

01;09

Нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от нагрузки

© Ю.В. Новожилова,¹ Н.М. Рыскин,² С.А. Усачева²¹ Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия² Саратовский государственный университет,
410012 Саратов, Россия

(Поступило в Редакцию 4 октября 2010 г. В окончательной редакции 24 января 2011 г.)

Рассмотрены нестационарные процессы в генераторе с запаздывающим отражением от удаленной нагрузки. Основное внимание уделено случаю большого запаздывания, когда число сосуществующих устойчивых режимов может быть велико. Проведен теоретический анализ устойчивости стационарных состояний (собственных мод). Представлены результаты численного моделирования переходных процессов при распаде неустойчивых состояний, хорошо согласующиеся с теоретическими выводами. Исследована возможность переключения между стационарными состояниями при кратковременном воздействии внешним управляющим сигналом.

Введение

В серии экспериментальных работ [1,2] было обнаружено, что достаточно малое отражение от удаленной нагрузки заметно влияет на спектр выходного излучения гиротрона. Учет этого влияния важен при диагностике плазмы, когда спектр гиротрона должен быть узким, или при подавлении плазменных неустойчивостей в установках управляемого термоядерного синтеза, когда спектр должен быть плавно перестраиваемым [2,3]. В частности, в экспериментах по электронно-циклотронному нагреву плазмы [4] отражения приводят к интенсивной шумовой модуляции выходной мощности гиротрона.

Хотя динамика различных генераторов под воздействием запаздывающего сигнала, отраженного от нагрузки, изучалась ранее во многих работах (см., например, [5–15]), основное внимание уделялось таким нестационарным явлениям, как автомодуляция и переход к хаосу. В то же время такие вопросы, как устойчивость собственных мод, характер процессов установления колебаний, возможности переключения между различными модами, изучены недостаточно. В особенности это относится к случаю большого запаздывания, которое реализуется для генератора миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов. Большое запаздывание приводит к мультистабильности, т.е. к существованию большого числа устойчивых стационарных состояний и ярко выраженным процессам конкуренции мод [3,5]. Отметим, что с математической точки зрения именно случай большого запаздывания представляет наибольшие трудности (см., например, [16,17]). В настоящей работе на примере обобщенной модели генератора с отражением от нагрузки исследуются условия устойчивости стационарных состояний, переходные процессы, а также процессы переключения мод под воздействием внешнего сигнала. Рассматриваются типич-

ные для гиротронов условия большого запаздывания и малого коэффициента отражения. Исследования проводятся как на основе теоретического аппарата, развитого в [18], так и путем численного моделирования.

1. Основные уравнения. Стационарные состояния и условия их устойчивости

Основное уравнение. Рассмотрим генератор с запаздывающим отражением от нагрузки в режиме квазигармонических колебаний с медленно меняющейся комплексной амплитудой A . Динамику амплитуды колебаний можно описать уравнением, которое в случае кубической нелинейности имеет вид [6–8]

$$\frac{dA}{dt} - (\lambda - |A|^2) A = \rho e^{i\psi} A(t - \Delta t). \quad (1)$$

Левая часть уравнения (1) представляет собой эталонное укороченное уравнение для описания автоколебаний в системе с одной степенью свободы вблизи порога бифуркации Андронова–Хопфа [7,19,20], слагаемое в правой части описывает сигнал, отраженный от нагрузки. Здесь λ — параметр возбуждения генератора, Δt — время запаздывания, $\rho \exp(i\psi)$ — комплексный параметр отражений. Можно показать [8], что $\rho = \omega_0 r / Q$, где r — коэффициент отражения от нагрузки, ω_0 — частота генерации, Q — дифракционная добротность. Уравнение (1) можно, в частности, получить из модели генератора Ван дер Поля с запаздывающим отражением

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 kx(t - \Delta t),$$

с использованием стандартных асимптотических методов теории колебаний [6,7].

В дальнейшем удобно выполнить замену переменных

$$t' = t/\Delta t, \quad \lambda' = \lambda \Delta t, \quad \rho' = \rho \Delta t, \quad A' = A\sqrt{\Delta t},$$

в результате чего уравнение (1) принимает вид (штрихи у нормированных переменных опускаем)

$$\frac{dA}{dt} - (\lambda - |A|^2)A = \rho e^{i\psi} A(t-1). \quad (2)$$

Стационарные состояния. Для стационарных состояний вида $A = A_0 \exp(i\omega t)$ из соотношения (1) находим¹

$$A_0^2 = \lambda + \rho \cos \theta, \quad (3)$$

$$\omega = -\rho \sin \theta. \quad (4)$$

Здесь ω — сдвиг частоты генерации относительно собственной частоты генератора без отражений, $\theta = \omega - \psi$ — сдвиг фазы сигнала за время прохождения по кольцу запаздывающей обратной связи. На рис. 1 приведены характерные зависимости $\omega(\psi)$. Отметим, что при $\rho > 1$ эта зависимость становится неоднозначной, т. е. возможна мультистабильность. Различные ветви функции $\omega(\psi)$ смыкаются в точках B и C , в которых

$$\omega = \pm \sqrt{\rho^2 - 1}, \quad \rho \cos \theta = -1.$$

Как будет показано ниже, участок BC , где $\rho \cos \theta < -1$, соответствует неустойчивым состояниям.

Появление новых собственных частот удобно пояснить, решая уравнение (4) графически (рис. 2). В отсутствие отражений имеем монохроматическую генерацию на собственной частоте свободного генератора, которая в используемой нормировке равна нулю. При $\rho < 1$ имеется единственное стационарное состояние, частота которого определяется фазой параметра отражений ψ (кривая 1 на рис. 1). С ростом ρ прямая 1 на рис. 2 проходит все ближе к горизонтальной оси, вследствие чего возникают новые стационарные режимы, которые мы занумеруем по мере удаления от основной частоты, как показано на рис. 2. Как видно из рисунка, это происходит при касании прямой 1 и синусоиды 2, т. е. при условии

$$\rho \cos \theta = -1. \quad (5)$$

Каждая вновь появляющаяся стационарная мода вырождена, при дальнейшем увеличении ρ она расщепляется на две (см., например, точки 5 и 6 на рис. 2). Как следует из (4), частоты стационарных мод не зависят от амплитуды колебаний. Это связано с тем, что в уравнении (1) не учитывается фазовая нелинейность.

Нетрудно получить оценку числа стационарных состояний N , считая, что при положительных (отрицательных) расстройках касание происходит в окрестности максимумов (минимумов) синусоиды соответственно, т. е. при $\omega = \omega_n$, где

$$\omega_n \approx 2\pi n \mp \pi/2 + \psi. \quad (6)$$

¹ Величину A_0 можно без ограничения общности считать вещественной.

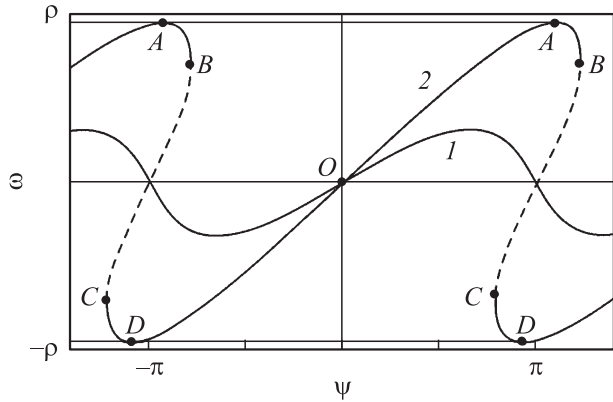


Рис. 1. Зависимости частоты генерации ω от фазы параметра отражений ψ : 1 — $\rho < 1$, 2 — $\rho > 1$. Штрихами показаны участки, неустойчивые относительно возмущений на собственной частоте. В точках A и D $\cos \theta = 0$, в точках B и C $\rho \cos \theta = -1$.

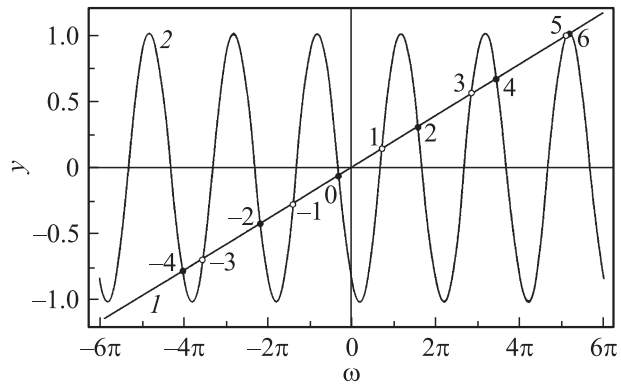


Рис. 2. Пример графического решения уравнения (4) при $\rho = 16.335$, $\psi = -0.309\pi$. 1 — прямая $y_1 = \omega/\rho$, 2 — синусоида $y_2 = -\sin \theta$. „Собственно“-устойчивые моды показаны черными кружками, „собственно“-неустойчивые — светлыми.

Здесь $n = \pm 1, \pm 2, \dots$; знак „-“ в (6) относится к положительным n , „+“ — к отрицательным. Учитывая, что на каждом периоде синусоиды имеются две точки пересечения, получаем

$$N \approx \frac{2\rho}{\pi}.$$

Эта оценка справедлива при больших ρ , когда число стационарных состояний велико.

Вывод характеристического уравнения. Проведем анализ стационарных состояний на устойчивость. Рассмотрим возмущенное решение вида

$$A(t) = (A_0 + a(t))e^{i\omega t},$$

где a — малое возмущение, подставим в (2) и линеаризуем. Получим

$$\frac{da}{dt} + i\omega a - (\lambda - 2A_0^2)a - \rho e^{i\theta} a(t-1) = -A_0^2 a^*, \quad (7)$$

где знак „*“ обозначает комплексно-сопряженное выражение. Решение этого уравнения будем искать в виде пары сателлитов, симметрично отстоящих от основной частоты

$$a = a_+ \exp(i\Omega t) + a_- \exp(-i\Omega^* t). \quad (8)$$

Безразмерные частоты этих сателлитов $\omega_+ = \omega + \Omega$ и $\omega_- = \omega - \Omega^*$ удовлетворяют соотношению

$$2\omega = \omega_+ + \omega_-^*, \quad (9)$$

которое можно интерпретировать как условие распада двух квантов основной моды на кванты боковых сателлитов [21]. Частоты ω_{\pm} , вообще говоря, комплексные, как видно из уравнения (9), оба сателлита либо одновременно нарастают, либо одновременно затухают.

Подставляя (8) в уравнение (7), можно после ряда стандартных преобразований прийти к характеристическому уравнению²

$$\Omega^2 - 2i\Omega[A_0^2 + \chi(\Omega) \cos \theta] - 2A_0^2\chi(\Omega) \cos \theta - \chi^2(\Omega) = 0, \quad (10)$$

где $\chi(\Omega) = \rho(1 - e^{-i\Omega})$.

Анализ характеристического уравнения позволяет найти условия устойчивости стационарных состояний. При этом возможны два типа неустойчивости: относительно возмущений на собственной частоте и относительно боковых сателлитов, т.е. возмущений на частотах, отличных от собственной.

Устойчивость относительно возмущений на собственной частоте. В этом случае корни характеристического уравнения чисто мнимые, $\Omega = -i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$. Уравнение (10) принимает вид

$$\beta^2 + 2\beta(A_0^2 + \chi \cos \theta) + 2A_0^2\lambda \cos \theta + \chi^2 = 0, \quad (11)$$

где теперь $\chi = \rho(1 - e^{-\beta})$. Выясним, при каких условиях это уравнение имеет вещественный корень $\beta > 0$. Это легко сделать, считая β малым. Тогда $\chi \approx \rho\beta$ и (11) дает

$$\beta = -\frac{2A_0^2(1 + \rho \cos \theta)}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta}.$$

Видно, что положительный корень имеется при

$$\rho \cos \theta < -1. \quad (12)$$

На рис. 1 неустойчивый участок BC показан штриховой кривой линией.

Поскольку появление высших стационарных состояний происходит при выполнении условия (5), отсюда следует, что после появления каждой пары новых стационарных состояний одно из них сразу становится неустойчивым. Если занумеровать их по мере удаления от основной моды, как показано на рис. 2, то неустойчивыми будут моды с нечетными номерами (светлые кружки). Так как данному типу неустойчивости отвечают

чисто мнимые корни характеристического уравнения, следует ожидать, что нарастание возмущений будет носить экспоненциальный характер (так называемая апериодическая неустойчивость по терминологии [7]). Моды с четными номерами устойчивы относительно возмущений на собственной частоте, но могут стать неустойчивыми относительно боковых сателлитов, что будет рассмотрено ниже.

Следует отметить аналогию с теорией захвата частоты генератора внешним сигналом [7,19,20], в качестве которого в данном случае выступает отраженная волна. Если фаза отраженной волны имеет такую величину, что ее воздействие приводит к увеличению амплитуды колебаний в стационарном состоянии, то это состояние устойчиво. И, наоборот, если отражение приводит к уменьшению амплитуды колебаний, то такое состояние неустойчиво.

Более строгий анализ, не ограничивающийся требованием малости β , также приводит к условию (12).

Устойчивость относительно боковых сателлитов. Сателлитам соответствуют корни уравнения (10) с ненулевой вещественной частью, следовательно, рост амплитуды неустойчивого возмущения носит осциллирующий характер (колебательная неустойчивость по терминологии [7]). Рассмотрим случай достаточно слабых отражений, когда выполняется условие $\rho \ll \lambda$. При этом условия устойчивости можно получить аналитически. Отметим, что именно такая ситуация реализуется при воздействии излучения гиротрона на плазму.

При условии малых отражений можно считать, что $A_0^2 \approx \lambda$ (см. формулу (3)) и $|\chi(\Omega)| \ll \lambda$. Тогда уравнение (10) принимает вид

$$\Omega^2 - 2i\lambda\Omega - 2\lambda\chi(\Omega) \cos \theta - \chi^2(\Omega) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет два семейства корней. Одно из них характеризуется большой положительной мнимой частью: $\Omega \approx 2i\lambda + \mathbf{O}(|\chi|)$, т.е. соответствует быстро затухающим решениям с декрементом, равным прочности предельного цикла свободного генератора. Второе удовлетворяет уравнению

$$\Omega \approx i \left(\chi(\Omega) \cos \theta + \frac{\chi^2(\Omega)}{2\lambda} \right). \quad (14)$$

Можно считать, что первое соответствует возмущениям амплитуды колебаний (поперек предельного цикла), второе — возмущениям фазы (вдоль цикла).

Трансцендентное уравнение (14) относительно Ω имеет бесконечное число комплексных корней. Для анализа устойчивости удобно использовать метод D -разбиения [19,22]. Поскольку на границе области устойчивости в пространстве параметров корни характеристического уравнения чисто вещественные, разобьем (14) на два вещественных уравнения

$$\lambda \cos \theta = \rho \cos \Omega, \quad (15)$$

$$\Omega = -\frac{\rho^2}{\lambda} \sin \Omega. \quad (16)$$

² В несколько иной форме оно было получено ранее в работе [7].

Уравнения (15), (16) удобно решать графически аналогично рис. 2. Очевидно, что при этом достаточно ограничиться неотрицательными значениями Ω , поскольку рассматривается возмущение (8) в виде двух спутников. Уравнение (16) имеет корень $\Omega = 0$, соответствующий инвариантности решения относительно сдвига фазы. Нетривиальные решения появляются при касании прямой $y_3 = \lambda\Omega/\rho^2$ и синусоиды $y_4 = -\sin\Omega$. Условие касания, очевидно, есть

$$\frac{\rho^2}{\lambda} \cos \Omega = -1. \quad (17)$$

Комбинируя это соотношение с (15), приходим к уравнению (5), т.е. вновь возникающая вырожденная стационарная мода неустойчива. Заметим, что из численного анализа уравнения (16) следует, что ненулевые решения появляются при превышении порогового значения

$$\frac{\rho^2}{\lambda} \approx 4.603. \quad (18)$$

Можно получить достаточно простые формулы для границы устойчивости, если рассмотреть неустойчивость собственной моды вблизи порога ее возникновения, т.е. когда частоты лежат в окрестности точки касания как, например, для мод с номерами 5 и 6 на рис. 2. Анализируя зависимость $\omega(\psi)$, представленную на рис. 1, можно заключить, что достаточно хорошим приближением для точки касания является значение $\omega \approx \sqrt{\omega_n^2 - 1}$, где ω_n — частота, соответствующая максимуму или минимуму синусоиды в (4), см. формулу (6). Тогда из уравнений (3), (4) можно найти

$$\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\rho^2}} \approx \pm \sqrt{1 - \frac{\omega_n^2 - 1}{\rho^2}},$$

где знак „+“ соответствует моде с четным номером, знак „-“ — с нечетным. Подставив это выражение в (15), (16), получим

$$\rho \approx \sqrt{\omega_n^2 + (\Omega \text{ctg} \Omega)^2 - 1},$$

$$\lambda \approx - \frac{(\omega_n^2 + (\Omega \text{ctg} \Omega)^2 - 1) \sin \Omega}{\Omega}. \quad (19)$$

Эти выражения представляют собой границы устойчивости на плоскости параметров ρ, λ , заданные в параметрическом виде. В качестве примера на рис. 3 показаны границы, рассчитанные по формулам (19) для $n = 3$, т.е. для мод с номерами 5, 6, при $\psi = -0.309\pi$. Граница состоит из двух ветвей, нижняя из которых соответствует 6-й моде, верхняя — 5-й. Каждая мода устойчива выше соответствующей кривой. Границы смыкаются в точке ρ_c, λ_c , где $\rho_c \approx 16.277$ — значение ρ , при котором возникают 5-я и 6-я моды, согласно численному решению уравнения (4), а значение $\lambda_c = \rho_c^2/4.603 \approx 57.56$ определяется из формулы (18). Штриховая линия $\rho = \rho_c$

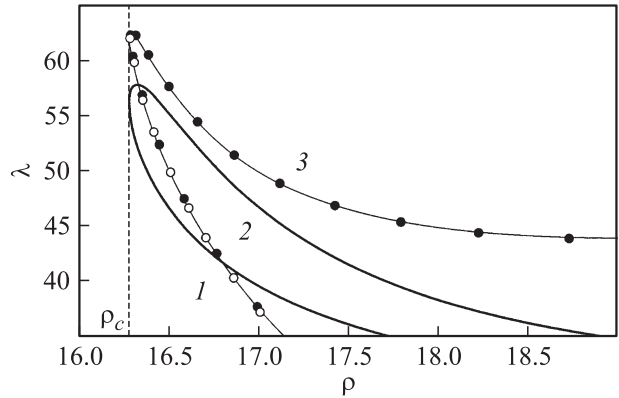


Рис. 3. Границы областей устойчивости относительно распада на спутники для 5-й и 6-й мод на плоскости ρ, λ при $\psi = -0.309\pi$. Сплошная жирная линия — расчет по приближенным формулам (19), темные кружки — решение характеристического уравнения (10), светлые кружки — результаты численного моделирования.

представляет собой границу существования анализируемого решения. Таким образом, на рис. 3 в области 1 неустойчивы обе моды, в области 2 устойчива 6-я мода, неустойчива 5-я, в области 3 устойчивы обе моды. Следует также напомнить, что, как было показано выше, 5-я мода одновременно является неустойчивой относительно возмущений на собственной частоте.

Для сравнения на рис. 3 темными кружками показана граница устойчивости, полученная в результате численного решения характеристического уравнения (10). Она качественно согласуется с приближенной, но несколько сдвинута в область больших λ , в частности $\lambda_c \approx 62.14$. Различие обусловлено тем, что при данных значениях параметров условие $\rho \ll \lambda$, вообще говоря, не выполняется. Также на рисунке показана граница устойчивости, рассчитанная путем численного моделирования исходного уравнения с запаздыванием (2) (см. ниже), которая хорошо согласуется с решением характеристического уравнения. Очевидно, что численную границу можно построить только для 6-й моды, устойчивой относительно „собственных“ возмущений. Области устойчивости для других пар мод имеют аналогичный вид, причем соответствие точных и приближенных решений тем лучше, чем выше номер моды.

Итак, можно сделать вывод о том, что вблизи порога возникновения стационарные состояния неустойчивы относительно распада на спутники, однако с увеличением параметра ρ или λ они становятся устойчивыми. Таким образом, спутниковая неустойчивость может проявляться только на краю частотного набора стационарных состояний, если λ при этом не превышает критического значения λ_c .

Устойчивость основной моды. Приведенный выше анализ, очевидно, не применим для стационарного состояния, соответствующего основной моде. Покажем, что оно всегда устойчиво. Под основной понимаем моду, сдвиг частоты которой ближе всего к нулю. При этом

считаем, что $-\pi < \psi < \pi$, так как, если ψ выходит за пределы этого интервала, ближайшей к центру становится соседняя мода (см. рис. 1). Как было показано выше, если увеличивать ρ , спутниковая неустойчивость возникает при условии касания (5), которое для основной моды не выполняется. Действительно, если исключить из (5) ρ с помощью (4), приходим к соотношению

$$\omega = \text{tg}(\omega - \psi). \quad (20)$$

Однако, анализируя уравнение (4), нетрудно показать, что при увеличении ρ частота основной моды меняется в пределах от 0 до ψ . При этом уравнение (20) удовлетворено быть не может. Основная мода также устойчива относительно возмущений на собственной частоте, поскольку, как видно из рис. 1, на графике $\omega(\psi)$ частота основной моды всегда лежит на участке $CDOAB$, где неравенство (12) не выполняется.

2. Результаты численного моделирования

Результаты численного моделирования находятся в хорошем соответствии с теоретическими, представленными в разделе 1. На рис. 4 приведены зависимости амплитуды колебаний от λ для мод с номерами 0, 2, 4, 6. Значения остальных параметров $\rho = 16.335$, $\psi = -0.309\pi$, т.е. те же, что и на рис. 2. Следует отметить, что численные результаты полностью согласуются с теоретическими зависимостями, построенными по формуле (3) при соответствующих значениях частот. Как видно из рис. 2, при данных параметрах присутствуют сразу 11 стационарных состояний. Графики для

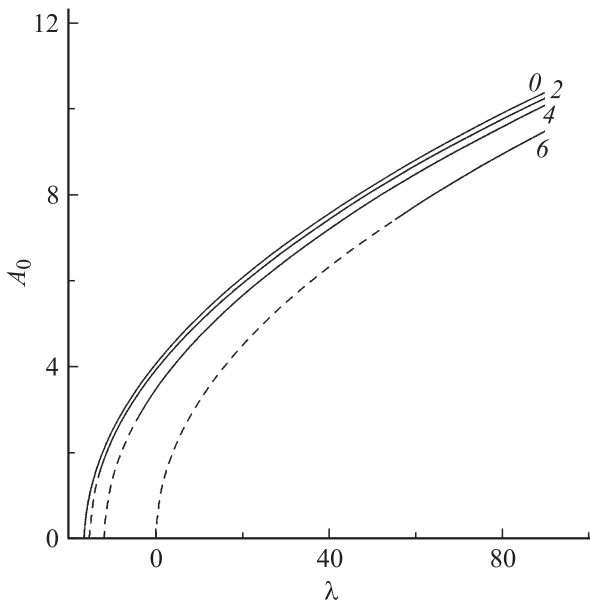


Рис. 4. Зависимости амплитуды колебаний A_0 от λ для различных мод при $\rho = 16.335$, $\psi = -0.309\pi$. Цифры на рисунке соответствуют номерам мод. Устойчивые участки показаны сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми.

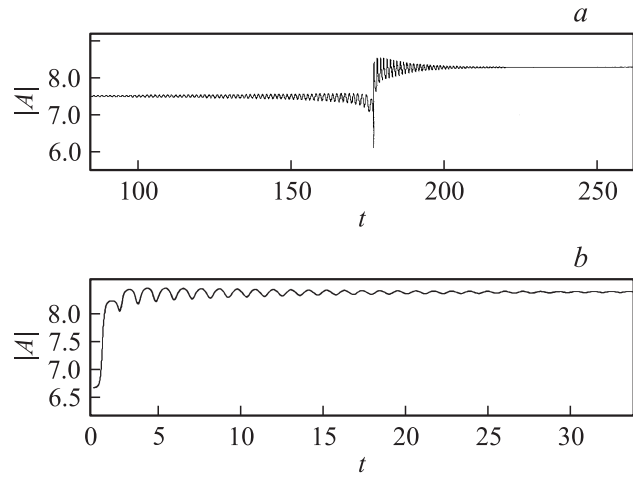


Рис. 5. Зависимости амплитуды колебаний от времени в ходе переходных процессов, при $\rho = 16.4$, $\psi = -0.309\pi$, $\lambda = 57$. *a* — переход от 6-й моды, неустойчивой относительно распада на спутники, к 4-й; *b* — переход от 3-й моды, неустойчивой относительно возмущений на собственной частоте, к 4-й.

мод с номерами -2 , -4 имеют аналогичный характер и не приведены, чтобы не загромождать рисунок. Моды с нечетными номерами всегда неустойчивы относительно возмущений на собственной частоте, поэтому на рисунке отсутствуют.

Поскольку при данных параметрах имеется сильная мультистабильность, расчеты производились следующим образом. В качестве начальных условий выбирались значения амплитуды и частоты генерации при наибольшем значении λ , а затем проводился расчет при плавном уменьшении λ с наследованием начальных условий. Когда λ становится меньше порога устойчивости для данной моды, происходит жесткий переход к устойчивой моде, расположенной ближе к центру (т.е. от 6-й к 4-й, от 4-й к 2-й и т.д.). На рис. 4 устойчивые участки показаны сплошными линиями, неустойчивые штриховыми. Основная мода устойчива при любых значениях параметров. Граница устойчивости на плоскости параметров λ , ρ полностью согласуется с полученной в результате численного решения характеристического уравнения (рис. 3).

Заметим, что стационарные решения существуют и при $\lambda < 0$, т.е. когда в отсутствие отражений генератор не возбуждается. Как видно из формулы (3), при $\cos \theta > 0$, когда отраженный сигнал приходит в фазе с собственными колебаниями генератора, возможны ненулевые значения амплитуды при отрицательных λ . Действительно, за счет отражений увеличивается добротность колебательной системы, что приводит к снижению порога генерации.

Рис. 5 иллюстрирует типичные переходные процессы, сопровождающие переход из неустойчивого стационарного состояния в устойчивое. Начальные условия задаются в виде той или иной неустойчивой моды, на которую накладывается малое возмущение. Когда

неустойчивость возникает в результате распада на сателлиты (рис. 5, *a*), наблюдается длительная стадия нарастающих осцилляций амплитуды (биений). Частота биений хорошо согласуется с найденной из решения характеристического уравнения. При $t \approx 170$ система переходит в окрестность устойчивой 4-й моды. Среднее значение амплитуды скачком увеличивается, после чего переходный процесс носит характер затухающих биений. Если же начальное состояние соответствует моде, неустойчивой относительно „собственных“ возмущений (рис. 5, *b*), на начальной стадии возмущение нарастает экспоненциально, как и должно быть при аperiodической неустойчивости. Установление стационарного режима вновь происходит в виде затухающих биений, однако их амплитуда и длительность переходного процесса много меньше, чем в предыдущем случае.

Приведенные выше аналитические и численные результаты свидетельствуют о наличии большого числа устойчивых стационарных состояний при достаточно больших значениях ρ . Однако если моделируется возбуждение системы от малых флуктуаций, происходит установление состояния, соответствующего основной моде. Поэтому возникает вопрос о том, как можно на практике возбудить стационарные состояния, соответствующие высшим модам. Наиболее простой способ заключается в том, чтобы на начальном этапе переходного процесса подать внешнее воздействие на частоте одной из высших мод. Отметим, что в работе [3] рассматривался аналогичный способ для управления частотой генерации гиротрона. Укороченное уравнение (2) при этом принимает вид

$$\frac{dA}{dt} - (\lambda - |A|^2)A = \rho e^{i\psi} A(t - 1) + F(t), \quad (21)$$

где внешнее воздействие $F(t)$ имеет вид радиоимпульса длительности τ с частотой заполнения, равной частоте соответствующей собственной моды ω_n :

$$F(t) = \begin{cases} F_0 \exp(i\omega_n t), & t \leq \tau, \\ 0 & t > \tau. \end{cases} \quad (22)$$

Если амплитуда F_0 достаточно мала, по окончании переходного процесса происходит установление колебаний на основной частоте ω_0 . Затем по мере увеличения F_0 происходят последовательные переходы к высшим собственным модам, частоты которых ω_m , $|m| \leq |n|$ лежат все ближе к частоте воздействия. Рассмотрим для определенности случай $\rho = 16.335$, $\lambda = 60$, когда устойчивы моды с номерами 0, ± 2 , ± 4 и 6 (см. рис. 2), причем порог устойчивости для 6-й моды $\lambda = 58$ превышен незначительно. Соответствующие пороговые значения $F_0^{(n,m)}$ приведены в таблице.

Пороговые значения $F_0^{(n,m)}$, при превышении которых устанавливается m -я мода при воздействии на частоте n -й моды

n	-4	-4	-2	2	4	4	6	6	6
m	-2	-4	-2	2	2	4	2	4	6
$F_0^{(n,m)}$	60.9	89.6	39.7	22.5	39.2	74.9	52.9	100.6	120.1

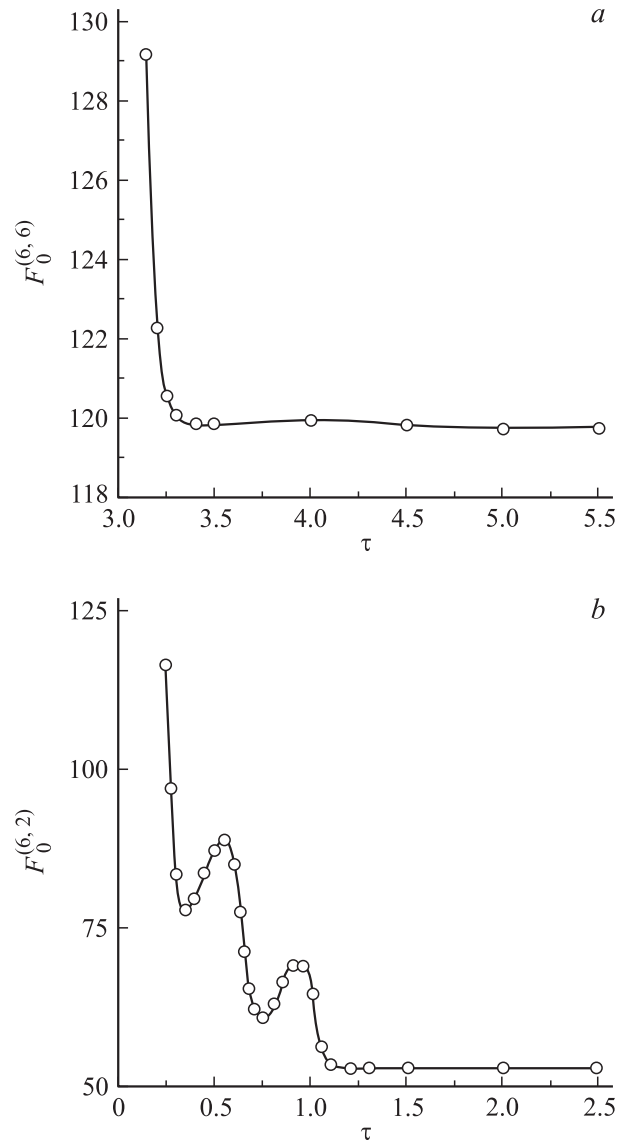


Рис. 6. Зависимости порогового значения амплитуды воздействия от длительности импульса при установлении 6-й (*a*) и 2-й (*b*) мод. Воздействие осуществляется на частоте 6-й моды.

Значения $F_0^{(n,m)}$, вообще говоря, зависят от времени воздействия τ (рис. 6). Однако пока τ больше некоторого предельного значения τ_{\min} , они остаются примерно постоянными (именно эти значения приведены в таблице), а затем начинают резко увеличиваться. Отметим, что зависимость $F_0^{(n,m)}$ от τ может иметь различный вид. Когда речь идет об установлении моды с той же частотой, что и частота воздействия, данная зависимость является монотонной (рис. 6, *a*), для других мод она носит более сложный, осциллирующий характер (рис. 6, *b*). Это объясняется тем, что воздействующий сигнал (22) является прямоугольным радиоимпульсом, спектральная плотность которого есть

$$S_\omega = \frac{F_0 \tau}{2\pi} \frac{\sin[(\omega - \omega_n)\tau/2]}{(\omega - \omega_n)\tau/2}.$$

Значениям τ , для которых спектральная плотность на собственных частотах $\omega_m \neq \omega_n$ обращается в нуль, на рис. 6, b соответствуют максимумы, а значениям, при которых $|S_\omega|$ достигает максимума, — минимумы.

Практически для всех мод $\tau_{\min} \approx 1$, за исключением 6-й моды, для которой оно несколько увеличивается ($\tau_{\min} \approx 3.3$, см. рис. 6, a). Это связано с тем, что 6-я мода находится вблизи порога устойчивости. Таким образом, можно добиться установления колебаний на любой из устойчивых мод при достаточно кратковременном воздействии с длительностью (с учетом используемой нормировки переменных) порядка времени запаздывания.

При других значениях параметра возбуждения λ качественно описанная картина сохраняется, однако, поскольку амплитуды собственных мод меняются примерно пропорционально $\sqrt{\lambda}$ (см. (3)), соответствующим образом изменяются и пороговые значения $F_0^{(n,m)}$.

Заключение

Проведенный в работе анализ стационарных состояний генератора с запаздывающим отражением от удаленной нагрузки показывает, что при больших значениях параметра, имеющего смысл произведения коэффициента отражения от нагрузки на время запаздывания, число стационарных состояний увеличивается. Если занумеровать собственные моды по мере удаления от центральной частоты (см. рис. 2), то моды с нечетными номерами оказываются неустойчивыми относительно возмущений на собственной частоте. Наряду с этим стационарное состояние может быть неустойчиво относительно 4-фотонного распада на спутники с частотами, симметрично отстоящими от собственной частоты. Эта неустойчивость имеет место только вблизи порога возникновения соответствующей моды по параметру ρ , если параметр возбуждения λ при этом не превышает некоторого критического значения. С увеличением ρ или λ неустойчивое стационарное состояние становится устойчивым. Состояние, соответствующее основной моде, которая имеет наименьший сдвиг частоты, всегда устойчиво.

Как показывает численное моделирование, переход из неустойчивого состояния происходит в ближайшее по частоте устойчивое состояние. При распаде на спутники переходный процесс имеет вид нарастающих биений, а при неустойчивости относительно возмущений на собственной частоте носит экспоненциальный характер. Установления колебаний на любой из устойчивых мод можно добиться, воздействуя на систему сигналом на соответствующей частоте. При этом пороговое значение амплитуды воздействия возрастает по мере удаления от частоты основной моды. Длительность воздействия должна превышать некоторую предельную величину, которая, как правило, примерно равна времени запаздывания, за исключением мод, находящихся вблизи порога устойчивости, для которых она несколько увеличивается.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (№ 09-02-00707 и 11-08-01129) и программы „Развитие научного потенциала высшей школы“ (№ 2.1.1/1738). Работа Н.М. Рыскина также поддержана фондом „Династия“.

Список литературы

- [1] Фернандес А., Харчев Н.К., Новожилова Ю.В. и др. // Прикладная физика. 2009. № 6. С. 158–166.
- [2] Kasperek W., Petelin M.I., Shegolkov D.Yu. et al. // Nucl. Fusion. 2008. Vol. 48. P. 054010.
- [3] Nusinovich G.S., Sinityn O.V., Antonsen T.M. // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. P. 205101.
- [4] Батанов Г.М., Колик Л.В., Новожилова Ю.В. и др. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 5. С. 90–95.
- [5] Lang R., Kobayashi K. // IEEE J. Quantum Electron. 1980. Vol. 16. N 3. P. 347–355.
- [6] Дамгов В.Н., Ланда П.С., Перминов С.М., Шаталова Г.Г. // РиЭ. 1986. Т. 31. № 4. С. 730–733.
- [7] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Наука, 1997.
- [8] Antonsen T.M., Cai S.Y., Nusinovich G.S. // Phys. Fluids B. 1992. Vol. 4. N 12. P. 4131–4139.
- [9] Гинзбург Н.С., Глявин М.Ю., Завольский Н.А. и др. // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. Вып. 11. С. 53–59.
- [10] Глявин М.Ю., Запевалов В.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 1998. Т. 41. № 10. С. 1348–1357.
- [11] Dumbrajs O., Glyavin M., Zapevalov V.E., Zavolsky N. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2000. Vol. 28. N 3. P. 588–596.
- [12] Глявин М.Ю., Запевалов В.Е., Куфтин А.Н., Лучинин А.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 2000. Т. 43. № 5. С. 440–444.
- [13] Dumbrajs O., Idehara T., Watanabe S. et al. // IEEE Trans. Plasma Sci. 2004. Vol. 32. N 3. P. 899–902.
- [14] Grudiev A., Schunemann K. // Int. J. Infrared Millimeter Waves. 2003. Vol. 24. N 4. P. 429–449.
- [15] Усанов Д.А., Скрипаль Ал.В., Скрипаль Ан.В. Физика полупроводниковых радиочастотных и оптических автодинов. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2003.
- [16] Кащенко С.А., Кащенко И.С. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16. № 4. С. 137–146.
- [17] Глазков Д.В. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2008. Т. 16. № 4. С. 167–181.
- [18] Novozhilova Yu.V., Petelin M.I., Sergeev A.S. // Proc. VII Int. Workshop „Strong microwaves: sources and applications“. Nizhny Novgorod, 2008. Vol. 1. P. 128–133.
- [19] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
- [20] Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Физматлит, 2005.
- [21] Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. // Релятивистская высокочастотная электроника. Проблемы повышения мощности и частоты излучения. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 101–144.
- [22] Неймарк Ю.И. // Прикл. математика и механика. 1949. Т. 13. № 4. С. 349–380.