi_j^{(1)}(x, T_0) &= \sum_{n=1}^2 \xi_{jn}^{(1)}(x, T_0), \quad \varphi_j^{(1)}(x, T_0) = \sum_{n=1}^2 \varphi_{jn}^{(1)}(x, T_0) \\ j &\in \{1; 2\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\xi_{jn}^{(1)}(x, T_0, T_1) = \alpha_{jn}(T_1) \exp\{i[kx - \omega_n(k)T_0]\} + \text{к.с.}$$

$$j, n \in \{1; 2\},$$

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^{(1)}(x, z, T_0) &= -i [B_{11} \exp(kz) + B_{21} \exp(-kz)] \\ &\quad \times \exp\{i[kx - \omega_1(k)T_0]\} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{12}^{(1)}(x, z, T_0) &= i [B_{12} \exp(kz) + B_{22} \exp(-kz)] \\ &\quad \times \exp\{i[kx - \omega_2(k)T_0]\} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

$$\varphi_{21}^{(1)}(x, z, T_0) = -i A_1 \exp(kz) \exp\{i[kx - \omega_1(k)T_0]\} + \text{к.с.},$$

$$\varphi_{22}^{(1)}(x, z, T_0) = -i A_2 \exp(kz) \exp\{i[kx - \omega_2(k)T_0]\} + \text{к.с.},$$

$$\alpha_{21}(T_1) = d_1(k) \alpha_{11}(T_1), \quad \alpha_{22}(T_1) = d_2(k) \alpha_{12}(T_1),$$

$$d_1(k) = \frac{w(k)}{2\rho_1 \omega_1^2(k) \exp(kh)} \left[\frac{\rho_1 s(k)}{w(k)} \omega_1^2(k) - k^3 \sigma_1 \right],$$

$$w(k) \equiv [\exp(2kh) - 1],$$

$$s(k) \equiv [\exp(2kh) + 1],$$

$$d_2(k) = \frac{w(k)}{2\rho_1 \omega_2^2(k) \exp(kh)} \left[\frac{\rho_1 s(k)}{w(k)} \omega_2^2(k) - k^3 \sigma_1 \right],$$

$$A_1 = -\frac{\omega_1 d_1(k) \alpha_{11}(T_1)}{k}, \quad A_2 = -\frac{\omega_2 d_2(k) \alpha_{12}(T_1)}{k},$$

$$B_{11} = -\frac{\omega_1 \alpha_{11}(T_1)}{kw(k)} [\exp(kh) - d_1(k)],$$

$$B_{12} = -\frac{\omega_2 \alpha_{12}(T_1)}{kw(k)} [\exp(kh) - d_2(k)],$$

$$B_{21} = \frac{\omega_1 \alpha_{11}(T_1) \exp(kh)}{kw(k)} [1 - d_1(k) \exp(kh)],$$

$$B_{22} = \frac{i \omega_2 \alpha_{12}(T_1) \exp(kh)}{kw(k)} [d_2(k) \exp(kh) - 1], \quad (7)$$

$$\omega_1^2(k) = \frac{k^3}{2c_1(k)} \left[c_2(k) + \sqrt{c_2^2(k) - 4c_1(k)\sigma_1\sigma_2} \right],$$

$$\omega_2^2(k) = \frac{k^3}{2c_1(k)} \left[c_2(k) - \sqrt{c_2^2(k) - 4c_1(k)\sigma_1\sigma_2} \right], \quad (8)$$

$$\omega^4(k) - \frac{k^3 c_2(k)}{c_1(k)} \omega^2(k) + \frac{k^6 \sigma_1 \sigma_2}{c_1(k)} = 0, \quad (9)$$

$$c_1(k) = \rho_1 [\rho_1 + \rho_2 \text{cth}(kh)],$$

$$c_2(k) = \rho_2 \sigma_1 + \rho_1 (\sigma_1 + \sigma_2) \text{cht}(kh).$$

Здесь i — мнимая единица. Частоты волн, порождаемых свободной поверхностью верхнего слоя жидкости $\omega_1(k)$ и границей раздела жидкостей $\omega_2(k)$, определенные соотношениями (8), являются решениями дисперсионного уравнения (9). Неизвестные функции $\alpha_{11}(T_1)$ и $\alpha_{12}(T_1)$ подлежат определению в расчетах второго порядка малости при удовлетворении начальным условиям.

В выражениях с тремя индексами $\xi_{jn}^{(m)}$ и $\varphi_{jn}^{(m)}$ верхний индекс, стоящий в скобках, означает порядок малости соответствующей компоненты; первый нижний индекс характеризует поверхность, на которой наблюдается волна; второй нижний индекс характеризует поверхность, которая порождает волну. Последние два утверждения справедливы и для коэффициентов α_{jn} .

Детальный анализ дисперсионного уравнения (9) и истолкование результатов решения задачи первого порядка малости можно найти в [11]. Кратко они сводятся к утверждению, что в области капиллярных волн существует аналог феномена „мертвой воды“, известный ранее только для гравитационных волн, проявляющийся в экспоненциальном увеличении амплитуд волн на границе раздела сред при стремлении к нулю величины коэффициента поверхностного натяжения межфазной границы.

3.2. Второй порядок малости

Решения задачи первого порядка малости (6) подставляем в (5). По виду правых частей создаем проект решений для возмущений поверхностей и гидродинамических потенциалов 2-го порядка малости

$$\begin{aligned} \xi_j^{(2)} &= \beta_{j1} \exp[2i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\ &\quad + \beta_{j2} \exp\left[i\left(2kx - (\omega_1(k) + \omega_2(k))T_0\right)\right] \\ &\quad + \beta_{j3} \exp[2i(kx - \omega_2(k))T_0] \\ &\quad + \beta_{j4} \exp[i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\ &\quad + \beta_{j5} \exp[i(kx - \omega_2(k)T_0)] + \beta_{j6} \\ &\quad + \beta_{j7} \exp[i(\omega_1(k) - \omega_2(k))T_0] + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{(2)} = & [C_{11} \exp(2kz) + C_{12} \exp(-2kz)] \\
& + \exp[2i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\
& + [C_{13} \exp(2kz) + C_{14} \exp(-2kz)] \\
& \times \exp[i(2kx - (\omega_1(k) + \omega_2(k)))T_0] \\
& + [C_{15} \exp(2kz) + C_{16} \exp(-2kz)] \\
& \times \exp[2i(kx - \omega_2(k)T_0)] \\
& + [C_{17} \exp(2kz) + C_{18} \exp(-2kz)] \\
& \times \exp[i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\
& + [C_{19} \exp(2kz) + C_{110} \exp(-2kz)] \\
& \times \exp[i(kx - \omega_2(k)T_0)] \\
& + [C_{111} \exp(2kz) + C_{112} \exp(-2kz)] \\
& + [C_{113} \exp(2kz) + C_{114} \exp(-2kz)] \\
& \times \exp[i(\omega_1(k) - \omega_2(k))T_0] + \text{к.с.},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{(2)} = & A_{21} \exp(2kz) \exp[2i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\
& + A_{22} \exp(2kz) \exp[i(2kx - (\omega_1(k) + \omega_2(k))T_0)] \\
& + A_{23} \exp(2kz) \exp[2i(kx - \omega_2(k)T_0)] \\
& + A_{24} \exp(2kz) \exp[i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\
& + A_{25} \exp(2kz) \exp[i(kx - \omega_2(k)T_0)] + A_{26} \exp(2kz) \\
& + A_{27} \exp(2kz) \exp[i(\omega_1(k) - \omega_2(k))T_0] + \text{к.с.}
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя проекты решений (10) в граничные условия (5), находим $\xi_j^{(2)}$, $\varphi_j^{(2)}$ ($j = 1, 2$). Ввиду громоздкости получаемых решений ограничимся записью решений для свободной поверхности и границы стратификации, тем более что в проводимом исследовании нас интересуют в основном особенности внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия волн, которые одинаково проявляются во всех решениях второго порядка малости.

В итоге после удовлетворения граничным условиям получим аналитические выражения для амплитуд β_{ji} , входящих в поправки второго порядка малости к аналитической записи поверхностей раздела $\xi_j^{(2)}$, в виде

$$\begin{aligned}
\beta_{14} = \beta_{15} = \beta_{16} = \beta_{24} = \beta_{25} = \beta_{26} = 0, \\
\beta_{11} = \frac{b_{11}}{R_{11}\delta_{11}} \alpha_{11}^2, \quad \beta_{12} = \frac{b_{12}}{R_{12}\delta_{12}} \alpha_{11}\alpha_{12}, \\
\beta_{13} = \frac{b_{13}}{R_{13}\delta_{13}} \alpha_{12}^2, \quad \beta_{17} = \frac{b_{14}}{R_{14}\delta_{14}} \alpha_{11}\alpha_{12}, \\
\beta_{21} = \frac{b_{21}}{R_{21}\delta_{21}} \alpha_{11}^2, \quad \beta_{22} = \frac{b_{22}}{R_{22}\delta_{22}} \alpha_{11}\alpha_{12},
\end{aligned}$$

$$\beta_{23} = \frac{b_{23}}{R_{23}\delta_{23}} \alpha_{12}^2, \quad \beta_{27} = \frac{b_{24}}{R_{24}\delta_{24}} \alpha_{11}\alpha_{12},$$

$$\delta_{ij} = -4k \operatorname{sh}(2kh) \rho_1 (\rho_1 + \operatorname{cth}(2kh) \rho_2)$$

$$\times [\Omega_j^2 + \omega_i(2k)^2 + a(2k)],$$

$$a(2k) = -\frac{8k^3 (\rho_1 \operatorname{cth}(2kh) (\sigma_1 + \sigma_2) + \rho_2 \sigma_1)}{\rho_1 (\rho_1 + \rho_2 \operatorname{cth}(2kh))},$$

$$\alpha_{11} = \frac{\xi_2 - \xi_1 d_2(k)}{2[d_1(k) - d_2(k)]}, \quad \alpha_{12} = -\frac{\xi_2 - \xi_1 d_1(k)}{2[d_1(k) - d_2(k)]},$$

$$R_{ij}(k) \equiv [\Omega_j^2(k) - \omega_i^2(2k)], \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$\Omega_1(k) \equiv 2\omega_1(k),$$

$$\Omega_2(k) \equiv 2\omega_2(k), \quad \Omega_3(k) \equiv \omega_2(k) + \omega_1(k),$$

$$\Omega_4(k) \equiv \omega_2(k) - \omega_1(k), \tag{11}$$

где не выписанные коэффициенты приведены в Приложении. В расчетах второго порядка малости выяснилось, что коэффициенты α_{11} и α_{12} не зависят от времени. Окончательные аналитические выражения для возмущений поверхностей раздела определяются суперпозицией общего и частного решений

$$\begin{aligned}
\xi_1^{(2)} = & \int_0^\infty \gamma_{11}(k') \exp[i(k'x - \omega_1(k')T_0)] \\
& + \gamma_{12}(k') \exp[i(k'x - \omega_2(k')T_0)] dk' \\
& + \beta_{11} \exp[2i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\
& + \beta_{12} \exp[i(2kx - (\omega_1(k) + \omega_1(k))T_0)] \\
& + \beta_{13} \exp[2i(kx - \omega_2(k)T_0)] \\
& + \beta_{17} \exp[i(\omega_1(k) - \omega_2(k))T_0] + \text{к.с.},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2^{(2)} = & \int_0^\infty d_1 \gamma_{11}(k') \exp[i(k'x - \omega_1(k')T_0)] \\
& + d_2 \gamma_{12}(k') \exp[i(k'x - \omega_2(k')T_0)] dk' \\
& + \beta_{21} \exp[2i(kx - \omega_1(k)T_0)] \\
& + \beta_{22} \exp[i(2kx - (\omega_1(k) + \omega_1(k))T_0)] \\
& + \beta_{23} \exp[2i(kx - \omega_2(k)T_0)] \\
& + \beta_{27} \exp[i(\omega_1(k) - \omega_2(k))T_0] + \text{к.с.} \tag{12}
\end{aligned}$$

Удовлетворив соотношениями (12) начальным условиям (2), найдем коэффициенты $\gamma_{11}(k)$ и $\gamma_{12}(k)$:

$$\gamma_{11}(2k) = \frac{A_1 d_2 - A_2}{d_2 - d_1}, \quad \gamma_{12}(2k) = \frac{A_2 - d_1 A_1}{d_2 - d_1},$$

$$A_1 = -\beta_{11} - \beta_{12} - \beta_{13} - \beta_{17},$$

$$A_2 = -\beta_{21} - \beta_{22} - \beta_{23} - \beta_{27}$$

и окончательные выражения для $\xi_j^{(2)}$, заменив T_0 на t ,

$$\begin{aligned} \xi_1^{(2)} &= \frac{A_1 d_2 - A_2}{d_2 - d_1} \exp[i(2kx - \omega_1(2k)t)] \\ &+ \frac{A_2 - d_1 A_1}{d_2 - d_1} \exp[i(2kx - \omega_2(2k)t)] \\ &+ \beta_{11} \exp[2i(kx - \omega_1(k)t)] \\ &+ \beta_{12} \exp\left[i\left(2kx - (\omega_1(k) + \omega_2(k))t\right)\right] \\ &+ \beta_{13} \exp[2i(kx - \omega_2(k)t)] \\ &+ \beta_{17} \exp\left[i\left((\omega_1(k) - \omega_2(k))t\right)\right], \\ \xi_2^{(2)} &= d_1 \frac{A_1 d_2 - A_2}{d_2 - d_1} \exp[i(2kx - \omega_1(2k)t)] \\ &+ d_2 \frac{A_2 - d_1 A_1}{d_2 - d_1} \exp[i(2kx - \omega_2(2k)t)] \\ &+ \beta_{21} \exp[2i(kx - \omega_1(k)t)] \\ &+ \beta_{22} \exp\left[i\left(2kx - (\omega_1(k) + \omega_2(k))t\right)\right] \\ &+ \beta_{23} \exp[2i(kx - \omega_2(k)t)] \\ &+ \beta_{27} \exp\left[i\left((\omega_1(k) - \omega_2(k))t\right)\right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогично находим коэффициенты C_{ij} и A_{ij} для определения поправок второго порядка малости к гидродинамическим потенциалам. В контексте проводимого анализа явный вид коэффициентов C_{ij} и A_{ij} для нас не существен, поскольку они имеют такую же структуру, что и выписанные коэффициенты β_{ij} .

Для трактовки полученных выражений напомним, что в коэффициентах α_{ij} первый индекс характеризует поверхность, на которой наблюдается волна, второй индекс характеризует поверхность, которая порождает волну, в коэффициентах λ_{ij} и δ_{ij} второй индекс, согласно (11), (12), принимает также значения, равные 3 и 4, что соответствует сумме и разности частот двух волн, определяющих формы начальной деформации поверхностей, одна из которых задана на свободной поверхности, а другая — на границе стратификации.

Подставляя найденные решения (6) и (13) в (3), несложно получить полное решение задачи определения профилей волн на обеих поверхностях раздела с точностью до слагаемых второго порядка малости.

4. Обсуждение полученных результатов

На рис. 1 и 2 приведены результаты расчетов профилей волн на свободной поверхности $\xi_1^{(1)}$ и на границе

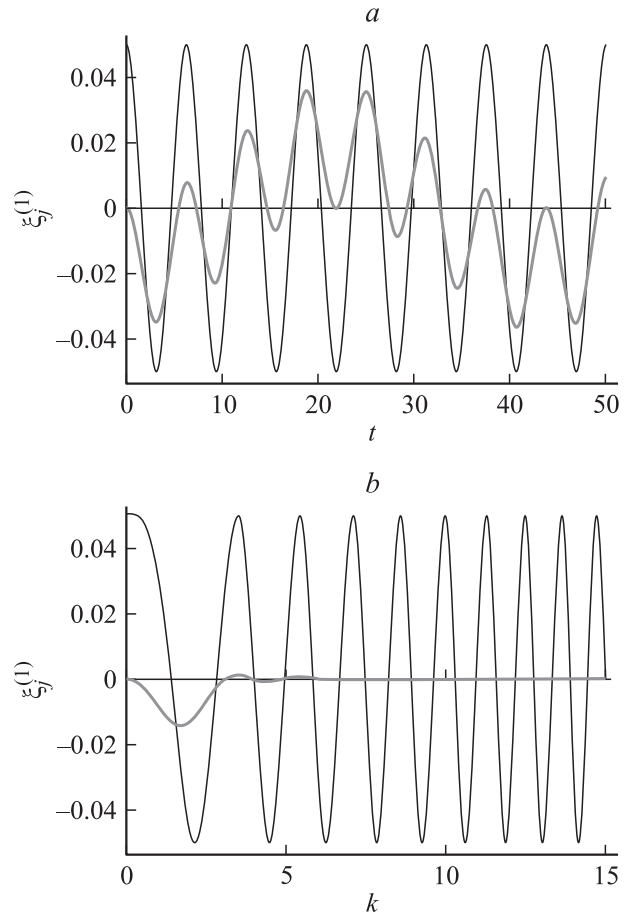


Рис. 1. *a* — зависимости от безразмерного времени безразмерных профилей волн на свободной поверхности $\xi_1^{(1)}(t)$ (тонкая линия) и на границе стратификации $\xi_2^{(1)}(t)$ (жирная линия), рассчитанных при $x = 0$, $k = 1$, $\rho_1 = \sigma_1 = h = 1$, $\rho_2 = 1.01$, $\sigma_2 = 0.05$, $\xi_1 = 0.1$, $\xi_2 = 0$ в 1-м порядке малости; *b* — зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерных амплитуд волн на свободной поверхности жидкости $\xi_1^{(1)}(k)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(1)}(k)$, рассчитанных при $t = 1$ и прочих физических параметрах, совпадающих с принятыми на рис. 1, *a*.

стратификации $\xi_2^{(1)}$ в линейном по безразмерным амплитудам приближении при различных начальных условиях. На рис. 1, *a* приведены временные зависимости профилей волн на свободной поверхности $\xi_1^{(1)}(t)$ на границе стратификации $\xi_2^{(1)}(t)$, имеющие частоту $\omega_1(k)$ (см. (8)), при задании в начальный момент времени волновой деформации свободной поверхности. На рис. 2 показаны аналогичные зависимости (для волн с частотами $\omega_2(k)$, см. (8)) при задании в начальный момент времени волновой деформации границы стратификации. Тонкими линиями на этих рисунках нанесены волны, соответствующие начальной деформации (на рис. 1, *a* это волна на свободной поверхности, на рис. 2 — волна на границе стратификации), а жирными — волны, порожденные движением жидкости, связанным с начальной

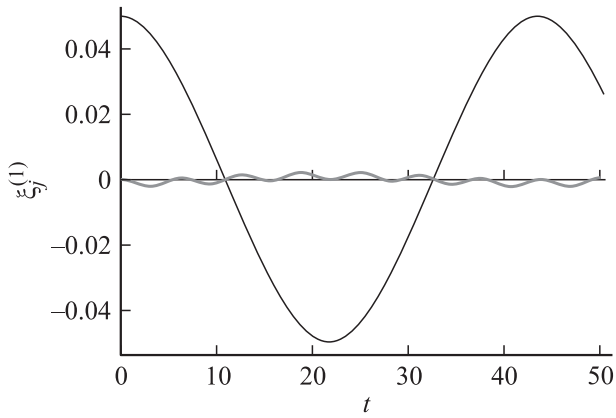


Рис. 2. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 1, *a*, рассчитанные при $\xi_2 = 0.1$, $\xi_1 = 0$ и прочих равных параметрах. Тонкая линия — профили волн на границе стратификации жирная — на свободной поверхности.

волновой деформацией. В соответствии с теорией эффекта „мертвой воды“ [12,16] на гравитационных волнах волновое движение, порожденное начальной деформацией свободной поверхности, границы стратификации не „замечает“, и на глубине h , где располагается граница стратификации, амплитуда волны меньше амплитуды волны на свободной поверхности в $\exp(kh)$ раз. Именно такое соотношение между амплитудами волн $\xi_1^{(1)}(t)$ и $\xi_2^{(1)}(t)$ демонстрирует рис. 1, *a*, сосчитанный для $kh = 1$ (см. также аналогичный график для гравитационных волн в [13]). Если же в начальный момент времени задана волновая деформация границы стратификации, то порождаемая соответствующим движением жидкости волна на свободной поверхности имеет амплитуду, много меньшую амплитуды волны на границе стратификации (согласно [11], отношение амплитуд волн $\sim 1/\sigma_2$). Именно это и демонстрирует рис. 2 в полном соответствии с теорией эффекта „мертвой воды“ [12,16] (см. также аналогичный график для гравитационных волн в [13]). Таким образом, рис. 1, *a* и 2 наглядно демонстрируют существование эффекта „мертвой воды“ на капиллярных волнах.

Расчеты профилей волн, результаты которых приведены на рис. 1, *a* и 2, выполнены при $k = 1$. Естественно, возникает вопрос, каковы будут тенденции изменения профилей волны при изменении безразмерного волнового числа k . В этой связи на рис. 1, *b* приведены зависимости безразмерных амплитуд волны на свободной поверхности жидкости $\xi_1^{(1)}(k)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(1)}(k)$ от безразмерного волнового числа k при задании начальной волновой деформации на свободной поверхности. Из рис. 1, *b* видно, что амплитуды волн как функции волнового числа изменяются немонотонным образом. При задании начальной волновой деформации на поверхности стратификации расчетные зависимости $\xi_1^{(1)}(k)$ и $\xi_2^{(1)}(k)$ качественно и количественно сходны с приведенными на рис. 1, *b*.

На рис. 3 и 4 приведены результаты расчетов по соотношениям (13) профилей нелинейных поправок к профилям волн (с удвоенными волновыми числами $k = 2$) на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}$ в квадратичном по безразмерным амплитудам приближении при различных начальных условиях. На рис. 3, *a* приведены временные зависимости нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}(t)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}(t)$ при задании в начальный момент времени волновой деформации свободной поверхности. На рис. 4, *a* показаны аналогичные зависимости при задании в начальный момент времени волновой деформации границы стратификации. Сравнение рис. 3, *a* с 1, *a* и 4, *a* с рис. 2 свидетельствует о качественном сходстве сравниваемых зависимостей. Иными словами, для нелинейных поправок к линейным решениям сохраняются характерные черты эффекта „мертвой воды“. Согласно рис. 3, *a*, нелинейная поправка к волне, порождаемой свободной поверхностью, на

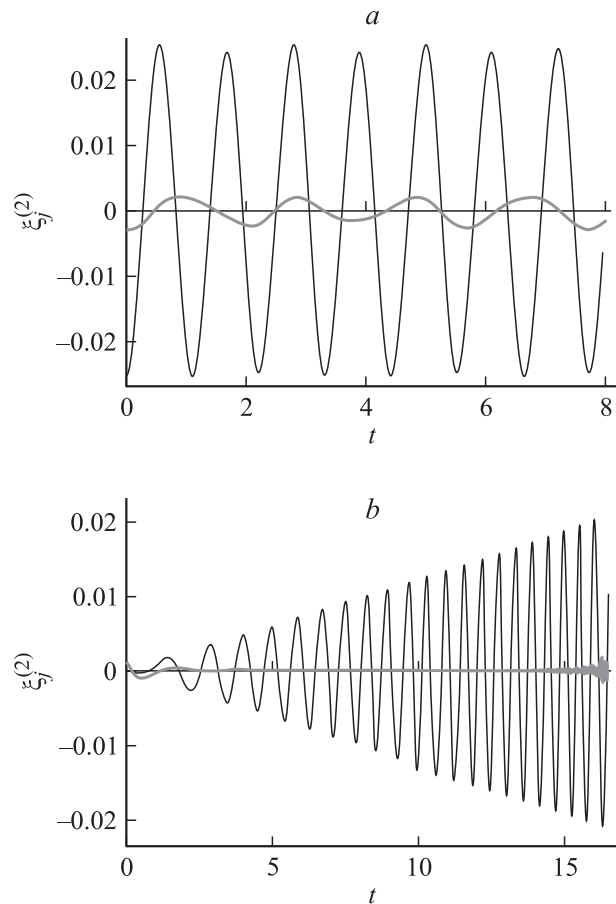


Рис. 3. То же, что на рис. 1, *a* при $k = 2$ и тех же значений прочих физических параметров для нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}(t)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}(t)$; *b* — то же, что на рис. 1, *b* при $k = 2$ и тех же значений прочих физических параметров для нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}(k)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}(k)$.

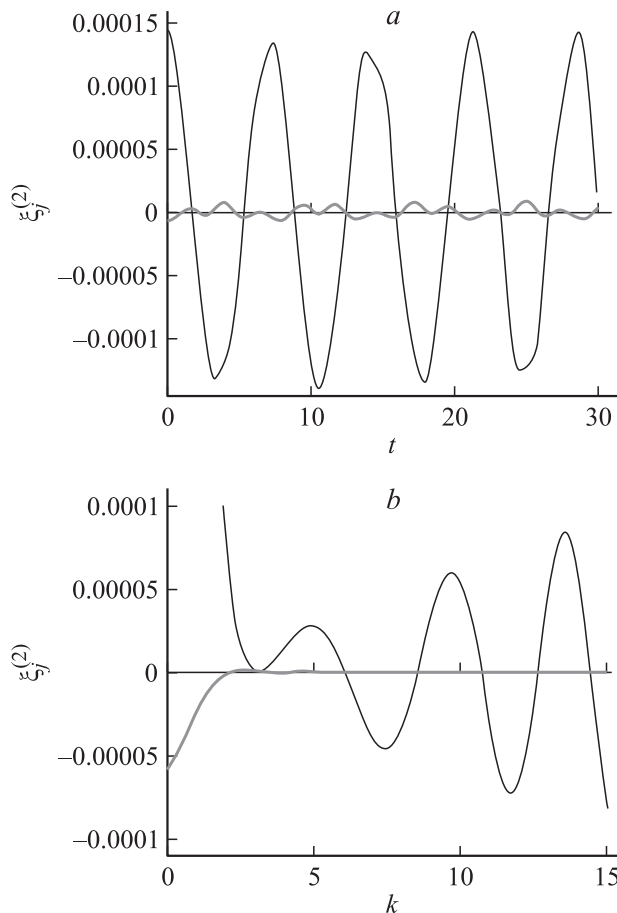


Рис. 4. *a* — то же, что на рис. 2 и для тех же значений физических параметров, но для нелинейных поправок к профилям волн на свободной поверхности $\xi_1^{(2)}(t)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}(t)$; *b* — зависимости, аналогичные приведенным на рис. 3, *b*, рассчитанные при $\xi_2 = 0.1$, $\xi_1 = 0$ и прочих равных параметрах.

границе стратификации вызывает появление волны с амплитудой в $\exp(2kh)$ раз меньшей (поскольку волновое число нелинейных поправок второго порядка малости в 2 раза больше волнового числа решений первого порядка, т.е. $k = 2$). Согласно рис. 4, *a*, амплитуда нелинейной поправки к волне, порождаемой границей стратификации, во много раз больше нелинейной поправки к волне, порождаемой соответствующим движением жидкости на свободной поверхности.

На рис. 3, *b* приведены зависимости безразмерных амплитуд нелинейных поправок к волнам на свободной поверхности жидкости $\xi_1^{(2)}(k)$ и на границе стратификации $\xi_2^{(2)}(k)$ от безразмерного волнового числа k , когда в начальный момент времени задана волновая деформация на свободной поверхности. На рис. 4, *b* приведены аналогичные зависимости при задании начальной волновой деформации на поверхности стратификации. Из рис. 3, *b* и 4, *b* видно, что амплитуды нелинейных поправок волнам как функции волнового числа изменяются немону-

тонным образом так же, как и решения 1-го порядка. В качественном отношении зависимости, приведенные на рис. 3, *b* и 4, *b*, сходны, являются возрастающими периодическими функциями и различаются только при малых значениях волновых чисел $k < 3$.

Из вида амплитудных коэффициентов $R_{ij}(k)$, стоящих в знаменателях амплитудных множителей $\beta_{ij}(k)$ (см. (11)), можно ожидать, что при определенных комбинациях физических параметров некоторые из них могут обращаться в нуль, как это было ранее обнаружено в сходных по постановке задачах [17–19]. Волны с волновыми числами, соответствующими выполнению условий $R_{ij}(k) = 0$, согласно существующим представлениям о взаимодействии волн [20], могут обмениваться энергией. В теории нелинейных волн это обстоятельство интерпретируется как наличие внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия волн с волновыми числами k и $2k$ в соответствии с конкретной резонансной ситуацией. Однако расчеты по соотношениям (11) и дисперсионному уравнению (9) показали, что не существует таких комбинаций физических параметров, задействованных в формулировке задачи, при которых выполнялось бы одно из соотношений $R_{ij}(k) = 0$ из (11). Иными словами, внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие в сформулированной задаче не реализуется.

Тем не менее ситуация, сложившаяся в решаемой задаче с нелинейным внутренним резонансным взаимодействием капиллярных волн, существенно изменится, если учесть возможность появления электрического заряда на границе стратификации [11]. Наличие заряда на границе стратификации, не сказываясь на виде возможных резонансных ситуаций, проявится в изменении дисперсионного уравнения задачи, которое, согласно [11], примет вид

$$\omega^4(k) - \frac{kV(k)}{[\rho_2 + \rho_1 \text{th}(hk)]} \omega^2(k) + \frac{k^2 \text{th}(hk) N(k)}{\rho_1 [\rho_2 + \rho_1 \text{th}(hk)]} = 0, \quad (14)$$

$$V(k) \equiv (\sigma_2 + \sigma_1)k^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \sigma_1 k^2 \text{th}(kh) - \frac{kW}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh)]} \\ \times \left[\varepsilon^2 - 2(\varepsilon - 1) \left(\frac{1}{\text{ch}^2(kh)} - 1 \right) + \text{th}(kh) \left(\varepsilon + \frac{\rho_2}{\rho_1} (\varepsilon - 1)^2 \right) \right], \\ N(k) \equiv \left(\sigma_1 k^2 - \frac{Wk(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh)]} \right) \\ \times \left[\sigma_2 k^2 - \frac{4\pi kW[\varepsilon \text{th}(kh) + 1]}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh)]} \right] - \left[\frac{4\pi kW(\varepsilon - 1)}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh)] \text{ch}(kh)} \right]^2,$$

где W — безразмерный параметр, определенный как отношение давления электрического поля на границу стратификации к давлению капиллярных сил [11].

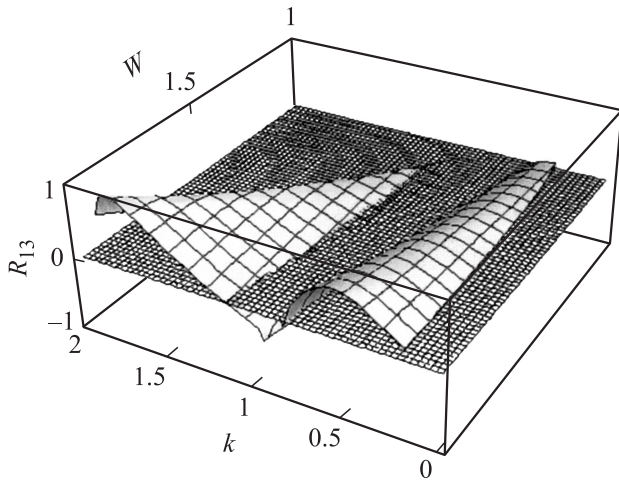


Рис. 5. Поверхность $R_{13}(k, W)$, пересеченная плоскостью $R_{13} = 0$, рассчитанная при $\rho_1 = \sigma_1 = h = 1$, $\rho_2 = 1.01$, $\sigma_2 = 0.05$, $\varepsilon = 80$. Внутреннее нелинейное резонансное трехволновое взаимодействие реализуется на линии пересечения указанных поверхностей.

Исследование наличия резонансных ситуаций на основе соотношений $R_{ij}(k) = 0$ из (11) при условии, что частоты определяются как решения дисперсионного уравнения (14) и множители R_{ij} становятся функциями двух параметров k и W , дает положительный результат. При наличии заряда на границе стратификации обнаруживаются как вырожденное (двухволновое), так и вторичное комбинационное (трехволновое) внутренние нелинейные резонансные взаимодействия для волн, порожденных различными поверхностями. Внутреннее нелинейное резонансное взаимодействие волн будет реализовываться на линии пересечения поверхностей $R_{ij}(k, W)$ и $R_{ij} = 0$, как это проиллюстрировано на рис. 5 для конкретной ситуации с вторичным комбинационным резонансом с участием $R_{13}(k, W)$. Но исследование нелинейного волнового движения на заряженной границе стратификации не тривиально и составляет предмет отдельного рассмотрения.

Следует отметить, что все расчеты для приведенных рисунков выполнялись с использованием безразмерных переменных, в которых $\rho_1 = \sigma_1 = h = 1$. Величина безразмерного коэффициента поверхностного натяжения границы стратификации принималась малой: $\sigma_2/\sigma_1 = 0.05$. Основанием для такого выбора является правило Антонова [21] для расчета величины межфазного натяжения σ_2 на границе раздела двух жидкостей с коэффициентами поверхностного натяжения σ_0 и σ_* соответственно, которое выражается соотношением $\sigma_2 = |\sigma_0 - \sigma_*|$. В ситуации, обсуждаемой в настоящей работе, речь идет о границе стратификации для одной и той же жидкости, одно из физико-химических свойств которой имеет различные значения по разные стороны границы, т.е. $\sigma_0 \approx \sigma_*$, и, следовательно, их разность мала: $(|\sigma_0 - \sigma_*|/\sigma_0) \ll 1$.

Заключение

В проведенном нелинейном (квадратичном по малой безразмерной амплитуде волн) аналитическом асимптотическом исследовании волнового движения в двухслойной стратифицированной по физико-химическим свойствам жидкости при конечной толщине верхнего слоя, граничащего с вакуумом, выяснилось, что капиллярный аналог эффекта „мертвой воды“ имеет место и для нелинейных поправок к профилям волн. Исследована возможность реализации внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия капиллярных волн, порождаемых свободной поверхностью и границей стратификации. Выяснилось, что при отсутствии электрического заряда на поверхностях раздела нелинейное внутреннее резонансное взаимодействие отсутствует. При наличии заряда на границе стратификации обнаруживаются как вырожденное, так и вторичное комбинационное внутренние нелинейные резонансные взаимодействия для волн, порожденных различными поверхностями.

Приложение

$$\begin{aligned}
 b_{1j} &= 2k \exp(-2kh) \left[i\rho_1 \Omega_j^3 \left((f_1(k)\rho_1 + f_2(k)\rho_2) q_{j1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \exp(2kh) q_{j2} \rho_2 \right) + 2k \Omega_j^2 \left(-(f_2(k)\rho_1 + f_1(k)\rho_2) q_{j4} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \exp(2kh) q_{j5} \rho_1 \right) + 8i\rho_1 \sigma_2 k^3 \Omega_j (-f_2(k) q_{j1} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \exp(2kh) (q_{j2} + q_{j3}) \right) + 16f_1(k) k^4 q_{j4} \sigma_2 \Big], \\
 b_{2j} &= 2k \exp(-2kh) \left[i\rho_1 \Omega_j^3 \left((q_{j2} + q_{j3}) \rho_1 f_1(k) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + f_2(k) q_{j3} \rho_2 \right) - 2\rho_1 k \Omega_j^2 \left(2 \exp(2kh) q_{j4} + f_2(k) q_{j5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 8i\rho_1 \sigma_1 k^3 \Omega_j \left(2 \exp(2kh) q_{j1} - f_2(k) q_{j2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(f_2(k) + \frac{\rho_2}{\rho_1} f_1(k) \right) q_{j3} \right) + 16f_1(k) k^4 q_{j5} \sigma_1 \right], \\
 q_{11} &= \frac{2ik [1 + \exp(kh) (\exp(kh) - 2d_1(k))] \omega_1(k)}{w(k)}, \\
 q_{12} &= -\frac{4i \exp(kh) k d_1(k) [-1 + \exp(kh) d_1(k)] \omega_1(k)}{w(k)}, \\
 q_{13} &= 2ik d_1^2(k) \omega_1(k), \\
 q_{14} &= -\frac{\omega_1(k)^2}{w^2(k)} \rho_1 [f_2(k) - 4 \exp(2kh) + 2 \exp(kh) d_1(k) \\
 &\quad \times (1 + \exp(2kh) - \exp(kh) d_1(k))],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{15} &= \frac{\omega_1(k)^2}{w^2(k)} \left[2 \exp(kh) (1 + \exp(kh)) \rho_1 d_1(k) + d_1^2(k) \right. \\
&\quad \times (\rho_1 - \rho_2) f_2(k) - 2 \exp(2kh) (\rho_1 + (2\rho_1 - \rho_2) d_1^2(k)) \left. \right], \\
q_{21} &= \frac{2ik}{w(k)} \left[(s(k) - 2 \exp(kh) d_1(k)) \omega_1(k) \right. \\
&\quad \left. + (s(k) - 2 \exp(kh) d_2(k)) \omega_2(k) \right], \\
q_{22} &= -\frac{4i \exp(kh) k}{w(k)} \left[(d_1(k) \exp(kh) - 1) d_2(k) \omega_1(k) \right. \\
&\quad \left. + d_1(k) (d_2(k) \exp(kh) - 1) \omega_2(k) \right]; \\
q_{23} &= 2ik d_1(k) d_2(k) [\omega_1(k) + \omega_2(k)], \\
q_{24} &= -\frac{\rho_1}{w^2(k)} \left[w^2(k) (\omega_1(k)^2 + \omega_2(k)^2) + 2 \exp(kh) \right. \\
&\quad \times (-2 \exp(kh) + s(k) d_2(k) + d_1(k) \\
&\quad \times (s(k) - 2 \exp(kh) d_2(k))) \omega_1(k) \omega_2(k) \left. \right], \\
q_{25} &= \frac{1}{w^2(k)} \left[w^2(k) d_1(k) d_2(k) (\rho_1 - \rho_2) \{ \omega_1(k)^2 + \omega_2(k)^2 \} \right. \\
&\quad + 2 \exp(kh) (s(k) \rho_1 d_1(k) - 2 \exp(kh) \rho_1 d_1(k) d_2(k) \\
&\quad \left. + \rho_1 (-2 \exp(kh) + (1 + \exp(2kh)) d_2(k))) \omega_1(k) \omega_2(k) \right], \\
q_{31} &= \frac{2ik \omega_2(k)}{w(k)} [s(k) - 2 \exp(kh) d_2(k)], \\
q_{32} &= -\frac{4i \exp(kh) k d_2(k) \omega_2(k)}{w(k)} [-1 + d_2(k) \exp(kh)], \\
q_{33} &= 2ik d_2^2(k) \omega_2(k); \\
q_{34} &= -\frac{\rho_1 \omega_2(k)^2}{w^2(k)} [f_2(k) - 4 \exp(2kh) + 2 d_2(k) \exp(kh) \\
&\quad \times (1 - \exp(kh) d_2(k) + \exp(2kh))], \\
q_{35} &= \frac{\omega_2(k)^2}{w^2(k)} \left[-2 \rho_1 \exp(2kh) + 2 \exp(kh) s(k) \rho_1 d_2(k) \right. \\
&\quad \left. + ((f_2(k) - 4 \exp(2kh)) \rho_1 - w^2(k) \rho_2) d_2^2(k) \right], \\
q_{41} &= q_{42} = q_{43} = 0, \\
q_{44} &= -\frac{\rho_1}{w^2(k)} \left\{ w^2(k) [\omega_1(k)^2 + \omega_2(k)^2] \right. \\
&\quad - 2 (f_2(k) - \exp(kh) s(k) d_2(k) - d_1(k) \exp(kh) \\
&\quad \left. \times (s(k) - 2 \exp(kh) d_2(k))) \omega_1(k) \omega_2(k) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{45} &= \frac{1}{w^2(k)} \left[w^2(k) d_1(k) d_2(k) (\rho_1 - \rho_2) \right. \\
&\quad \times (\omega_1(k)^2 + \omega_2(k)^2) + 2 \rho_1 (-2 \exp(2kh) \\
&\quad + (\exp(kh) + \exp(3kh)) d_1(k) + \exp(kh) \\
&\quad \times (1 + \exp(2kh)) d_2(k) - (f_2(k) - w^2(k) \frac{\rho_2}{\rho_1}) \\
&\quad \left. \times d_1(k) d_2(k) \right) \omega_1(k) \omega_2(k) \left. \right], \\
f_1 &= \exp(4kh) - 1, \quad f_2(k) = \exp(4kh) + 1.
\end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

- [1] Григорьев О.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 12. С. 36–41.
- [2] Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 31–46.
- [3] Ширяева С.О., Григорьев О.А. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 31–36.
- [4] Кожевников В.М., Чуенкова И.Ю., Данилов М.И., Ястребов С.С. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 21. С. 64–67.
- [5] Кожевников В.М., Чуенкова И.Ю., Данилов М.И., Ястребов С.С. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 7. С. 129–131.
- [6] Кожевников В.М., Чуенкова И.Ю., Данилов М.И., Ястребов С.С. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 51–57.
- [7] Дерягин Б.В. Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М: Наука, 1986. 405 с.
- [8] Grigor'ev A.I., Munchiev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. № 166. P. 267–274.
- [9] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 6. С. 36–42.
- [10] Алтоуз Б.А., Кириян С.В., Шатагина Е.А. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 37–40.
- [11] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 8–17.
- [12] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М: Наука, 1977. 816 с.
- [13] Григорьев А.И., Федеров М.С., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 130–140.
- [14] Nayfeh A.H. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. № 3. P. 463–475.
- [15] Курочкин С.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 11. С. 44–51.
- [16] Сретенский Л.Н. // Журн. геофизики. 1934. Т. 4. Вып. 3. С. 332–367.
- [17] Рыбакова М.В., Ширяева С.О., Григорьева А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 24–31.
- [18] Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ.ю 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 45–52.
- [19] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 19–28.
- [20] Филипс О.М. // Сб. Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
- [21] Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Л: Химия, 1971. 704 с.