

01

Математическое моделирование диодной системы на основе полевого эмиттера

© Е.М. Виноградова, Н.В. Егоров

Санкт-Петербургский государственный университет,
198904 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: robbym@mail.ru

(Поступило в Редакцию 3 ноября 2010 г. В окончательной редакции 29 декабря 2010 г.)

Рассмотрена математическая модель диодной системы на основе полевого эмиттера. Полевой эмиттер моделируется следующим образом: вершина его представляет собой проводящую сферу, „тело“ эмиттера — сплошной диэлектрик, поверхностью которого является веретенообразная поверхность вращения. Анод представляет собой часть сферической поверхности, подложка эмиттера представляет собой сферическую поверхность или плоскость. Влияние пространственного заряда не учитывается. Для нахождения распределения электростатического потенциала использованы методы разделения переменных и парных уравнений. Задача нахождения неизвестных коэффициентов в разложении потенциала по собственным функциям сведена к решению системы уравнений, включающей в себя линейные алгебраические уравнения и уравнение Фредгольма 2-го рода. Таким образом, решена задача вычисления распределения электростатического потенциала во всей области исследуемой системы.

Введение

В связи с развитием нано- и микроэлектроники и появлением новых электронно-вакуумных приборов на основе углеродных нанотрубок и других микро- и нанообразований в качестве полевых эмиттеров, а также с развитием нанотехнологий по изготовлению катодов Спиндта за последние годы значительно вырос интерес как к явлению полевой электронной эмиссии, так и к исследованию свойств самих полевых эмиттеров в зависимости от составляющих его материалов [1–3]. Основные преимущества полевых эмиттеров — компактность (отсутствие дополнительных узлов для получения эмиссии) и экономичность (отсутствие расхода энергии на принудительный нагрев, небольшие значения напряжений для обеспечения процесса эмиссии). Для теоретического исследования процесса формирования, транспортировки и управления пучками заряженных частиц требуется знать параметры системы и прежде всего распределение поля.

Таким образом, основной целью, пути решения которой рассматриваются в данной работе, является задача расчета электростатического потенциала в диодной электронно-оптической системе на базе полевого эмиттера специальной формы с использованием аналитических методов.

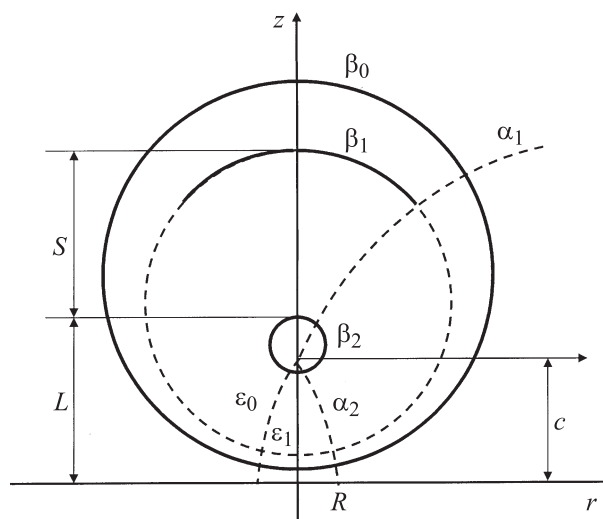
Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричную задачу нахождения распределения электростатического потенциала диодной системы. Эмиттер представляет собой проводящую сферу на диэлектрической веретенообразной поверхности вращения, анод — часть сферической поверхности, подложка эмиттера (граница системы) — сферическую

поверхность или плоскость (см. рисунок). Данная осесимметричная задача будет решаться в бисферической системе координат (α, β, ϕ) .

В бисферической системе координат поверхности электродов рассматриваемой диодной системы можно представить частями координатных поверхностей: $0 \leq \alpha \leq \pi, \beta = \beta_2$ — сфера на вершине эмиттера; $0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta = \beta_1$ — поверхность анода; $0 \leq \alpha \leq \pi, \beta = \beta_0$ — поверхность подложки эмиттера; $\alpha_2 \leq \alpha \leq \pi, \beta_0 \leq \beta \leq \beta_2$ — „тело“ эмиттера, состоящее из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 ; $0 \leq \alpha \leq \alpha_2, \beta_0 \leq \beta \leq \beta_2$ — внутренняя область системы, заполненная диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 .

Если $\beta_0 \neq 0$, то поверхность подложки эмиттера представляет собой сферу. В случае $\beta = 0$ данная сфера размыкается в плоскость $z = 0$.



Схематическое изображение диодной системы.

Геометрические параметры электродов моделируемой системы определяются по формулам:

- радиус сферы на вершине эмиттера $R_2 = \frac{c}{\text{sh}\beta_2}$,
- длина эмиттера $L = c \frac{1+\text{ch}\beta_2}{\text{sh}\beta_2}$,
- радиус основания эмиттера $R = c \text{ctg} \frac{\alpha_2}{2}$,
- радиус анода $R_1 = \frac{c}{\text{sh}\beta_1}$,
- радиус подложки $R_0 = \frac{c}{\text{sh}\beta_0}$,
- расстояние от вершины острия до анода

$$S = c \left(\frac{1 + \text{ch}\beta_1}{\text{sh}\beta_1} - \frac{1 + \text{ch}\beta_2}{\text{sh}\beta_2} \right).$$

Распределение электростатического потенциала $U(\alpha, \beta)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям

$$\begin{cases} \Delta U(\alpha, \beta) = 0, \\ U(\alpha, \beta_0)|_{0 \leq \alpha \leq \pi} = f_0(\alpha), \\ U(\alpha, \beta_1)|_{0 \leq \alpha \leq \alpha_1} = f_1(\alpha), \\ U(\alpha, \beta_2) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $f_1(\alpha)$ — граничные условия первого рода на аноде, $f_0(\alpha)$ — граничные условия первого рода на подложке эмиттера, потенциал на вершине эмиттера равен нулю.

Решение задачи

Для решения граничной задачи (1) вся область электронно-оптической системы разбивается на 4 области:

- I — $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \quad \alpha_2 \leq \alpha \leq \pi,$
- II — $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_2,$
- III — $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1, \quad \alpha_2 \leq \alpha \leq \pi,$
- IV — $\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_2.$

Для каждой из подобластей распределение потенциала $U(\alpha, \beta) = U_i(\alpha, \beta)$ ($i = \overline{1, 4}$) можно представить в виде разложений по полиномам Лежандра и тригонометрическим функциям [4,5]

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, \beta) &= \sqrt{\text{ch}\beta - \cos\alpha} \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta)}{\text{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta_1)} P_{v_n}(-\cos\alpha) \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_m}(-\cos\alpha)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_m}(-\cos\alpha_2)} \sin\tau_m(\beta - \beta_1) \right], \quad (2) \end{aligned}$$

где v_n — корни функций Лежандра по индексу $P_{v_n}(-\cos\alpha_2) = 0$,

$$\tau_m = \frac{\pi m}{\beta_2 - \beta_1}.$$

$$\begin{aligned} U_2(\alpha, \beta) &= \sqrt{\text{ch}\beta - \cos\alpha} \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\text{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta)}{\text{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta_1)} P_{\mu_n}(\cos\alpha) \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_m}(\cos\alpha)}{P_{-\frac{1}{2}+i\tau_m}(\cos\alpha_2)} \sin\tau_m(\beta - \beta_1) \right], \quad (3) \end{aligned}$$

где μ_n — корни функций Лежандра по индексу $P_{\mu_n}(\cos\alpha_2) = 0$.

$$\begin{aligned} U_3(\alpha, \beta) &= \sqrt{\text{ch}\beta - \cos\alpha} \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\text{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta - \beta_0)}{\text{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} P_{v_n}(-\cos\alpha) \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} E_n \frac{\text{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta)}{\text{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} P_{v_n}(-\cos\alpha) \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\sigma_m}(-\cos\alpha)}{P_{-\frac{1}{2}+i\sigma_m}(-\cos\alpha_2)} \sin\sigma_m(\beta - \beta_0) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

где $\sigma_m = \frac{\pi m}{\beta_1 - \beta_0}$.

$$\begin{aligned} U_4(\alpha, \beta) &= \sqrt{\text{ch}\beta - \cos\alpha} \\ &\times \left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\text{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta - \beta_0)}{\text{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} P_{\mu_n}(\cos\alpha) \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{\text{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta)}{\text{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} P_{\mu_n}(\cos\alpha) \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\sigma_m}(\cos\alpha)}{P_{-\frac{1}{2}+i\sigma_m}(\cos\alpha_2)} \sin\sigma_m(\beta - \beta_0) \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где коэффициенты E_n, F_n вычисляются из граничных условий (1) на сфере $\beta = \beta_0$

$$E_n = \frac{1}{N_{1,n}} \int_{\alpha_2}^{\pi} \frac{f_0(\alpha)}{\sqrt{\text{ch}\beta_0 - \cos\alpha}} P_{v_n}(-\cos\alpha) \sin\alpha d\alpha, \quad (6)$$

$$F_n = \frac{1}{N_{2,n}} \int_0^{\alpha_2} \frac{f_0(\alpha)}{\sqrt{\text{ch}\beta_0 - \cos\alpha}} P_{\mu_n}(\cos\alpha) \sin\alpha d\alpha, \quad (7)$$

нормировочные коэффициенты $N_{1,n}$ и $N_{2,n}$ определяются по формулам

$$N_{1,n} = \int_{\alpha_2}^{\pi} [P_{v_n}(-\cos\alpha)]^2 \sin\alpha d\alpha, \quad (8)$$

$$N_{2,n} = \int_0^{\alpha_2} [P_{\mu_n}(\cos\alpha)]^2 \sin\alpha d\alpha. \quad (9)$$

Представление потенциала в виде (2)–(5) удовлетворяет уравнению Лапласа внутри каждой из областей I, II, III, IV и условию непрерывности потенциала на границах раздела между областями. Условия непрерывности производной потенциала по нормали к границам раздела подобластей имеют вид

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U_1(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = \varepsilon_0 \frac{\partial U_2(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2}, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2,$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial U_3(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2} = \varepsilon_0 \frac{\partial U_4(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_2}, \quad \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1,$$

$$\frac{\partial U_1(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial U_3(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1}, \quad \alpha_2 \leq \alpha \leq \pi,$$

$$\frac{\partial U_2(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1} = \frac{\partial U_4(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\beta_1}, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \quad (10)$$

Положим

$$I(\tau_m, \tau_k) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \operatorname{ch} \beta \sin \tau_m(\beta - \beta_1) \sin \tau_k(\beta - \beta_1) d\beta, \quad (11)$$

$$J(v_n, \tau_k) = \int_{\beta_1}^{\beta_2} (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha_2) \times \frac{\operatorname{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta_1)} \sin \tau_k(\beta - \beta_1) d\beta, \quad (12)$$

$$M(\sigma_m, \sigma_k) = \int_{\beta_0}^{\beta_2} \operatorname{ch} \beta \sin \sigma_m(\beta - \beta_0) \sin \sigma_k(\beta - \beta_0) d\beta, \quad (13)$$

$$L(v_n, \sigma_k) = \int_{\beta_0}^{\beta_1} (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha_2) \times \frac{\operatorname{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta - \beta_0)}{\operatorname{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} \sin \sigma_k(\beta - \beta_0) d\beta, \quad (14)$$

$$Q(v_n, \sigma_k) = \int_{\beta_0}^{\beta_1} (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha_2) \times \frac{\operatorname{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} \sin \sigma_k(\beta - \beta_0) d\beta. \quad (15)$$

Используя полноту систем функций по переменной α на границе раздела областей $\alpha = \alpha_2$, первые два из условий (10) с учетом (11)–(15) приводят к двум наборам

линейных алгебраических уравнений соответственно

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} A_n J(v_n, \tau_k) P_{v_n}^1(-\cos \alpha_2) \\ + \varepsilon_0 \sum_{m=1}^{\infty} C_m J(\mu_m, \tau_k) P_{\mu_m}^1(\cos \alpha_2) \\ - B_k \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} \left(\cos \alpha_2 R(\tau_k) + (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\sin \alpha_2}{2} \right) \\ + \sum_{l=1}^{\infty} B_l I(\tau_l, \tau_k) R(\tau_l) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} A_n L(v_n, \sigma_k) P_{v_n}^1(-\cos \alpha_2) \\ + \varepsilon_0 \sum_{m=1}^{\infty} C_m L(\mu_m, \sigma_k) P_{\mu_m}^1(\cos \alpha_2) \\ - D_k \frac{\beta_1 - \beta_0}{2} \left(\cos \alpha_2 R(\sigma_k) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{\sin \alpha_2}{2} \right) \\ + \sum_{l=1}^{\infty} D_l M(\sigma_l, \sigma_k) R(\sigma_l) \\ = -\varepsilon_1 \sum_{i=1}^{\infty} E_i Q(v_i, \sigma_k) P_{v_i}^1(-\cos \alpha_2) \\ - \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{\infty} F_j Q(\mu_j, \sigma_k) P_{\mu_j}^1(\cos \alpha_2), \end{aligned} \quad (17)$$

где положено

$$R(x) = \varepsilon_0 \frac{P_{-\frac{1}{2}+ix}^1(\cos \alpha_2)}{P_{-\frac{1}{2}+ix}(\cos \alpha_2)} + \varepsilon_1 \frac{P_{-\frac{1}{2}+ix}^1(-\cos \alpha_2)}{P_{-\frac{1}{2}+ix}(-\cos \alpha_2)}.$$

Интеграл от произведения функций Лежандра вычисляется следующим образом [6,7]:

$$\begin{aligned} \int_y^1 P_{v_n}(x) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma_m}(x) dx = \frac{\sqrt{1-y^2}}{(v_n + \frac{1}{2})^2 + \sigma_m^2} \\ \times \left[P_{v_n}(y) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma_m}^1(y) - P_{v_n}^1(y) P_{-\frac{1}{2}+i\sigma_m}(y) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Третье из условий (10) на границе раздела областей $\beta = \beta_1$ ($\alpha_2 \leq \alpha \leq \pi$) с учетом (18) приводит к следующему набору линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} A_n \left(v_n + \frac{1}{2} \right) \left(\operatorname{cth} \left(v_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_1) \right. \\ \left. + \operatorname{cth} \left(v_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0) \right) N_{1,n} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{\tau_m}{(v_n + \frac{1}{2})^2 + \tau_m^2} \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{(-1)^k \sigma_k}{(v_n + \frac{1}{2})^2 + \sigma_k^2} \right) \sin(\pi - \alpha_2) P_{v_n}^1(-\cos \alpha_2) \\ = -E_n \frac{v_n + \frac{1}{2}}{\operatorname{sh}(v_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} N_{1,n}. \end{aligned} \quad (19)$$

Второе из граничных условий (1) и четвертое из условий (10) на границе раздела областей $\beta = \beta_1$ ($0 \leq \alpha \leq \alpha_2$) приводят к системе парных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_{\mu_n}(\cos \alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha}}, & 0 \leq \alpha < \alpha_1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) \left(\operatorname{cth} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_1) + \right. \\ \left. + \operatorname{cth} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0) \right) P_{\mu_n}(\cos \alpha) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} D_m (-1)^m \sigma_m \frac{P_{-\frac{1}{2} + i\sigma_m}(\cos \alpha)}{P_{-\frac{1}{2} + i\sigma_m}(\cos \alpha_2)} - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \tau_k \frac{P_{-\frac{1}{2} + i\tau_k}(\cos \alpha)}{P_{-\frac{1}{2} + i\tau_k}(\cos \alpha_2)} - \sum_{n=1}^{\infty} F_n \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) \times \\ \times \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0)} P_{\mu_n}(\cos \alpha) = 0, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \end{cases} \quad (20)$$

Положим на интервале $0 \leq \alpha \leq \alpha_2$

$$\begin{aligned} T(\alpha) = & \sum_{m=1}^{\infty} D_m (-1)^m \sigma_m \frac{P_{-\frac{1}{2} + i\sigma_m}(\cos \alpha)}{P_{-\frac{1}{2} + i\sigma_m}(\cos \alpha_2)} \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \tau_k \frac{P_{-\frac{1}{2} + i\tau_k}(\cos \alpha)}{P_{-\frac{1}{2} + i\tau_k}(\cos \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Разложим функцию $T(\alpha)$ по функциям Лежандра $P_{\mu_n}(\cos \alpha)$ на интервале $0 \leq \alpha \leq \alpha_2$

$$T(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) P_{\mu_n}(\cos \alpha). \quad (22)$$

Коэффициенты T_n в разложении (22) функции $T(\alpha)$ (21) с учетом интеграла (18) имеют вид

$$\begin{aligned} T_n = & \left(- \sum_{m=1}^{\infty} D_m \frac{(-1)^m \sigma_m}{\left(\mu_n + \frac{1}{2} \right)^2 + \sigma_k^2} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{\tau_k}{\left(\mu_n + \frac{1}{2} \right)^2 + \tau_k^2} \right) \frac{\sin \alpha_2 P_{\mu_n}^1(\cos \alpha_2)}{\left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) N_{2,n}}. \end{aligned} \quad (23)$$

Формулы (21)–(23) позволяют представить систему сумматорных рядов (20) в виде

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_{\mu_n}(\cos \alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha}}, & 0 \leq \alpha < \alpha_1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \left(\operatorname{cth} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{cth} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0) \right) + \right. \\ \left. + T_n - F_n \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0)} \right] \times \\ \times \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) P_{\mu_n}(\cos \alpha) = 0, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \end{cases} \quad (24)$$

Пусть

$$\begin{aligned} C_n \left(\operatorname{cth} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_1) + \operatorname{cth} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0) \right) \\ + T_n - F_n \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0)} = S_n. \end{aligned} \quad (25)$$

Использование новых коэффициентов (25) позволяет переписать систему (24) в виде

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - g_n) S_n P_{\mu_n}(\cos \alpha) = 2W(\alpha), & 0 \leq \alpha < \alpha_1, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) S_n P_{\mu_n}(\cos \alpha) = 0, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} g_n = & \frac{\exp \left[- \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_1) \right] \operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0)}{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_0)} \\ & + \frac{\exp \left[- \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0) \right] \operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_1)}{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_0)}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} W(\alpha) = & \frac{f_1(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha}} \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n - F_n \frac{1}{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0)} \right] \\ & \times \frac{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_1) \operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_1 - \beta_0)}{\operatorname{sh} \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) (\beta_2 - \beta_0)} P_{\mu_n}(\cos \alpha), \\ & 0 \leq \alpha \leq \alpha_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Парные уравнения (26) решаются подстановкой [4,5]

$$S_n = \gamma_n \int_{n=1}^{\infty} \phi(t) \cos \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) t dt, \quad \gamma_n = \frac{1}{\left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) N_{2,n}}, \quad (29)$$

где функция $\phi(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода

$$\phi(x) - \int_0^{\alpha_1} K(x, t) \phi(t) dt = F(x),$$

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{W(\alpha) \sin \alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos x)}} d\alpha, \quad 0 \leq x \leq \alpha_1. \quad (30)$$

Ядро уравнения (30) $K(x, t)$ является симметричным и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} K(x, t) = & \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(-\cos \alpha_2)}{P_{-\frac{1}{2} + i\tau}(\cos \alpha_2)} \frac{\operatorname{ch} x \tau \operatorname{ch} t \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} d\tau \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n g_n \cos \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) x \cos \left(\mu_n + \frac{1}{2} \right) t \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где коэффициенты g_n и γ_n определяются по формулам (27) и (29) соответственно.

Правая часть $F(x)$ уравнения Фредгольма (30) с учетом (28) имеет вид

$$F(x) = F_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n - F_n \frac{1}{\operatorname{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)} \right] \times \frac{\operatorname{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta_1) \operatorname{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_1 - \beta_0)}{\operatorname{sh}(\mu_n + \frac{1}{2})(\beta_2 - \beta_0)} \times \cos\left(\mu_n + \frac{1}{2}\right)x, \quad (32)$$

где

$$F_1(x) = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f_1(\alpha) \sin \alpha}{\sqrt{2(\cos \alpha - \cos x)} \sqrt{\operatorname{ch} \beta_1 - \cos \alpha}}. \quad (33)$$

Если на аноде ($0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \beta = \beta_1$) задается постоянное значение потенциала, в этом случае $f_1(\alpha) = V_1 = \text{const}$, то функция (33) вычисляется как

$$F_1(x) = V_1 \frac{\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta_1}{2}}{\operatorname{ch} \beta_1 - \cos x}. \quad (34)$$

Заключение

В данной работе рассмотрена диодная система, в которой катод представляет собой сферу на диэлектрической веретенообразной поверхности вращения, анод представляет собой часть сферической поверхности, подложка катода (граница системы) представляет собой сферическую поверхность или плоскость.

Таким образом, решалась граничная задача (1), решение которой представлялось в виде разложения потенциала по собственным функциям (2)–(5). При этом задача нахождения неизвестных коэффициентов в разложении потенциала сведена к решению системы уравнений, включающей в себя линейные алгебраические уравнения с постоянными коэффициентами (16), (17), (19), правые части которых определяются из (6)–(9), и уравнение Фредгольма 2-го рода (30) с правой частью, задаваемой формулами (32)–(34) и симметричными ядрами (31). Все геометрические размеры и граничные условия являются параметрами задачи.

Список литературы

- [1] Mahapatra D.Roy, Sinha N., Yeow J.T.W., Melnik R. // Appl. Surface Science. 2008. Vol. 255. P. 1959–1966.
- [2] Seong Chu Lim, Dae Sik Lee, Ha Kyu Choi, Il Ha Lee, Young Hee Lee. // Diamond and Related Materials. 2009. Vol. 18. P. 1435–1439.
- [3] Marwan S. Mousa // Surface and Interface Analysis. 2007. Vol. 39. P. 102–110.
- [4] Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.
- [5] Egorov N.V., Vinogradova E.M. // Vacuum. 2004. Vol. 72 (2). P. 103–111.

- [6] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
- [7] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.