

## Переменяющееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации

© О.И. Москаленко, А.А. Короновский, С.А. Шурыгина

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, факультет нелинейных процессов, 410012 Саратов, Россия

e-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru, alkor@nonlin.sgu.ru, shrs@nonlin.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 23 августа 2010 г. В окончательной редакции 10 февраля 2011 г.)

Исследовано переменяющееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации. Показано, что в этом случае имеет место переменяемость типа „on-off“. Обнаруженное явление проиллюстрировано путем рассмотрения как модельных систем с дискретным временем, так и потоковых динамических систем, находящихся под воздействием общего источника шума.

Переменяющееся поведение характерно для систем различной природы и является универсальным явлением. В частности, переменяемость является одним из классических сценариев при переходе от периодических колебаний к хаотическим [1]. При этом сигнал представляет собой чередующуюся последовательность регулярных (ламинарных) фаз и хаотических всплесков (турбулентных фаз). При увеличении управляющего параметра турбулентные всплески становятся все более частными до тех пор, пока движение полностью не хаотизируется. В зависимости от характера потери устойчивости периодическим режимом (определяемого мультиплекаторами предельно цикла) выделяют переменяемость типов I–III [2].

Переменяющееся поведение наблюдается также вблизи границ различных типов хаотической синхронизации, в связи с чем выделяют переменяющуюся фазовую [3,4], переменяющуюся обобщенную [5] синхронизацию и переменяющуюся синхронизацию с запаздыванием [6]. Для переменяющегося поведения существует определенная классификация. Переход к обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием характеризуется как переменяемость „on-off“ типа [5,6], при переходе к фазовой синхронизации в зависимости от величины расстройки управляющих параметров имеет место либо переменяемость типа I и переменяемость „игольного ушка“ [3], либо переменяемость „кольца“ [4].

Наряду с различными типами хаотической синхронизации известно явление синхронизации, индуцированной шумом [7]. В настоящее время установлено, что этот режим имеет ряд сходств с режимом обобщенной хаотической синхронизации [8] как по методам диагностики, так и механизмам возникновения, что позволяет рассматривать эти два типа хаотической синхронизации как единый тип синхронного поведения связанных динамических систем [9].

В то же время переменяющееся поведение на границе индуцированной шумом синхронизации до сих пор исследовано не было. Единство режимов обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, ставит вопрос о взаимосвязи явлений, имеющих место на границах их возникновения. На границе обобщенной

синхронизации, как упоминалось выше, имеет место переменяющееся поведение типа „on-off“. Можно предположить, что аналогичный тип переменяемости должен иметь место и при переходе к режиму синхронизации, индуцированной шумом.

Настоящая работа направлена на подтверждение сделанного предположения. Как будет показано ниже, путем численного моделирования систем с непрерывным и дискретным временем на границе синхронизации, индуцированной шумом, имеет место переменяемость типа „on-off“. По аналогии с работой [5] назовем этот режим переменяющейся индуцированной шумом синхронизацией.

Под режимом синхронизации, индуцированной шумом, традиционно понимается следующее: случайный сигнал  $\xi(t)$ , действующий на две независимые, но идентичные хаотические системы  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$  (с разными начальными условиями  $\mathbf{u}(t_0)$  и  $\mathbf{v}(t_0)$ , лежащими в бассейне притяжения одного и того же хаотического аттрактора), может приводить к тому, что эти системы „синхронизируются“ друг с другом, т.е. после завершения переходного процесса они начинают демонстрировать идентичное поведение  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{v}(t)$  [7].

Для диагностики режима индуцированной шумом синхронизации традиционно производят непосредственное сравнение векторов состояния систем  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$ , на которые воздействует шум, или рассчитывают старшую ляпуновскую экспоненту  $\Lambda$  одной из систем, находящихся под воздействием шума. При этом установление режима индуцированной шумом синхронизации возможно лишь в том случае, когда все ляпуновские экспоненты оказываются отрицательными [10].

Ниже порога возникновения синхронного режима имеет место переменяющееся поведение — переменяющаяся индуцированная шумом синхронизация. В этом случае режим индуцированной шумом синхронизации наблюдается в системах большую часть времени, и соответственно в эти моменты времени векторы состояния систем, на которые воздействуют шум, совпадают друг с другом  $\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{v}(t)$  (наблюдается ламинарная фаза поведения). В то же самое время существуют интервалы времени, в течение которых системы ведут

себя асинхронным образом (имеет место турбулентная фаза поведения). В такие моменты времени векторы состояния систем, находящихся под воздействием шума, становятся различными, т. е.  $\mathbf{u}(t) \neq \mathbf{v}(t)$ .

При определении типа перемежаемости играет роль статистика длительностей ламинарных фаз. Каждый тип перемежаемости обладает своими собственными характеристиками, при этом считается, что две традиционно используемые характеристики — зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности и распределение длительностей ламинарных фаз — позволяют однозначно определить тип перемежаемости, реализующейся в системе. В частности, при перемежаемости типа „on-off“ распределение длительностей ламинарных фаз  $N(\tau)$  подчиняется степенному закону

$$N(\tau) \sim \tau^{-3/2}, \quad (1)$$

а зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности ( $P_c - P$ ) удовлетворяет степенной зависимости

$$\langle \tau \rangle \sim (P_c - P)^{-1}, \quad (2)$$

где  $P$  — текущее значение управляющего параметра,  $P_c$  — его критическое значение, соответствующее моменту перехода к синхронному режиму [11].

Рассмотрим, каким образом происходит установление режима индуцированной шумом синхронизации в модельных системах с непрерывным и дискретным временем.

Начнем рассмотрение с более простых объектов — одномерных отображений, демонстрирующих хаотическую динамику, находящихся под воздействием общего источника шума.

В качестве примера рассмотрим логистические отображения, исследованные в [9]:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= f(y_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(y_n)), \\ z_{n+1} &= f(z_n) + \varepsilon(f(\xi_n) - f(z_n)), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $y_n, z_n$  — состояния систем, на которые воздействует шум,  $f(x) = \lambda x(1 - x)$  — нелинейная функция,  $\lambda$  — управляющий параметр,  $\xi_n$  — случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению плотности вероятности:

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4)$$

где  $\xi_0 = 0.5$ ,  $\sigma = 0.12$  — среднее и дисперсия, соответственно. Слагаемое  $\varepsilon(f(\xi_n) - f(y_n))$  определяет диссипативный характер воздействия стохастического сигнала на рассматриваемую систему,  $\varepsilon$  — параметр, определяющий интенсивность такого воздействия. Начальные условия для систем  $y_n$  и  $z_n$  выбираются различными.

Известно, что в отсутствие внешнего воздействия логистическое отображение в зависимости от выбора

управляющего параметра  $\lambda$  может демонстрировать различные режимы колебаний, в том числе и хаотические [12]. Выберем значение управляющего параметра  $\lambda = 3.75$ , что соответствует реализации хаотического режима в системе (3).

При выбранных значениях управляющих параметров и увеличении значения параметра  $\xi$  система (3) демонстрирует переход от асинхронного состояния к режиму индуцированной шумом синхронизации [9]. При этом синхронный режим реализуется при  $\varepsilon > \varepsilon_c = 0.1625$ . Критическое значение параметра  $\varepsilon$  определялось по моменту перехода ляпуновской экспоненты  $\Lambda$  в область отрицательных значений (см. также [9]).

Рассмотрим поведение системы (3) вблизи границы возникновения индуцированной шумом синхронизации. Как упоминалось выше, ниже порога возникновения синхронного режима в системе реализуется перемежающееся поведение. Для определения типа перемежаемости проведем анализ статистических характеристик длительностей ламинарных фаз: распределения длительностей ламинарных фаз при заданном значении управляющего параметра (в данном случае, параметра  $\varepsilon$ ) и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности ( $\varepsilon_c - \varepsilon$ ).

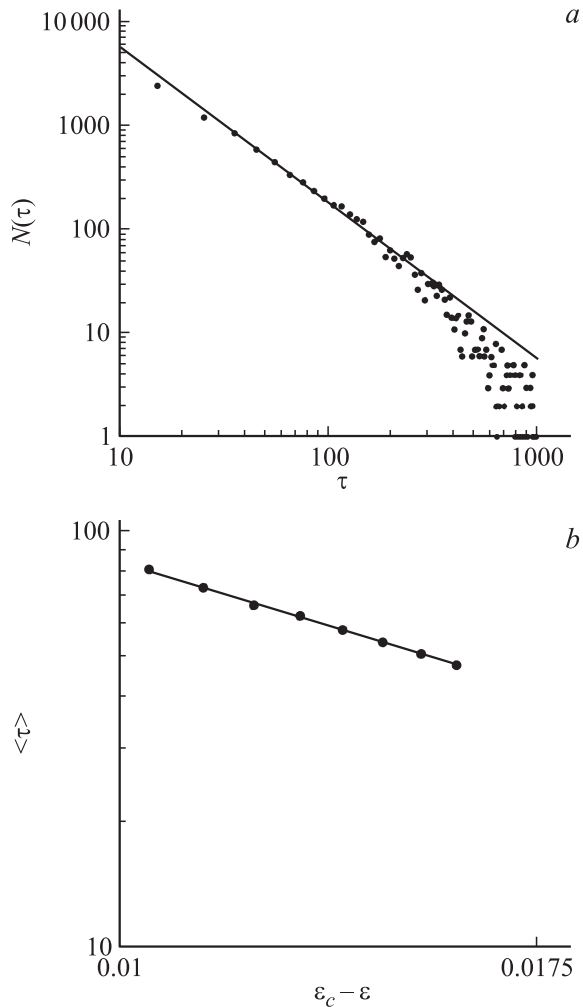
На рис. 1 приведены распределение длительностей ламинарных фаз  $N(\tau)$  при  $\varepsilon = 0.1525$  (a) и зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности  $\varepsilon_c - \varepsilon$  (b), а также соответствующие аппроксимации. Из рисунков видно, что полученные характеристики с хорошей степенью точности подчиняются степенным законам в четком соответствии с известными закономерностями (1) и (2) для перемежаемости типа „on-off“. Отклонение численно полученных значений от степенной зависимости в области больших длительностей ламинарных фаз на рисунке a является хорошо известным фактом для „on-off“ перемежаемости и обусловлено бедностью статистики.

Перейдем к исследованию установления режима индуцированной шумом синхронизации в объектах более высокого уровня сложности — в потоковых динамических системах, демонстрирующих хаотическую динамику. В качестве примера таких систем рассмотрим модель несвязанных идентичных по управляющим параметрам осцилляторов Лоренца [7,13] в случае воздействия на них общего источника шума с нулевым средним.

Исследуемая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= p(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 &= -x_1 z_1 + r x_1 - y_1 + \varepsilon \xi, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - b z_1, \\ \dot{x}_2 &= p(y_2 - x_2), \\ \dot{y}_2 &= -x_2 z_2 + r x_2 - y_2 + \varepsilon \xi, \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - b z_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$  — векторы состояния систем, на которые воздействует общий источник шума  $\xi(t)$ ,



**Рис. 1.** Распределение длительности ламинарных фаз при  $\varepsilon = 0.1525$  (a) и зависимость средней длительности ламинарных фаз  $\langle \tau \rangle$  от параметра надкритичности  $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon_c = 0.1625$  логистических отображений (3), находящихся вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, и соответствующие аппроксимации степенными законами (1) (a) и (2) (b). Данные, полученные путем численного моделирования, показаны точками, теоретические зависимости — сплошными линиями.

$p = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$  — управляющие параметры,  $\varepsilon$  — параметр, характеризующий интенсивность внешнего воздействия,  $\xi$  — случайная величина, подчиняющаяся нормальному распределению плотности вероятности (4), где  $\xi_0 = 0$ ,  $\sigma = 1$ .

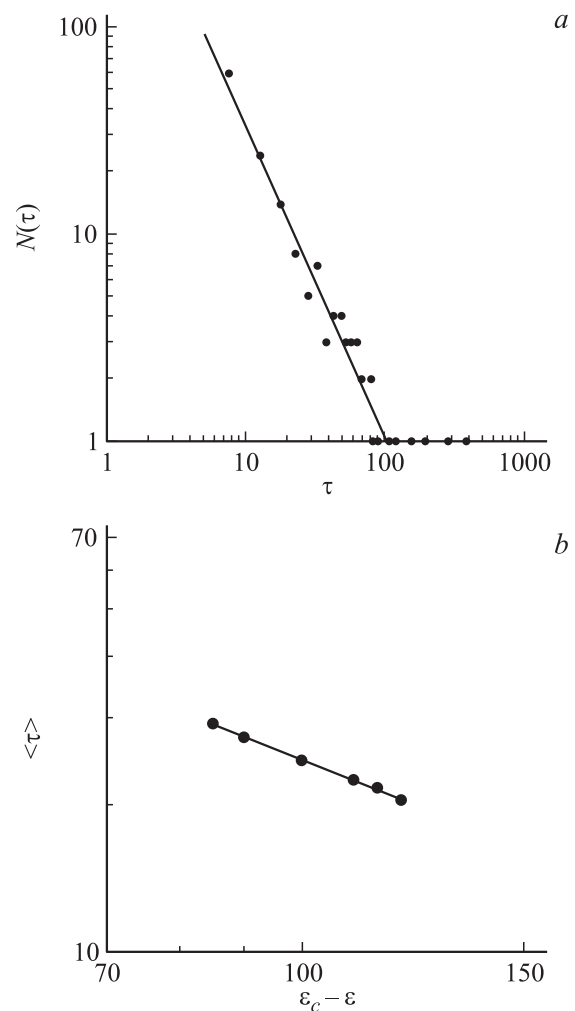
Порог возникновения режима синхронизации, индуцированной шумом, определялся с помощью расчета спектра ляпуновских экспонент. При переходе через нуль старшей ляпуновской экспоненты диагностировалось наступление синхронного режима. Для исследуемой системы индуцированная шумом синхронизация наступает при значении параметра  $\varepsilon_c = 760$ .

Так же, как и в случае отображений (3), на границе синхронного режима наблюдается чередование ламинарных и турбулентных фаз поведения. Для определения ти-

па перемежаемости был проведен анализ статистических характеристик длительностей ламинарных фаз.

На рис. 2, a показано распределение длительностей ламинарных для параметра связи  $\varepsilon = 675$ . Видно, что данное распределение хорошо аппроксимируется степенным законом (1). Зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности  $(\varepsilon_c - \varepsilon)$  показана на рис. 2, b. И в этом случае можно отметить, что полученная зависимость удовлетворяет с достаточной степенью точности известной закономерности (2). Отклонение численно полученных значений от степенной зависимости в области больших длительностей ламинарных фаз на рисунке a обусловлено бедностью статистики.

Таким образом, и в случае потоковых динамических систем, и дискретных отображений, демонстрирующих



**Рис. 2.** Распределение длительностей ламинарных фаз при  $\varepsilon = 675$  (a) и зависимость средней длительности ламинарных фаз  $\langle \tau \rangle$  от параметра надкритичности  $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon_c = 760$  систем Лоренца (5), находящихся вблизи границы индуцированной шумом синхронизации, и соответствующие аппроксимации степенными законами (1) (a) и (2) (b). Данные, полученные путем численного моделирования, показаны точками, теоретические зависимости — сплошными линиями.

хаотическую динамику, на границе синхронизации, индуцированной шумом, имеет место перемежаемость типа „on-off“. Эта закономерность является типичной при переходе к режиму индуцированной шумом синхронизации и, по всей видимости, носит универсальный характер. Полученные результаты имеют важное теоретическое и практическое значение для понимания общих закономерностей взаимодействия сложных нелинейных систем различной природы. Можно ожидать, что аналогичное поведение будет иметь место в реальных системах, подверженных флуктуациям, в частности, в физиологических [14] и физических системах [15,16].

Работа выполнена при поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 гг., а также фонда Д. Зимина „Династия“.

## Список литературы

- [1] *Manneville P., Pomeau Y.* // *Physika. D.* 1980. Vol. 1(2). P. 167–241.
- [2] *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.* *L'Ordre Dans Le Chaos.* Hermann. Paris, 1988.
- [3] *Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J.* // *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 79(1). P. 47–50.
- [4] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S.* // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 97. P. 114 101.
- [5] *Hramov A.E., Koronovskii A.A.* // *Europhysics Lett.* 2005. Vol. 70(2). P. 169–175.
- [6] *Boccaletti S., Valladares D.L.* // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62(5). P. 7497–7500.
- [7] *Toral R., Mirasso C.R., Hernández-Garsia E., Piro O.* // *Chaos.* 2001. Vol. 11(3). P. 665–673.
- [8] *Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I.* // *Phys. Rev. E.* 1995. Vol. 51(2). P. 980–994.
- [9] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I.* // *Phys. Lett. A.* 2006. Vol. 354. (5–6). P. 423–427.
- [10] *Zhou C.S., Lai C.H.* // *Phys. Rev. E.* 1998. Vol. 58. (4). P. 5188–5191.
- [11] *Kim C.M.* // *Phys. Rev. E.* 1997. Vol. 56. (3, Part B). P. 3697–3700.
- [12] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. „Современная теория колебаний и волн“. М.: Физматлит, 2001.
- [13] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // *ЖТФ.* 2006. Т. 76. Вып. 2. С. 1–9.
- [14] *Boccaletti S., Allaria E., Meucci R., Arcelli F.T.* // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89. (19). P. 194 101.
- [15] *Hramov A.E., Koronovskii A.A., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // *Phys. Rev. E.* 2007. Vol. 75. (5). P. 056 207.
- [16] *Sitnikova E., Hramov A.E., Koronovskii A.A., Luijtenlaar E.L.* // *Journ. of Neuroscience Methods.* 2009. Vol. 180. P. 304–316.