01;03

# Об устойчивости капиллярных волн с произвольной симметрией на поверхности струи в периодическом во времени продольном электрическом поле

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 1 декабря 2010 г.)

Проанализировано дифференциальное уравнение, являющееся уравнением Матье, описывающее временную эволюцию амплитуд капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными азимутальными числами) на поверхности цилиндрической струи несжимаемой диэлектрической жидкости в коллинеарном оси симметрии невозмущенной волновым движением струи периодическом во времени однородном электрическом поле. Выяснилось, что переменное во времени давление внешнего электрического поля приводит к параметрической раскачке как осесимметричных волн на поверхности струи, так и изгибных, и изгибно-деформационных. При фиксированной частоте внешнего поля возможна одновременная раскачка волн различной длины с различной симметрией (с различными азимутальными числами) в главном демультипликационном резонансе, а также во вторичном и третичном резонансах. Параметрическая раскачка изгибно-деформационных волн имеет пороговый характер по частоте внешнего поля, т. е. реализуется при частоте поля, превышающей некоторое минимальное значение, определяемое радиусом струи и физико-химическими характеристиками жидкости.

## Введение

Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ по изучению капиллярной неустойчивости движущейся струи жидкости феномена дробления ее на отдельные капли, многое в физике происходящих процессов остается до сих пор не выясненным и по-прежнему привлекает внимание исследователей (см., например, [1–3]). Сказанное, в частности, относится к анализу физических закономерностей распада струи в переменном во времени продольном электрическом поле. Впервые эта тема была поднята в [4], где получено уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуды осесимметричной волны на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости в продольном периодическом во времени электрическом поле, которое оказалось уравнением Матье. В последующие годы вопрос об устойчивости струи в продольном переменном во времени электрическом поле не поднимался, вплоть до появления работы [5], так же как и [4], посвященной устойчивости осесимметричных волн, но в условиях тепло- и массообмена со средой. В последние годы вышли две ошибочные (и по постановке, и по полученным результатам) публикации [6,7], в которых об уравнениях Матье даже не упоминается. Из близких по тематике работ можно упомянуть [8], где рассмотрена близкая по постановке задача об устойчивости струи в периодическом во времени радиальном электрическом поле, а также работы [9–11], в которых переменное коллинеарное поле использовалось для получения новых режимов электродиспергирования, дающих капельки субмикронных размеров. В нижеследующем рассмотрении будет проанализирована устойчивость неосесимметричных капиллярных волн на поверхности струи идеальной несжимаемой жидкости в периодическом во времени однородном в пространстве продольном электрическом поле.

## 1. Постановка задачи

Пусть имеется бесконечная цилиндрическая струя радиуса $R$ идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью $\rho$, диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_{\text{in}}$ и коэффициентом поверхностного натяжения $\gamma$, коллинеарная внешнему однородному электрическому полю, изменяющемуся во времени по закону $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\Omega t)$. Диэлектрическая проницаемость внешней среды обозначим $\varepsilon_{\text{ex}}$, а ее плотность будем полагать пренебрежимо малой.

В инерциальной системе координат, движущейся со скоростью поступательного движения струи, поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ полностью определится капиллярными волнами на ее поверхности и в безразмерных переменных $\rho = \gamma = R = 1$, в которых будет проведено все рассмотрение, будет величиной такого же порядка малости, что и амплитуда волн. Движение жидкости будем принимать потенциальным, т. е. $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$, где $\psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей волнового движения жидкости. Зададимся целью исследования устойчивости капиллярных волн с произвольной симметрией на поверхности такой струи.

Весь анализ проведем в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью $OZ$, орт $\mathbf{n}_z$ которой совпадает по направлению с осью симметрии цилиндрической струи. Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым (порождаемым тепловым движением молекул жидкости, имеющим размерные амплитуды $\sim\sqrt{\kappa T/\gamma}$, где $\kappa$ — постоянная Больцмана, $T$ — абсолютная температура [12]) капиллярным волновым движением запишем в виде

$$F(r,\varphi,z,t)\equiv r-\big(1+\xi(\varphi,z,t)\big)=0.$$

В этом соотношении $\xi(\varphi,z,t)$ — возмущение цилиндрической поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярного волнового течения жидкости в струе идеальной несжимаемой жидкости состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской), т. е. $\mathbf{E}_j=-\nabla\Phi_j(\mathbf{r},t),\ j\in\{\text{in};\text{ex}\}$

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t)=0,\quad \Delta\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)=0,\quad \Delta\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)=0,$$

с граничными условиями

$$r=1+\xi:\qquad \frac{dF}{dt}\equiv\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\psi\nabla F=0,$$

$$P_{\text{in}}-P_{\text{ex}}+P_E=P_\gamma,\ \ \varepsilon_{\text{in}}[\mathbf{n}\nabla\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)]=\varepsilon_{\text{ex}}[\mathbf{n}\nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)],$$

$$\boldsymbol{\tau}\,\nabla\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)=\boldsymbol{\tau}\,\nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t),$$

$$r\to 0:\qquad \nabla\psi(\mathbf{r},t)\to 0,\ \ \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)<\infty,$$

$$r\to\infty:\qquad -\nabla\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\Omega t),$$

$\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — единичные векторы касательной и нормали к возмущенной поверхности струи, $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)$ и $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)$ — электростатические потенциалы в струе и в среде соответственно, $P_{\text{ex}}$ — давление во внешней среде,

$$P_{\text{in}}(|\mathbf{r},t)=P_{\text{in}}^{(0)}-\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}-\frac{1}{2}\big(\nabla\psi(\mathbf{r},t)\big)^2$$

— поле давлений внутри струи, $P_{\text{in}}^{(0)}$ — постоянное давление в цилиндрической струе в отсутствие волнового дыижения в ней, $P_\gamma\equiv\operatorname{div}\mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения, $P_E$ — давление электрического поля на поверхность капли [13]

$$P_E=-\frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi}\Big[(\nabla\Phi_{\text{ex}})^2-2(\mathbf{n}\nabla\Phi_{\text{ex}})^2\Big]+\frac{\varepsilon_{\text{in}}}{8\pi}\Big[(\nabla\Phi_{\text{in}})^2-2(\mathbf{n}\nabla\Phi_{\text{in}})^2\Big].$$

Кроме выписанных условий должно выполняться требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны $\lambda$

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_{0}^{1+\xi}\int\limits_{0}^{2\pi}dz\,r\,dr\,d\varphi=2\pi\lambda.$$

## 2. Разбиение по порядкам малости

Малым параметром сформулированной задачи является безразмерная амплитуда волновой деформации поверхности струи $\varepsilon\equiv\max|\xi(\varphi,z,t)|$. Искомые функции деформации поверхности $\xi(\varphi,z,t)$ и гидродинамический потенциал волнового течения жидкости в струе $\psi(\mathbf{r},t)$ являются малыми первого порядка по $\varepsilon$. Потенциалы электрического поля $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)$ и $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)$ содержат как слагаемые нулевого, так и первого порядков малости, и их можно представить в виде

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)\equiv\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)+\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t),$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)\equiv\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)+\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t),$$

где $\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)$ — слагаемые нулевого порядка малости по $\varepsilon$, а $\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)$ и $\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)$ — первого. В этой связи сформулированную задачу следует разбить по порядкам малости.

**2.1. В нулевом порядке** малости по $\varepsilon$ будем иметь невозмущенный волновым движением цилиндр в коллинеарном его оси электростатическом поле. Это означает, что гидродинамических движений не будет, а оставшиеся искомые величины не будут зависеть от координат $r$ и $\varphi$ цилиндрической системы координат. В итоге получим задачу

$$\frac{\partial^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}=0,\qquad \frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z^2}=0$$

с граничными условиями

$$r=1:\qquad \frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z}=\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z},$$

$$P_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)-P_{\text{ex}}+\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})}{8\pi}\left(\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)}{\partial z}\right)^2=1,$$

$$r\to 0:\qquad \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)<\infty,$$

$$r\to\infty:\qquad -\nabla\Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\Omega t),$$

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}dz\,r\,dr\,d\varphi=\pi\lambda.$$

Решение этой задачи находится легко

$$\Phi_{\text{in}}^{(0)}(\mathbf{r},t)=-\mathbf{E}_0z\cos(\Omega t),\quad \Phi_{\text{ex}}^{(0)}(\mathbf{r},t)=-\mathbf{E}_0z\cos(\Omega t),$$

$$\Delta P\equiv(P_{\text{in}}^{(0)}-P_{\text{ex}})=1-(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})\frac{\mathbf{E}_0^2\cos^2(\Omega t)}{8\pi}.\qquad(1)$$

**2.2. В первом порядке** малости по $\varepsilon$ будем иметь задачу

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t)=0,\quad \Delta\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)=0,\quad \Delta\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)=0$$

с граничными условиями

$$r=1: \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})}{8\pi}\left[2\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\phi_{\text{ex}}^{(0)}}{\partial z}-\left(1-\frac{(\varepsilon_{\text{ex}}}{\varepsilon_{\text{in}}}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\partial\phi_{\text{ex}}}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)\right]=-\left[\xi+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\right],$$

$$\varepsilon_{\text{in}}\left[\frac{\partial\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right]=\varepsilon_{\text{ex}}\left[\frac{\partial\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right],$$

$$\frac{\partial\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)}{\partial z}=\frac{\partial\phi_{\text{ex}}}{\partial z},\quad \frac{\partial\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)}{\partial\varphi}=\frac{\partial\phi_{\text{ex}}}{\partial\varphi},$$

$$r\to 0: \qquad \nabla\psi(\mathbf{r},t)\to 0,\quad |\nabla\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)|\to 0,$$

$$r\to\infty: \qquad |\nabla\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)|\to 0,$$

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_0^{2\pi}\xi(z,\varphi,t)\,dz\,d\varphi=0. \tag{2}$$

Решение задачи первого порядка малости для неизвестных функций $\xi(\varphi,z,t)$, $\psi(\mathbf{r},t)$, $\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)$ и $\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)$ будем искать в виде разложений по бегущим цилиндрическим волнам в виде

$$\xi(\varphi,z,t)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty\alpha_m(t)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

$$\psi(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^\infty\sum_{n=0}^\infty C_m^{(1)}(t)I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

$$\phi_{\text{in}}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^\infty\sum_{m=0}^\infty C_m^{(2)}(t)I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk,$$

$$\phi_{\text{ex}}(\mathbf{r},t)=\int\limits_0^\infty\sum_{n=0}^\infty C_m^{(3)}(t)I_m(kr)\exp(im\varphi)\exp(ikz)dk, \tag{3}$$

где $i$ — мнимая единица, $k$ — волновое число волны, $m$ — азимутальный параметр, $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго родов соответственно.

## 3. Эволюционное уравнение для амплитуд капиллярных волн

Подставляя решения (1) и выписанные проекты решений (3) в систему граничных условий (2), выражая неизвестные коэффициенты $C_m^{(j)}(t)$, где $j=1{-}3$, через амплитуду деформации поверхности струи $\alpha_m(t)$, из динамического граничного условия на свободной поверхности струи можно найти дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестных $\alpha_m(t)$

$$\frac{d^2\alpha_m}{dt^2}+\omega_0^2[1-h\cos(2\Omega t)]\alpha_m=0, \tag{4}$$

$$\omega_0^2\equiv g_m(k)(k^2+m^2-1),$$

$$h\equiv\frac{w}{(m^2+k^2-1)}\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})^2k^2}{[\varepsilon_{\text{in}}g_m(k)-\varepsilon_{\text{ex}}d_m(k)]},\quad w\equiv\frac{E_0^2}{4\pi},$$

$$g_m(k)\equiv\frac{kI'_m(k)}{I_m(k)}\equiv m+\frac{kI_{m+1}(k)}{I_m(k)},$$

$$d_m(k)\equiv\frac{kK'_m(k)}{K_m(k)}\equiv m-\frac{kK_{m+1}(k)}{K_m(k)},$$

являющееся уравнением Матье. Штрихи при цилиндрических функциях $I_m(kr)$ и $L_m(kr)$ в (4) обозначают их производные по аргументу. Если положить $\Omega=0$, т.е. рассмотреть струю в продольном электростатическом поле, то уравнение (4) приведется к обыкновенному уравнению гармонических колебаний с частотами $s=\pm\omega_0\sqrt{(1-h)}$, а соответствующее дисперсионное уравнение примет вид

$$s^2=g_m(k)\left\{k^2+m^2-1+w\frac{(\varepsilon_{\text{in}}-\varepsilon_{\text{ex}})^2k^2}{[\varepsilon_{\text{in}}g_m(k)-\varepsilon_{\text{ex}}d_m(k)]}\right\},$$

что согласуется с результатами [14–16].

Согласно общей теории уравнения Матье [17,18], оно имеет как параметрически устойчивые, так и параметрически неустойчивые экспоненциально нарастающие со временем решения. На плоскости параметров $(\omega_0/\Omega h)$ границы, разделяющие области существования устойчивых и неустойчивых решений, на которых сами решения являются периодическими функциями, определяются функциями Матье: $\text{Ce}_n(t)$ и $\text{Se}_n(t)$ [17,18]. Области неустойчивости для уравнения (4) касаются оси абсцисс (оси, по которой отложены значения $\omega_0(\Omega)$ в счетном количестве точек при $(\omega_0/\Omega)^2=n^2$, где $n$ — целое число. Каждая из зон при $h\ll 1$ на плоскости $(\omega_0/\Omega,h)$ образована двумя лучами, расходящимися из точек $(\omega_0/\Omega)^2=n^2$ оси абсцисс с углами раствора, быстро убывающими с ростом $n$ (см., например, [19]).

Положения первых трех зон, внутри которых реализуется параметрический резонанс между внешним силовым воздействием и капиллярными волнами в струе в приближении $h\ll 1$, определяются соотношениями [19]:

первая зона (главный демультипликационный резонанс)

$$1-\frac{h}{2}<\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2<1+\frac{h}{2}, \tag{5}$$

вторая зона (вторичный резонанс)

$$4-\frac{h^2}{3}<\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2<4+\frac{5h^2}{3}, \tag{6}$$

третья зона (третичный резонанс)

$$9+\frac{3^4h^2}{2^6}-\frac{3^6h^3}{2^9}<\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2<9+\frac{3^4h^2}{2^6}+\frac{3^6h^3}{2^9}. \tag{7}$$

Внутри указанных зон состояние равновесия $\alpha=0$ оказывается неустойчивым, и в системе самовозбуждаются колебания с экспоненциально увеличивающейся амплитудой. Из (5)–(7) видно, что углы раствора зон на плоскости значений $(h, \omega_0^2/\Omega^2)$ неустойчивости уменьшаются с увеличением номера зоны согласно (5), угол раствора первой зоны $\sim h$, второй и третьей, согласно (6), (7), $\sim h^2$ и $\sim h^3$ соответственно (напомним, что принято $h \ll 1$). Физический смысл выписанных соотношений сводится к следующему: волна с фиксированными волновым и азимутальным числами ($k$ и $m$), полностью определяющими $\omega_0$, на поверхности цилиндрической струи в периодическом (изменяющемся с частотой $\Omega$) электрическом поле амплитуды $E_0$, коллинеарном оси струи, будет претерпевать параметрическую неустойчивость, если для нее выполнится одно из условий (5)–(7). При этом ее амплитуда увеличивается со временем по экспоненциальному закону.

Соотношения (5)–(7) при $h = \mathrm{const}$ определяют ширины диапазонов волновых чисел волн, претерпевающих параметрическую неустойчивость. Так, из (5)–(7) можно найти, что волновые числа, в окрестности которых формируются диапазоны неустойчивых волн, определяются как решение алгебраического уравнения

$$\omega_0(k, m) \equiv \sqrt{g_m(k)(k^2 + m^2 - 1)} = n\Omega, \qquad (8)$$

$n$ — номер зоны неустойчивости. На рис. 1 приведены результаты графического решения уравнения (8) для случая $\Omega = 2$ (в размерном виде для струи воды радиусом $r = 10^{-2}$ cm это соответствует $\Omega \approx 20$ kHz, поскольку частота обезразмеривается на $\sqrt{\gamma/\rho R^3}$) для первых трех значений азимутального числа $m = 0, 1, 2$. Искомые значения волновых чисел определяются точками пересечения кривых $\omega_0(k, m)$ и прямых $n\Omega$. Нижняя, коротко-пунктирная прямая, соответствующая $n = 1$ или главному демультипликационному резонансу в точках пересечения с кривыми $\omega_0(k, m)$, определяет волновые числа неустойчивых осесимметричной ($m = 0$) [15] и изгибной ($m = 1$) [20] волн, которые оказываются близкими по величинам. Расположенная выше средне-пунктирная прямая, соответствует $n = 2$ (вторичному резонансу), а верхняя длинно-пунктирная прямая соответствует $n = 3$ (третичному резонансу). Волновые числа волн, параметрически возбуждаемых во вторичном и третичном резонансах, увеличиваются по сравнению в волнами, претерпевающими неустойчивость в демультипликационном резонансе. Видно также, что теперь возбуждается и волна с $m = 2$, соответствующая электростатической неустойчивости боковой поверхности струи ($m = 2$) [21]. На рис. 1 хорошо заметно, что волновое число параметрически возбуждаемой во вторичном резонансе волны с $n = 2$ близко по величине к волновым числам осесимметричной и изгибной волнам, параметрически раскачиваемых в демультипликационном резонансе. Сказанное означает возможность одновременной реализации параметрической неустойчивости волн с различной симметрией (с различными азимутальными числами) при неизменном значении частоты внешнего возбуждения $\Omega$.

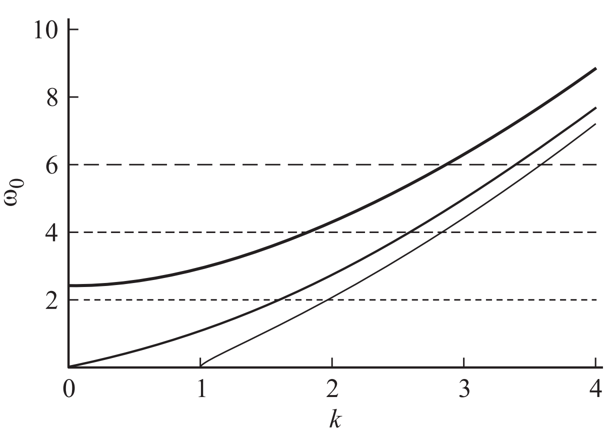


**Рис. 1.** Графики зависимости безразмерной частоты волн на поверхности струи от безразмерного волнового числа ($\omega_0 = \omega_0(k, m)$), построенные для различных значений азимутального числа $m = 0, 1, 2$ (сплошные линии с толщиной, увеличивающейся снизу вверх с увеличением $m$), пересеченные пунктирными прямыми, соответствующими различным значениям частоты внешнего электрического поля, взятой при $\Omega = 2$ и $n = 1, 2, 3$.

Ясно, что с увеличением частоты $\Omega$ увеличатся и волновые числа параметрически раскачиваемых волн. Для осесимметричных волн ($m = 0$) при уменьшении $\Omega$ волновые числа неустойчивых волн стремятся к $k = 1$, а для изгибных ($m = 1$) — к $k = 0$. Согласно рис. 1, для электростатической неустойчивости боковой поверхности струи ($m = 2$) существует нижний порог по частоте $\Omega$, начиная с которого возможна ее реализация в области весьма малых значений волновых чисел ($k \sim 0$), по мере роста $\Omega$ волновое число неустойчивой волны с $m = 2$ увеличивается.

Согласно (5)–(7), углы раствора зон неустойчивости определяются различными степенями параметра $h$, который представим в виде $h \equiv wM(k, m, \varepsilon_{\mathrm{in}}, \varepsilon_{\mathrm{ex}})$. На рис. 2 для различных значений азимутального числа $m$ приведены зависимости коэффициента $M \equiv M(k, m, \varepsilon_{\mathrm{in}}, \varepsilon_{\mathrm{ex}})$ от $k$ и $\varepsilon_{\mathrm{in}}$, построенные при $\varepsilon_{\mathrm{ex}} = 1$. Из рис. 2, $a$ видно, что коэффициент $M$ для осесимметричных волн ($m = 0$) быстро растет до величин, измеряемых десятками, при уменьшении волнового числа и увеличении диэлектрической проницаемости жидкости. Для изгибных волн $m = 1$ тенденция изменения величины коэффициента $M$ при варьировании $k$ и $\varepsilon_{\mathrm{in}}$ сходная, но скорость нарастания величины $M$ меньше. Для изгибно-деформационных волн с $m = 2$ (рис. 2, $c$) величина коэффициента $M$ существенно превышает единицу в области $k > 1$ и $\varepsilon_{\mathrm{in}} > 20$, не превышая, однако, в максимуме 20.

Параметр $w$ в размерной форме записывается как $w \equiv E_0^2 R/4\pi\gamma$. Напряженность поля электрического пробоя воздуха в постоянном однородном электрическом поле при атмосферном давлении, согласно [22], составляет $\approx 26$ kV/cm $\approx 53$ CGSE/cm. Диапазон изменения радиусов струй определим как $0.1\,\mathrm{cm} > R > 10^{-3}\,\mathrm{cm}$ [2,23–25], а диапазон измене-

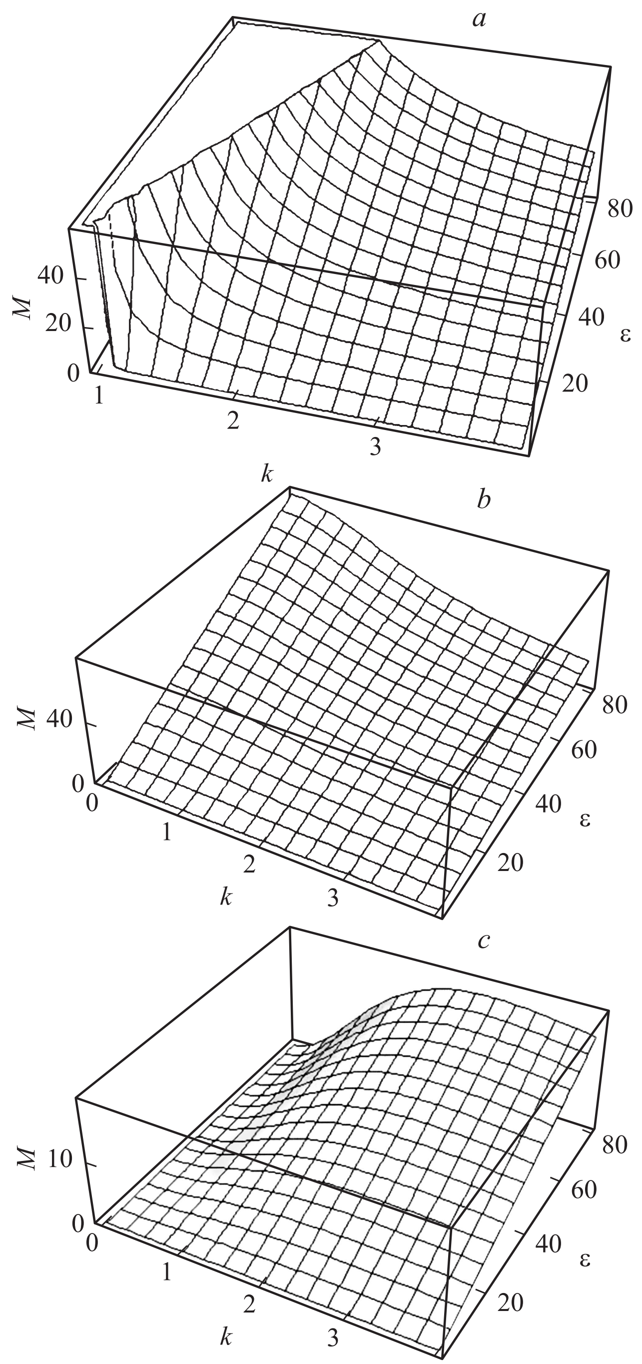


**Рис. 2.** Зависимости коэффициента $M \equiv M(k, m, \varepsilon_{\rm in}, \varepsilon_{\rm ex})$ от безразмерного волнового числа $k$ и диэлектрической проницаемости жидкости $\varepsilon_{\rm in}$, построенные при $\varepsilon_{\rm ex} = 1$ для различных значений азимутального числа: $a$ — $m = 0$; $b$ — $m = 1$; $c$ — $m = 2$.

ния величин коэффициентов поверхностного натяжения у жидкостей, использующихся при электродиспергировании от $\approx 2$ dyn/cm для жидкого водорода до $\approx 1000$ dyn/cm для неорганических веществ в жидком состоянии [23–27]. Тогда для возможных значений параметра $w$ получим ограничение: $w \le 1$.

В соответствии с рис. 2 величина всего параметра $h \equiv wM(k, m, \varepsilon_{\rm in}, \varepsilon_{\rm ex})$, а с ним и углы раствора зон неустойчивости (см. (5)–(7)), согласно проведенным оценкам, будут увеличиваться с ростом $\varepsilon_{\rm in}$ и с уменьшением волнового числа для волн с $m = 0$ и $m = 1$, а для $m = 2$ будут иметь максимум при $2 < k < 3$.

## 4. Учет вязкости жидкости

Соотношения (5)–(7) не дают полной информации об условиях реализации параметрической неустойчивости капиллярных волн на поверхности струи, поскольку не учитывают их вязкого затухания. В приближении малой вязкости (в линейном приближении по вязкости) учет затухания можно провести добавлением в уравнение (4) слагаемого $2\mu\frac{d\alpha}{dt}$ [19], где $\mu$ — безразмерный декремент затухания, $\mu \ll 1$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\mu\frac{d\alpha}{dt} + \omega_0^2[1 - h\cos(2\Omega t)]\alpha(t) = 0. \qquad (9)$$

Зоны неустойчивости уравнения (9) немного сузятся по сравнению с зонами (5)–(7) и примут вид [19]

$$1 - \sqrt{\frac{h^2}{4} - 4\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^2} < \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 < 1 + \sqrt{\frac{h^2}{4} - 4\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^2},$$

$$2^2 + \frac{2h^2}{3} - \sqrt{h^4 - 64\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^2} < \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 < 2^2 + \frac{2h^2}{3} + \sqrt{h^4 - 64\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^2},$$

$$3^2 + \frac{3^4h^2}{2^6} - 3^2\sqrt{\frac{3^8h^6}{2^{18}} - 4\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^2} < \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 < 3^2 + \frac{3^4h^2}{2^6} + 3^2\sqrt{\frac{3^8h^6}{2^{18}} - 4\left(\frac{\mu}{\Omega}\right)^2}. \qquad (10)$$

Поскольку вязкость считается малой, то мал и декремент, а следовательно, сужение зон неустойчивости, согласно (10), будет незначительно. Отметим, что аналитическое выражение для декремента затухания $\mu$ имеет вид [2]

$$\mu \equiv \nu\left[k^2 + m^2 - g_m(k)\right] \equiv \nu W(k, m) \qquad (11)$$

или в размерном виде

$$\mu \equiv \frac{\nu}{R^2}\left[k^2R^2 + m^2 - g_m(kR)\right].$$

На рис. 3 приведены зависимости коэффициента $W = W(k, m)$ от $k$ для $m = 0, 1, 2$, построенные по (11). Видно, что в представляющем интерес в связи с проблемами электродиспергирования жидкости диапазоне волновых чисел $1 < k < 3$, коэффициент $W(k)$ изменяется от 0.5 до 5 для $m = 0$ и $m = 1$ и от 2 до 10 для $m = 2$. Для того чтобы декремент затухания был много меньше единицы, коэффициент безразмерной кинематической вязкости должен удовлетворять неравенству $\nu \ll 0.1$. Для получения малых значений безразмерной вязкости должен быть большим пара-

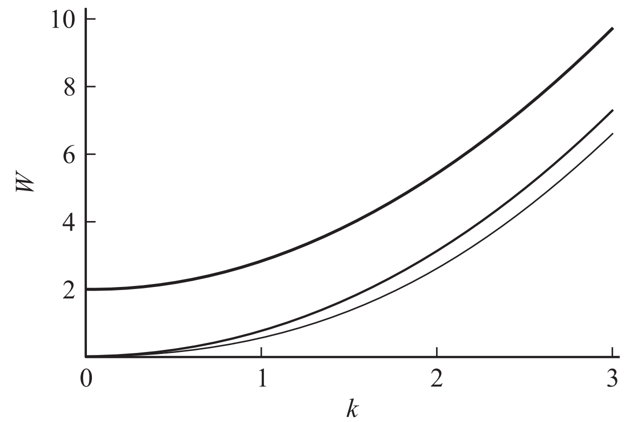


**Рис. 3.** Зависимости коэффициента $W \equiv W(k, m)$ от безразмерного волнового числа $k$, построенные для различных значений азимутального числа $m = 0, 1, 2$ (сплошные линии с толщиной, увеличивающейся снизу вверх с увеличением $m$).

метр обезразмеривания, который в нашей ситуации имеет вид $\nu_* \equiv \sqrt{R\gamma/\rho}$. Следовательно, параметр $\nu_*$ должен быть большим, что может быть достигнуто для больших радиусов струй жидкостей с большими значениями коэффициента поверхностного натяжения и малыми плотностями. Например, для воды условие $(\nu/\nu_*) \ll 0.1$ выполняется при $R > 1.5 \cdot 10^{-4}$ cm, для этилового спирта при $R > 1.6 \cdot 10^{-3}$ cm, для керосина — $R > 4.5 \cdot 10^{-3}$ cm.

Кроме сказанного учет вязкого затухания капиллярных волн проявится в появлении порога по амплитуде внешнего электрического поля $E_0$ (по $w$), начиная с которого будет возможна реализация параметрической неустойчивости. Для первых трех зон эти пороги имеют вид [19]:

первая зона
$$h > 2\frac{\mu}{\Omega},$$

вторая зона
$$h > 2\sqrt{\frac{\mu}{\Omega}},$$

третья зона
$$h > \frac{8}{3^3\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{\mu}{\Omega}}. \qquad (12)$$

Из выписанных соотношений видно, что в соответствии с общей идеологией теории уравнения Матье–Хилла легче всего возбуждается резонанс $\omega_0 \approx \Omega$. Для реализации второго резонанса, $\omega_0 \approx 2\Omega$, требуется большая глубина модуляции периодического внешнего воздействия $h$. Еще труднее возбудить третий резонанс: $\omega_0 \approx 3\Omega$. Посмотрим, как эти условия реализуются в анализируемой ситуации раскачки капиллярных волн.

Соотношения (12) с учетом (4), (10) можно переписать в виде условий на амплитуду напряженности электрического поля в виде:

первая зона
$$w > 2\frac{\mu}{\Omega}M^{-1}(k, m, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}) \equiv 2\frac{\mu}{\Omega}H(k, m, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}),$$

$$H(k, m, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}) \equiv \frac{[\varepsilon_{\text{in}}g_m(k) - \varepsilon_{\text{ex}}d_m(k)](m^2 + k^2 - 1)}{(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})^2k^2},$$

вторая зона
$$w > 2\sqrt{\frac{\mu}{\Omega}}H(k, m, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}),$$

третья зона
$$w > \frac{8}{3\sqrt[3]{3}}\sqrt[3]{\frac{\mu}{\Omega}}H(k, m, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}}). \qquad (13)$$

На рис. 4, для различных значений азимутального числа $m$ приведены рассчитанные зависимости $H \equiv H(k, m, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}})$ от $k$ и $\varepsilon_{\text{in}}$, построенные при $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$. Расчеты показывают (см. рис. 4, $b$), что коэффициент $H$

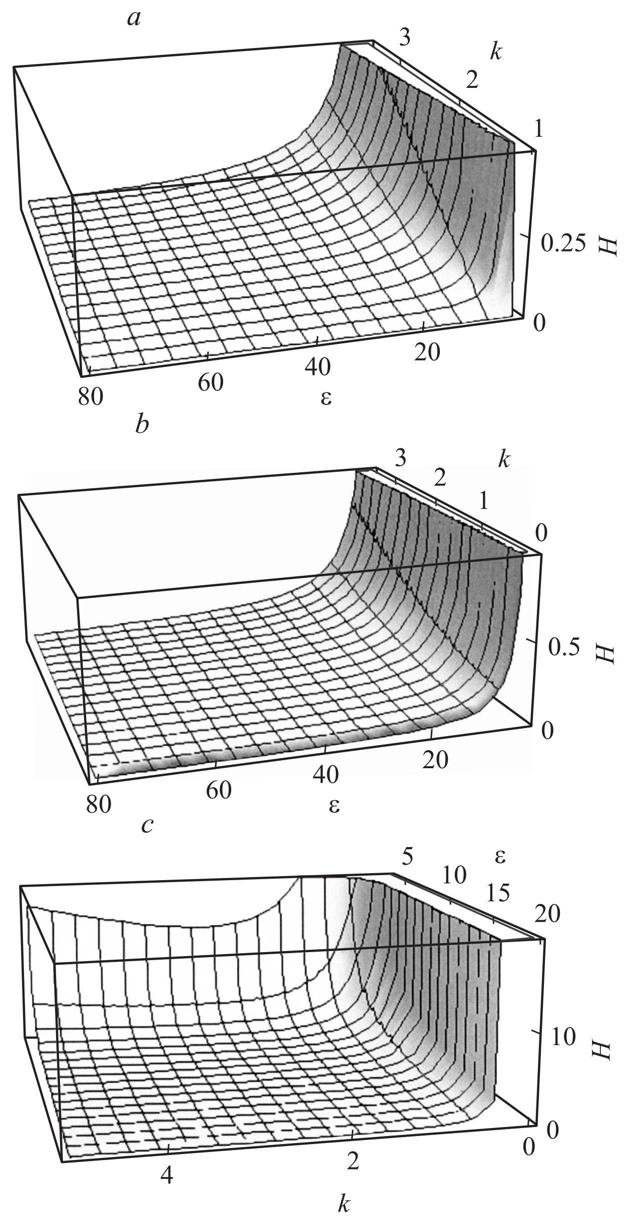


**Рис. 4.** Зависимости коэффициента $H \equiv H(k, m, \varepsilon_{\text{in}}, \varepsilon_{\text{ex}})$ от безразмерного волнового числа $k$ и диэлектрической проницаемости жидкости $\varepsilon_{\text{ex}}$, для различных значений азимутального числа: $a$ — $m = 0$; $b$ — $m = 1$; $c$ — $m = 2$.

на большей части области значений $k$ и $\varepsilon_{\text{in}}$ мал, измеряется сотыми долями единицы, но быстро растет при уменьшении диэлектрической проницаемости жидкости до $\varepsilon_{\text{in}} < 3$ для осесимметричных волн $(m = 0)$ и до $\varepsilon_{\text{in}} < 5$ дли изгибных. Как видно из рис. $4, c$, для волн с $m = 2$ сохраняется тенденция к увеличению $H$ с уменьшением диэлектрической проницаемости жидкости, а также появляется тенденция к быстрому росту с уменьшением волнового числа в области $k \leq 1$. На остальной области значений $k$ и $\varepsilon_{\text{in}}$, согласно проведенным расчетам, коэффициент $H$ мал, а его величина не превышает пяти десятых долей единицы.

Учтем теперь, что проводимый анализ влияния вязкости на закономерности реализации параметрического резонанса имеет смысл лишь для малых значений величины декремента затухания $\mu \ll 1$. Положим в (13), что $(\mu/\Omega) \sim 0.1$, тогда неравенства (13) для первой и второй зон будут согласовываться с условием отсутствия электрического пробоя в окрестности струи $w \leq 1$, для осесимметричных и изгибных волн на большей части области значений $k$ и $\varepsilon_{\text{in}}$, приведенных на рис. 4. Но для изгибно-деформационных волн обсуждаемые два условия одновременно могут выполняться лишь для жидкостей с большими значениями диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\text{in}} > 30$, где коэффициент $H$ мал.

## Заключение

В проведенном исследовании выяснилось, что коллинеарное оси невозмущенной цилиндрической струи жидкости однородное периодическое во времени электрическое поле вызывает параметрическую раскачку волн с различными азимутальными числами на поверхности струи. На одной частоте внешнего электрического поля возможна одновременная раскачка в резонансах различных типов (при $\omega_0(k, m) = \Omega$, $\omega_0(k, m) = 2\Omega$, $\omega_0(k, m) = 3\Omega$) волн различной длины с различными азимутальными числами.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособразования № РНП 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и № 09-08-00148.

## Список литературы


[1] *Ентов В.М., Ярин А.Л.* // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. механика жидкости и газа. 1984. Т. 17. С. 112–197.

[2] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.

[3] *Eggers H., Willermaux E.* // Rep. Prog. Phys. 2008. Vol. 71. N 036 601. P. 1–79.

[4] *Raco R.J.* // AIAA Journal. 1968. Vol. 6. N 5. P. 979–980.

[5] *El-Sayed M.F., Mohamed A.A., Metwaly T.N.M.* // Physica A. 2007. Vol. 379. N 1. P. 59–80.

[6] *Демехин Е.А., Полянских С.В.* // ПМТФ. 2009. Т. 50. № 5. С. 56–66.

[7] *Демехин Е.А., Полянских С.В.* // ПМТФ. 2010. Т. 51. № 1. С. 39–53.

[8] *El-Sayed M.F., Mohamed A.A., Metwaly T.N.M.* // Physica A. 2005. Vol. 345. N 3–4. P. 367–394.

[9] *Yeo L.Y., Lastochkin D., Shau-Chan Wang, Hsueh-Chia Chang* // Phys. Rev. Lett. 2004. N 92. P. 13 390–(2–6).

[10] *Maheshwary S., Hsueh-Chia Chang* // J. Appl. Phys. 2007. Vol. 102. P. 034 902–(1–6).

[11] *Maheshwary S., Hsueh-Chia Chang* // Adv. Mat. 2009. Vol. 21. P. 349–354.

[12] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.

[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

[14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* // ЭОМ. 2009. № 3. С. 28–34.

[15] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 45–50.

[16] *Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 3. С. 57–68.

[17] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 2. М.: ИЛ, 1060. 886 с.

[18] *Абрамовиц М., Стиган И.* // Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

[19] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

[20] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 24–31.

[21] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 36–45.

[22] *Алесандров А.Ф., Бычков В.Л., Грачев Л.П.* и др. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 38–43.

[23] *Cloupeau M., Prunet Foch B.* // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 165–184.

[24] *Jaworek A., Krupa A.* // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.

[25] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов. Препринт ИМРАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.

[26] *Таблицы* физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.

[27] *Справочник* химика / Под ред. Б.П. Никольского. Т. 1. Л.: Химия, 1971. 1072 с.