

01;05;09

Электромагнитные волны в случайно-неоднородном джозефсоновском переходе

© Ю.И. Маньков

Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН,
660036 Красноярск, Россия
e-mail: mankov@iph.krasn.ru

(Поступило в Редакцию 17 января 2011 г.)

Теоретически исследованы модификация спектра и затухание джозефсоновских плазменных волн, обусловленные случайными неоднородностями критического тока через контакт сверхпроводников, и усредненная функция Грина таких возбуждений. В самосогласованном приближении, позволяющем учесть многократное рассеяние волн на неоднородностях, определены зависимости от волнового вектора k частоты и затухания усредненных волн, а также положения ν_m и ширины $\Delta\nu$ пика мнимой части образа Фурье усредненной функции Грина и изучена эволюция таких зависимостей при изменении корреляционного радиуса и относительных среднеквадратичных флуктуаций неоднородностей. В длинноволновой области спектра получено уменьшение частоты волны, вызванное неоднородностями, что качественно согласуется с поведением ν_m . Для затухания волны в случае „длинных“ неоднородностей установлены смена зависимости от k с линейной на обратно пропорциональную и его стремление к нулю при $k \rightarrow 0$, в то время как $\Delta\nu$ при малых k достигает максимальных значений, что обусловлено влиянием неоднородного уширения. В присутствии „коротких“ неоднородностей обнаружено сходство поведения затухания волны и $\Delta\nu$ как функций k . Полученные результаты сравниваются с данными численных расчетов.

Введение

В последнее время в джозефсоновских переходах интенсивно исследуются электромагнитные плазменноподобные возбуждения (джозефсоновские плазменные волны), частота которых в ряде сверхпроводящих материалов и структур составляет от сотен гигагерц до десятка терагерц, т. е. попадает в промежуточный диапазон частот между микроволновой и инфракрасной областями спектра, что делает перспективным техническое применение таких возбуждений [1,2]. Изучение джозефсоновских плазменных волн имеет большую историю (см. работы [3,4] и обзоры [1,2]), однако при их теоретических исследованиях предполагалось, что джозефсоновский переход однороден. В реальных джозефсоновских переходах контакт сверхпроводников не является идеальным, в нем имеются естественные неоднородности, которые могут быть обусловлены, например, пространственным изменением толщины и состава диэлектрического слоя, неоднородностью берегов контакта. Неоднородности в переходах могут создаваться и искусственно. Влияние неоднородностей на электромагнитные возбуждения в джозефсоновском переходе исследовано для солитонов (флаксонов), которые рассматривались в присутствии точечных [5–9] и периодических [10–14] неоднородностей, а также регулярных непериодических [15] и случайных [16] неоднородностей. Случайные неоднородности, несмотря на технологические достижения в изготовлении джозефсоновских переходов, неизбежно в них присутствуют, что делает важным учет таких неоднородностей при изучении электромагнитных возбуждений в переходах. В частности, подобные исследования актуальны для джозефсоновских плазменных

волн, поскольку, несмотря на возрастающий к ним интерес, влияние случайных неоднородностей на их характеристики, насколько мне известно, не изучалось. В работе исследованы спектр, затухание и функция Грина джозефсоновских плазменных волн в случайно-неоднородном переходе, определена их зависимость от стохастических параметров среды.

1. Модель. Волновое уравнение

Рассмотрим два одинаковых сверхпроводника (рис. 1), разделенных тонким диэлектрическим слоем толщиной w (сверхпроводящий туннельный переход). При длине когерентности сверхпроводника, много большей w , через контакт будет течь электрический джозефсоновский ток $j_z = j_c \sin \varphi$, где j_c — критический ток джозефсоновского перехода, φ — разность фаз волновых

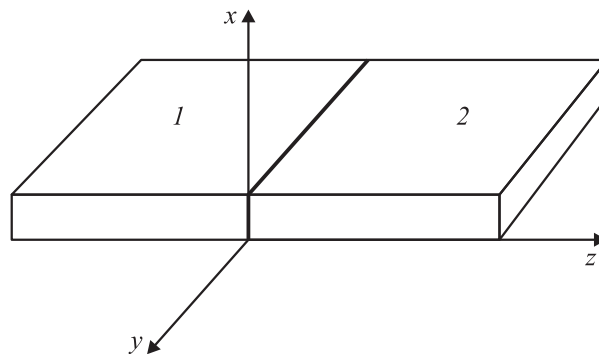


Рис. 1. Система координат. Начало отсчета по оси z совпадает с положением контакта сверхпроводников 1 и 2 параллельного координатной плоскости $xу$.

функций сверхпроводящих электронов между берегами перехода. Известно [3], что разность фаз φ в однородном джозефсоновском переходе при отсутствии в нем потерь описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\sin \varphi}{\lambda_J^2}. \quad (1)$$

Здесь t — время, $c_0 = c\sqrt{w/\varepsilon d}$ — скорость распространения электромагнитных волн в переходе (скорость Свихарда), c — скорость света в вакууме, ε — диэлектрическая проницаемость перехода, $d = w + 2\lambda$, где λ — глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, λ_J — джозефсоновская глубина проникновения. В дальнейшем будем рассматривать „длинный“ джозефсоновский переход: $L_x \ll \lambda_J \ll L_y$ при $L_x \gg \lambda$, где L_x, L_y — размеры образца в направлениях, соответствующих координатным осям (см. рис. 1). В такой модели разность фаз φ слабо зависит от переменной x , поэтому первым слагаемым в уравнении (1) можно пренебречь, в результате чего оно обращается в одномерное уравнение син-Гордона. В общем случае это уравнение имеет солитонное решение, а при малых φ оно описывает джозефсоновские плазменные волны.

В случайно-неоднородном джозефсоновском переходе физические величины в уравнении (1) являются случайными функциями координат. Чтобы упростить модель, следуя работе [16], будем предполагать, что скорость c_0 однородна, а флуктуирует джозефсоновская глубина проникновения

$$\lambda_J^{-2}(y) = \lambda_J^{-2}[1 + \gamma\rho(y)], \quad (2)$$

где $\rho(y)$ — однородная случайная функция с математическим ожиданием, равным нулю ($\langle \rho \rangle = 0$), и дисперсией, равной единице ($\langle \rho^2 \rangle = 1$), угловые скобки обозначают усреднение по ансамблю реализаций случайной функции $\rho(y)$; $\gamma = \Delta j_c / j_c$ — относительная среднеквадратичная флуктуация критического тока, $0 \leq \gamma < 1$.

Пренебрегая первым слагаемым в левой части уравнения (1), полагая в нем $\varphi \ll 1$ и проводя преобразование Фурье по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \varphi(\omega, y)}{\partial y^2} + [v - \eta\rho(y)]\varphi(\omega, y) = 0, \quad (3)$$

где $v = (\omega^2 - \omega_J^2)/c_0^2$, ω — частота волны, $\omega_J = c_0/\lambda_J$ — джозефсоновская плазменная частота, $\eta = \gamma/\lambda_J^2$. В однородном переходе ($\gamma = 0$) из уравнения (3) для спектра джозефсоновской плазменной волны имеем

$$v(k) = k^2, \quad (4)$$

где k — волновой вектор, $\varphi \propto \exp[i(ky - \omega t)]$. Этот закон дисперсии на рис. 2, 5 и 7 отображается прямой линией $Q = 0$. Выражение (4) приводит к известной формуле для спектра волны

$$\omega^2 = \omega_J^2 + c_0^2 k^2. \quad (5)$$

Это выражение формально аналогично спектру плазменных волн, однако в джозефсоновской плазменной волне, помимо продольной составляющей электрического поля E_y , отличны от нуля компоненты E_z и H_x .

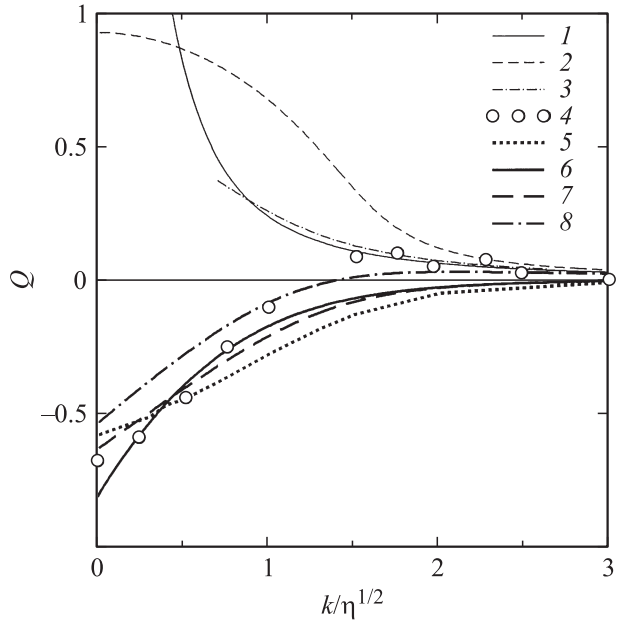


Рис. 2. Спектр v' джозефсоновских плазменных волн и положение v_m пика функции $|\bar{G}''(k, v)|$, $Q = (v' - k^2)/\eta$ (кривая 1), $Q = (v_m - k^2)/\eta$ (кривые 2-8); ссылки на формулы, которыми определяются v' и v_m , приведены в подписи к рис. 3; $k_c/\sqrt{\eta} = 0.5$.

2. Функция Грина, спектр и затухание волн

Чтобы исследовать джозефсоновские плазменные волны в случайно-неоднородном переходе ($\gamma \neq 0$), требуется использовать приближенное рассмотрение уравнения (3). Следует отметить, что уравнения, аналогичные (3), но с другими физическими величинами в качестве неизвестного и параметров, описывают распространение волн разной природы в различных случайно-неоднородных средах. Поэтому вначале кратко рассмотрим применявшиеся ранее приближения и подходы. Если воспользоваться теорией возмущений, предложенной в работе [17] и созвучной с теорией Рэлей–Шредингера, то можно получить для спектра и затухания волн простые аналитические выражения. Следуя этой теории, проведем в уравнении (3) преобразование Фурье по y и усредним его по ансамблю реализаций случайных функций. В результате после приближенного расщепления корреляторов для закона дисперсии усредненной волны во втором порядке по γ ($\gamma^2 \ll 1$) имеем

$$v(k) - k^2 = \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(k - k_1)}{k^2 - k_1^2} dk_1, \quad (6)$$

где $S(k)$ — спектральная плотность, связанная преобразованием Фурье с корреляционной функцией неоднородностей $K_\rho(r) = \langle \rho(y)\rho(y+r) \rangle$. Правая часть уравнения (6) определяет модификацию спектра усредненной волны и ее затухание. Рассмотрим экспоненциальный

спад корреляций

$$K_\rho(r) = \exp(-k_c|r|), \quad S(k) = \frac{k_c}{\pi(k_c^2 + k^2)}, \quad (7)$$

где k_c — корреляционное волновое число случайных неоднородностей. Функция $\rho(y)$ и спад корреляций предполагаются достаточно плавными (корреляционный радиус $r_c = 1/k_c \gg a$ — межатомного расстояния). Используя в выражении (6) формулу (7) и интегрируя, находим

$$v(k) - k^2 = \eta^2 \frac{1}{k_c^2 + 4k^2} - i\eta^2 \frac{k_c^2 + 2k^2}{kk_c(k_c^2 + 4k^2)}. \quad (8)$$

Такое выражение было получено в работе [17] для спектра и затухания упругих волн в среде с флуктуирующей плотностью: $v(k) = v' - iv''$, где $v' = \text{Re } v(k)$, $v'' = -\text{Im } v(k)$. Поскольку $v(k)$ — четная функция, здесь и далее во избежание излишней громоздкости рассматриваются только $k \geq 0$. Модификация спектра волны и ее удвоенное затухание, следующие из выражения (8), показаны на рис. 2 и 3 (кривые 1). При $k \ll k_c$ затухание волны $v'' \propto 1/k$, что накладывает ограничения на использование формулы (8).

Более последовательное описание усредненных волн в случайно-неоднородной среде дает приближение Крейчана [18] или, как его чаще называют, самосогласованное приближение [19], позволяющее учесть многократное рассеяние волн на неоднородностях. Согласно подходу, изложенному в этих работах, образ Фурье $\bar{G}(k, \nu)$

усредненной функции Грина, соответствующей уравнению (3), имеет вид

$$\bar{G}(k, \nu) = \frac{(2\pi)^{-1}}{\nu - k^2 - \Sigma(k, \nu)}, \quad (9)$$

где массовый оператор $\Sigma(k, \nu)$ определяется интегральным уравнением

$$\Sigma(k, \nu) = \eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(k - k_1) dk_1}{\nu - k_1^2 - \Sigma(k_1, \nu)}. \quad (10)$$

Простой вывод этой формулы предложен также в [20]. Функция Грина пропорциональна высокочастотной восприимчивости, а равенство нулю знаменателя функции $\bar{G}(k, \nu)$ дает закон дисперсии усредненной волны

$$v(k) = k^2 + \Sigma(k, v(k)). \quad (11)$$

Решение самосогласованного уравнения (10) возможно численно. Чтобы получить $\Sigma(k, \nu)$ в аналитическом виде, в частности с целью определения спектра и затухания волн, используют упрощения, которые направлены на то, чтобы сделать возможным вычисление интеграла в правой части уравнения (10).

Если в подынтегральном выражении в уравнении (10) положить $\Sigma(k_1, \nu) = 0$, что правомерно при $\eta^2 \ll 1$, то для массового оператора можно получить формулу в приближении Бурре [21], а образ Фурье усредненной функции Грина имеет вид

$$\bar{G}(k, \nu) = \frac{(2\pi)^{-1}}{\nu - k^2 - \frac{\eta^2}{(\sqrt{\nu + ik_c})^2 - k^2} \left(1 + \frac{ik_c}{\sqrt{\nu}}\right)}. \quad (12)$$

Приближение Бурре широко используется для исследования уравнений, аналогичных (3). Такой подход применялся к определению характеристик электромагнитных волн в случайно-неоднородной среде [22], спиновых волн в аморфных ферромагнетиках с флуктуирующим параметром анизотропии [20]. Если в подынтегральном выражении в уравнении (10) помимо условия $\Sigma(k_1, \nu) = 0$ использовать равенство $\nu = k^2$, то массовый оператор будет определяться правой частью формулы (6). В последнем случае массовый оператор зависит только от волнового вектора k , т.е. в соответствии с (11) модификацию спектра волны определяет $\Sigma'(k)$, а ее затухание — $\Sigma''(k)$: $v' - k^2 = \Sigma'(k)$, $v'' = -\Sigma''(k)$, где $\Sigma'(k) = \text{Re } \Sigma(k)$, $\Sigma''(k) = \text{Im } \Sigma(k)$. Напомню также, что при $\Sigma(k, \nu) \equiv \Sigma(k)$ из выражения (9) имеем $v_m = v'$ и $\Delta\nu = 2v''$, где v_m — значение частоты, при которой функция $|\bar{G}''(k, \nu)|$ достигает максимума при данном значении k или положение пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, а $\Delta\nu$ — ширина этого пика на половине его высоты; $\bar{G}''(k, \nu) = \text{Im } \bar{G}(k, \nu)$. Если массовый оператор является функцией как ν , так и k , то имеется, в целом, только качественное соответствие между v_m и v' , а также между $\Delta\nu$ и $2v''$. Такая ситуация возникает, в частности, в приближении Бурре.

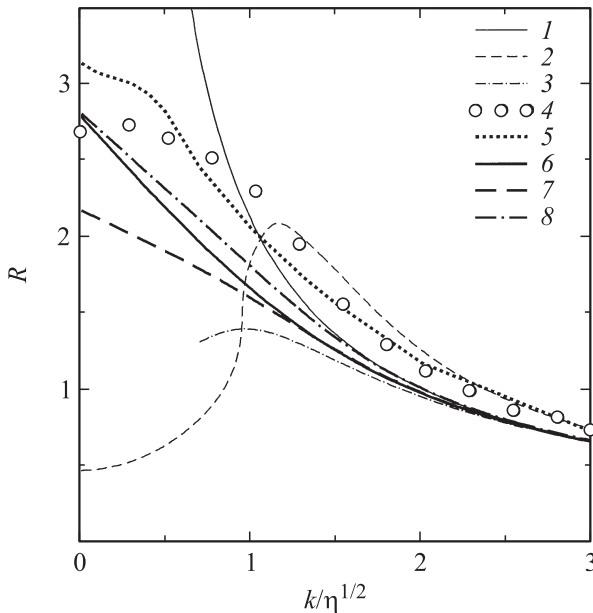


Рис. 3. Затухание v'' волны и ширина $\Delta\nu$ пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, $R = 2v''/\eta$ (кривая 1), $R = \Delta\nu/\eta$ (кривая 2–8); 1 — v', v'' определяются формулой (8); 2 и 3 — $v_m, \Delta\nu$ определяются соответственно формулами (12) и (13); 4 — $v_m, \Delta\nu$ получены в работе [20]; $v_m, \Delta\nu$ определяются формулами: 5 — (9), (16) и (18); 6 — (9) и (27); 7 — (9), (30) и (31); 8 — (9), (30) и (34); $k_c/\sqrt{\eta} = 0.5$.

Еще один способ упрощения уравнения (10) был предложен в работе [20]. Он заключается в замене в подынтегральном выражении уравнения (10) $\Sigma(k_1, \nu)$ на $\Sigma(k, \nu)$. В этом приближении при дополнительном условии $|\Sigma(k, \nu)| \ll \nu, k$ из выражений (9) и (10) следует

$$\bar{G}(k, \nu) = \frac{(2\pi)^{-1}}{\nu - k^2 - P + i(\eta^2 \frac{\sqrt{\nu+ik_c}}{\sqrt{\nu}} - P^2)^{1/2}}, \quad (13)$$

где $P = [(\sqrt{\nu} + ik_c)^2 - k^2]/2$. Положения ν_m пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, где $\bar{G}(k, \nu)$ определяются выражениями (12) и (13), представлены на рис. 2 (кривые 2, 3), а ширина пика $\Delta\nu$ — на рис. 3 (кривые 2, 3). Рис. 2 демонстрирует, что использование приближенных выражений (8), (12) и (13) для описания усредненных волн в случайно-неоднородной среде дает смещение пика $|\bar{G}''(k, \nu)|$ в область более высоких частот по сравнению с его положением при распространении волн в однородной среде. В то же время численные расчеты [20], выполненные в самосогласованном приближении, дают при малых значениях волнового вектора k , где модификация спектра наиболее велика, смещение ν_m в область более низких частот (последовательность точек 4 на рис. 2). При относительно больших k кривые 1–3 на рис. 2 хорошо аппроксимируют поведение последовательности точек 4. Последнее в равной мере относится к кривым 1–4 на рис. 3. Но при малых k ширина пика $\Delta\nu$, вычисленная в работе [20] (последовательность точек 4 на рис. 3), также существенно отличается от ее значений, следующих из выражений (8), (12) и (13) (кривые 1–3 на рис. 3). Таким образом, из сравнения усредненной функции Грина, полученной в результате численного решения интегрального уравнения (10), и приближенных формул (8), (12) и (13) можно заключить, что эти формулы недостаточны для корректного описания модификации спектра усредненных волн и их затухания. Следовательно, требуется поиск подхода, который позволит получить выражение для функции Грина, согласующееся с результатами численных расчетов, и даст возможность найти закон дисперсии усредненных волн в случайно-неоднородной среде.

Можно заметить, что согласно выражению (7), функция $S(k-k_1)$ в подынтегральном выражении в уравнении (10) достигает максимума при $k_1 = k$. Это указывает на то, что основной вклад в интеграл в уравнении (10) вносит окрестность точки $k_1 = k$. Поэтому знаменатель в подынтегральном выражении в (10) представим в виде степенного ряда

$$\nu - k_1^2 - \Sigma(k_1, \nu) = g - \left[2k + \frac{d\Sigma(k, \nu)}{dk} \right] (k_1 - k) - \left[1 + \frac{1}{2} \frac{d^2\Sigma(k, \nu)}{dk^2} \right] (k_1 - k)^2 - \dots, \quad (14)$$

где $g = \nu - k^2 - \Sigma(k, \nu)$. Подставим в выражение (10) разложение (14), ограничиваясь в нем первыми двумя членами, и проинтегрируем, используя для спектральной

плотности формулу (7) при $k_c \neq 0$. В результате получаем

$$\Sigma(k, \nu) = \frac{\eta^2}{g + ik_c \left[2k + \frac{d\Sigma(k, \nu)}{dk} \right]}. \quad (15)$$

Дифференциальное уравнение, которое следует из этого выражения, решить, к сожалению, не удалось, поэтому рассмотрим его как алгебраическое уравнение относительно $\Sigma(k, \nu)$. В этом случае формальное решение уравнения (15) имеет вид

$$\tilde{\Sigma}(k, \nu) = \frac{1}{2} (X + iK_c Y) - i \sqrt{1 - \frac{1}{4} (X + iK_c Y)^2}, \quad (16)$$

где введены безразмерные величины

$$Y = \frac{2k + \frac{d\Sigma(k, \nu)}{dk}}{\sqrt{\eta}}, \quad K = \frac{k}{\sqrt{\eta}}, \quad K_c = \frac{k_c}{\sqrt{\eta}},$$

$$\tilde{\Sigma}(k, \nu) = \frac{\Sigma(k, \nu)}{\eta}, \quad X = \frac{\nu - k^2}{\eta}. \quad (17)$$

Выражение (15) получено при условии $\text{Im}(\tilde{g}/Y) > 0$, где $\tilde{g} = g/\eta$. Чтобы найти неизвестную величину Y , входящую в выражение (16), продифференцируем его по k . Тогда с учетом определения Y , полагая, что $|d^2\Sigma(k, \nu)/dk^2| \ll 1$, имеем

$$Y = K + iK_c - \frac{i}{2} \frac{(X + iK_c Y)(K - iK_c)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} (X + iK_c Y)^2}}. \quad (18)$$

Подставляя численное решение этого уравнения относительно Y в выражение (16), получаем значения для массового оператора, используя которые в (9), определяем положение ν_m и ширину $\Delta\nu$ пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, показанные соответственно, на рис. 2 и 3 кривыми 5. Эти рисунки демонстрируют близость зависимостей как ν_m , так и $\Delta\nu$ от k , определенных с использованием выражений (9), (16) и (18) и вычисленных в работе [20] (сравни последовательности точек 4 и кривые 5 на рис. 2 и 3). Из формул (16) и (18) имеем $|d^2\Sigma(k, \nu)/dk^2|/2 < 0.3$. Рассмотрим теперь важный случай однородных колебаний ($k = 0$). На рис. 4 представлены зависимость ν_m от корреляционного волнового числа k_c , которая получена в работе [20] (последовательность точек 1), а также зависимость ν_m от k_c , следующая из выражений (9), (16) и (18) (кривая 2). Можно отметить совпадение кривых 1 и 2 на рис. 4 при $K_c \leq 0.4$ и качественное согласие их хода в остальной области значений k_c . Близость численных результатов для функции Грина, полученных в рамках развиваемого здесь подхода и в работе [20], делает обоснованным использование выражений (16) и (18) для определения спектра усредненных волн и их затухания, а также свидетельствует о том, что, используя в выражении (10) разложение (14), мы тем не менее остаемся в границах самосогласованного приближения.

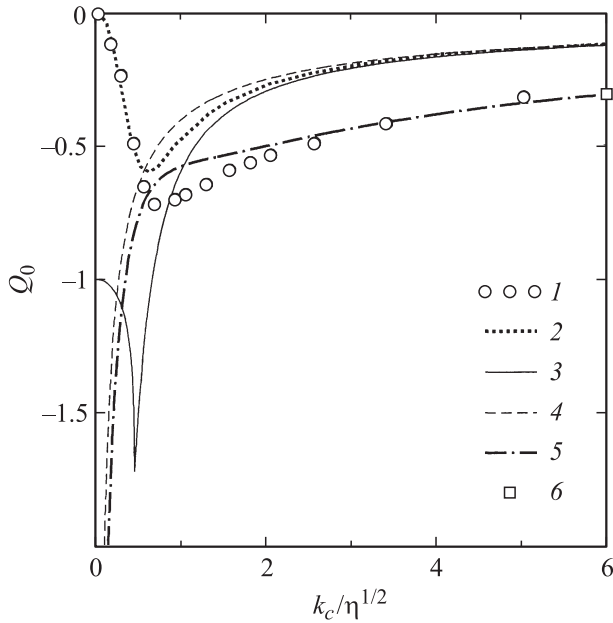


Рис. 4. Положение ν_m пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$ и частота ν' однородных колебаний, $Q_0 = \nu_m/\eta$ (кривые 1, 2, 4–6), $Q_0 = \nu'/\eta$ (кривая 3); $k = 0$; 1 — ν_m получено в работе [20]; 2 — ν_m определяется формулами (9), (16) и (18); 3 — ν' определяется формулой (20); 4 — ν_m определяется формулами (9), (30) и (31); 5 — ν_m определяется формулой (35); 6 — положение точки определено по формулам (9) и (10).

Перейдем к вычислению спектра и затухания волн. Формула (11) в обозначениях (17) имеет вид $\tilde{\Sigma}(k, \nu) = X$. Используя это равенство в выражении (16), получим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными X и Y , из которой для X следует кубическое уравнение

$$X^3 + \frac{1}{2K_c^2} X^2 + \frac{iK}{K_c} X - \frac{1}{2K_c^2} = 0. \quad (19)$$

Физический смысл имеет только одно его решение

$$X = \frac{1}{12K_c^2} \left[\frac{(1-i\sqrt{3})(12iKK_c^3-1)}{D_1^{1/3}} - (1+i\sqrt{3})D_1^{1/3} - 2 \right], \quad (20)$$

где

$$D_1 = 18K_c^3(3K_c + iK) - 1 + 6\sqrt{3}K_c^2 \times \sqrt{K_c^2(K^2 + 18iKK_c + 27K_c^2) - 16iK^3K_c^5 - 1}. \quad (21)$$

Спектр усредненной волны ν' и ее удвоенное затухание $2\nu''$, которые следуют из выражения (20), показаны при $K_c = 0.3$ кривыми 6 соответственно на рис. 5 и 6, а при $K_c = 0.5$ — кривыми 6 на рис. 7 и 8. Таким образом, получено уменьшение частоты усредненных волн в случайно-неоднородной среде по сравнению с ее значением в однородном переходе, что коррелирует со смещением в область меньших частот положения ν_m

пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, определенного численно из выражений (9) и (10) (последовательности точек 4 на

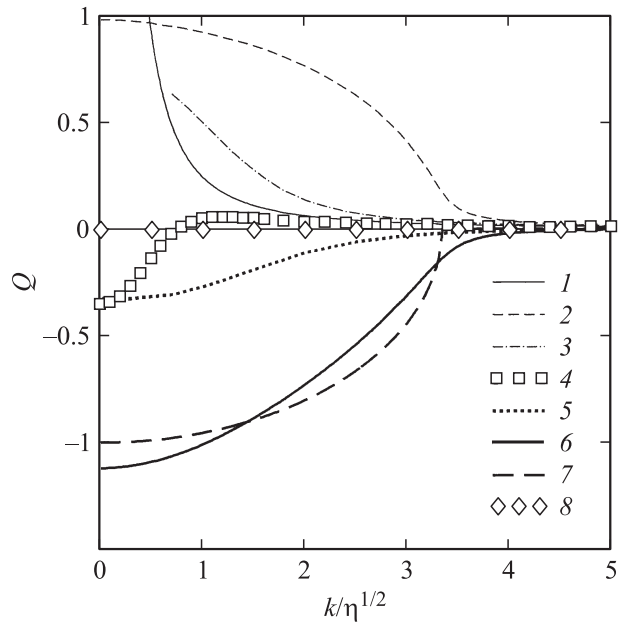


Рис. 5. Спектр ν' джозефсоновских плазменных волн и положение ν_m пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, $Q = (\nu' - k^2)/\eta$ (кривые 1–3, 6, 7), $Q = (\nu_m - k^2)/\eta$ (кривые 4, 5 и 8); ссылки на формулы, которыми определяются ν' и ν_m , приведены в подписи к рис. 6; $k_c/\sqrt{\eta} = 0.3$.

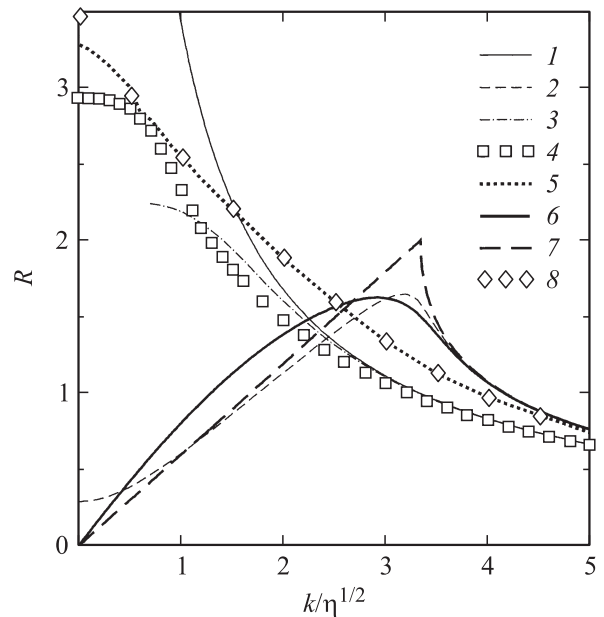


Рис. 6. Затухание ν'' волны и ширина $\Delta\nu$ пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, $R = 2\nu''/\eta$ (кривые 1–3, 6, 7), $R = \Delta\nu/\eta$ (кривые 4, 5, 8); 1–3 — ν' , ν'' определяются формулами (8), (12) и (13); 4 — ν_m , $\Delta\nu$ определяются формулами (9) и (10); 5 — ν_m , $\Delta\nu$ определяются формулами (9), (16) и (18); 6 и 7 — ν' , ν'' определяются соответственно формулами (20) и (37); 8 — ν_m , $\Delta\nu$ определяются формулами (9), (15) и производной по k уравнения (10); $k_c/\sqrt{\eta} = 0.3$.

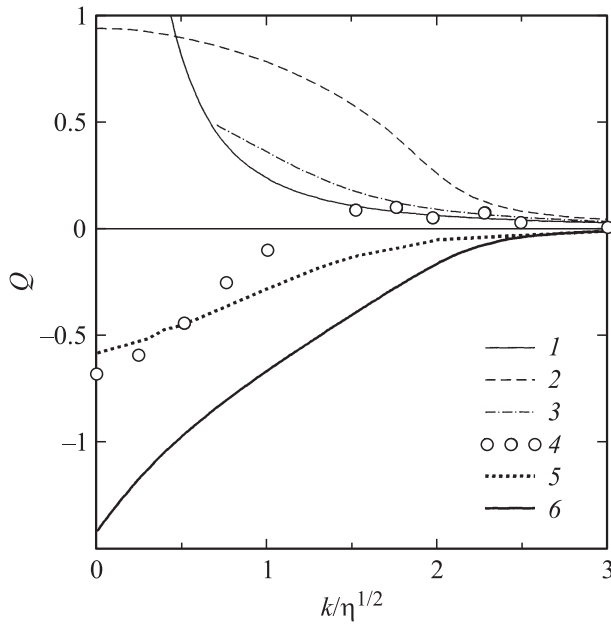


Рис. 7. Спектр ν' джозефсоновских плазменных волн и положение ν_m пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, $Q = (\nu' - k^2)/\eta$ (кривые 1–3, 6, 7), $Q = (\nu_m - k^2)/\eta$ (кривые 4, 5); ссылки на формулы, которыми определяются ν' и ν_m , приведены в подписи к рис. 8; $k_c/\sqrt{\eta} = 0.5$.

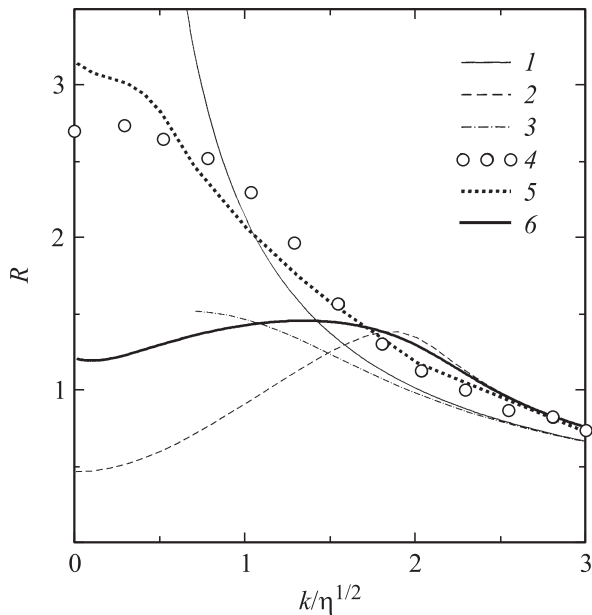


Рис. 8. Затухание ν'' волны и ширина $\Delta\nu$ пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$, $R = 2\nu''/\eta$ (кривые 1–3, 6, 7), $R = \Delta\nu/\eta$ (кривые 4, 5); 1–3 — ν', ν'' определяются формулами (8), (12), (13); 4 — $\nu_m, \Delta\nu$ получены в работе [20]; 5 — $\nu_m, \Delta\nu$ определяются формулами (9), (16) и (18); 6 — ν', ν'' определяются формулой (20); $k_c/\sqrt{\eta} = 0.5$.

рис. 5 и 7) и на основе формул (9), (16) и (18) (кривые 5 на рис. 5 и 7). В то же время модификация спектра, которая следует из приближенных формул (8), (12)

и (13), полученных по теории возмущений, и представлена соответственно кривыми 1, 2 и 3 на рис. 5 и 7, заключается в увеличении частоты усредненной волны. Отмечу, что при относительно большой модификации спектра в длинноволновой области, где $(\nu' - k^2)/\eta < -1$, спектральная кривая находится в пределах ширины $\Delta\nu$ пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$. Зависимость $\Delta\nu$ от k , полученная численно из выражений (9) и (10), представлена при $K_c = 0.3$ и при $K_c = 0.5$ соответственно на рис. 6 и 8 последовательностями точек 4, а кривые 5 на этих же рисунках отражают поведение $\Delta\nu$, вытекающие из формул (9), (16) и (18). Из сравнения хода кривых 6 на рис. 6 и 8 следует, что затухание усредненной волны существенно трансформируется при небольшом изменении K_c . Математически это обусловлено тем, что подкоренное выражение в формуле (21) с увеличением K_c меняет знак. Так, для однородных колебаний ($K = 0$) смена знака происходит при $K_c = K_{c0} \equiv 27^{-1/4} \approx 0.4387$, т.е. при $k_c = k_{c0}$, где $k_{c0} = K_{c0}\sqrt{\gamma}/\lambda_J$ — критическое значение корреляционного волнового числа. В результате, если $K_c < K_{c0}$, то затухание стремится к нулю при $K \rightarrow 0$, а если $K_c > K_{c0}$, то при $K \rightarrow 0$ затухание остается конечным. Из первого неравенства вытекает условие $r_c \gg \lambda_J$, при котором влияние неоднородностей на распространение волн невелико, если же r_c оказывается меньше или порядка λ_J , то влияние неоднородностей возрастает, а следовательно, увеличивается затухание усредненных волн. Согласно рис. 6 и 8, ширина $\Delta\nu$ пика и удвоенное затухание волны $2\nu''$ имеют разную зависимость от k (сравни кривые 5 и 6 на этих рисунках). Это обусловлено тем, что $\Delta\nu$, вычисленная в самосоглазованном приближении, как отмечалось в работе [20], определяется помимо затухания волн неоднородным (флуктуационным) уширением, обусловленным стохастическим разбросом значений случайно-неоднородного параметра. Поэтому кривые 4 и 5 на рис. 6 и 8 отражают совместное влияние этих двух механизмов. Оценить вклад каждого из них дает возможность полученное здесь затухание усредненной волны, которое следует из выражения (20). Сравнивая $\Delta\nu$ (последовательность точек 4 и кривая 5 на рис. 6 и 8) с $2\nu''$ (кривая 6 на рис. 6 и 8), можно заключить, что при малых k_c ширина $\Delta\nu$ пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$ в области $K \ll 1$ в основном определяется неоднородным уширением, а при $K \gg 1$ главным становится вклад затухания волны. Небольшое превышение $2\nu''$ над $\Delta\nu$ обусловлено, по-видимому, теми приближениями, которые использовались при выводе выражения (18). Отметим, что зависимости $\Delta\nu$ и $2\nu''$ от k , полученные в приближении Бурре, тоже различны (см. кривые 2 на рис. 3 и 8).

В предельных случаях выражение (20), описывающее спектр и затухание усредненных джозефсоновских плазменных волн, упрощается. Отметим, что при $\gamma \rightarrow 0$ из (20) следует равенство $X = 0$, раскрывая которое получаем формулы (4) и (5) для спектра волн в однородной среде. Если $\gamma \neq 0$ и $K \ll 1$, $K_c \ll 1$, то из выражения (20), используя определения (17), имеем

$$\omega^2 \approx \omega_J^2(1 - \gamma - k_c^2\lambda_J^2) + c_0^2k^2 - ic_0^2kk_c. \quad (22)$$

Здесь $\omega = \omega' - i\omega''$, где ω' и ω'' описывают соответственно спектр и затухание усредненной волны. Поскольку неравенство $K_c \ll 1$ эквивалентно условию $k_c^2 \lambda_j^2 \ll \gamma$, то из формулы (22) вытекает, что уменьшение щели в спектре волн определяется параметром γ . В то же время затухание волн является линейной функцией k и k_c . При $K \ll 1$ и $K_c \gg 1$ из выражения (20) имеем

$$X \approx -\frac{1+i\sqrt{3}}{(4K_c)^{2/3}} + \frac{\sqrt{3}+i}{3(4K_c)^{1/3}} K + \frac{2^{1/3}(1-i\sqrt{3})}{54K_c^{4/3}} K^2, \quad (23)$$

откуда, возвращаясь к размерным величинам, для спектра и затухания волн получаем

$$\omega^2 \approx \omega_j^2 \left[1 - \gamma^{4/3} \frac{1+i\sqrt{3}}{(4\lambda_j k_c)^{2/3}} + \gamma^{2/3} \frac{\sqrt{3}+i}{3(4\lambda_j k_c)^{1/3}} \lambda_j k \right] + \left[1 + \gamma^{2/3} \frac{2^{1/3}(1-i\sqrt{3})}{54(\lambda_j k_c)^{4/3}} \right] c_0^2 k^2. \quad (24)$$

Из формулы (24) следует, что в случайно-неоднородном переходе при больших k_c затухание волны $\propto 1/k_c^{2/3}$. Такая зависимость была выделена численно в работе [20] для ширины линии ферромагнитного резонанса, а ранее предсказывалась методами масштабных преобразований (см. ссылки [20]). Наконец, при $k \gg k_c$ из выражения (20) с учетом определения (17) находим

$$\omega^2 \approx \omega_j^2 \left(1 - \frac{\gamma^4}{k^4 k_c^2 \lambda_j^6} - i \frac{\gamma^2}{2k k_c \lambda_j^2} \right) + c_0^2 k^2. \quad (25)$$

Затухание волны, следующее из выражения (25), совпадает с затуханием, которое следует в пределе больших k из формулы (8), полученной по теории возмущений. Формулы (22), (24) и (25) показывают, что использование в уравнении (10) первых двух членов разложения (14) дает при любых значениях волнового вектора уменьшение частоты усредненных волн по сравнению с ее величиной в однородном переходе. Зависимость спектра волн от корреляционного волнового числа исследуем более подробно для однородных ($k=0$) колебаний. На рис. 4 кривой 3 представлена частота ν' усредненной волны как функция k_c , которую получаем из выражения (20) при $K=0$. Острый минимум на этой кривой приходится на значение $K_c = K_{c0}$. Из рис. 4 видно, что при больших K_c кривые 2 и 3 совпадают, т. е. в этом пределе $\nu' \approx \nu_m$.

Совмещение спектра волны с положением пика мнимой части образа Фурье функции Грина возникает, как отмечалось выше, при слабой зависимости массового оператора от частоты. Действительно, из уравнения (15) для массового оператора следует, что при больших k_c второе слагаемое в знаменателе правой части этого уравнения может оказаться много больше первого слагаемого, в результате чего зависимость от частоты $\Sigma(k, \nu)$ ослабляется. Реализацию такой ситуации следует ожидать прежде всего при тех значениях переменных в уравнении (15), которые отвечают минимальной величине

функции g . Поскольку $g = \bar{G}^{-1}(k, \nu)$, то g мало при значениях k и ν , соответствующих большой величине функции Грина. В частности, на эту область изменения переменных приходится такие важные характеристики функции Грина, как положение ν_m пика $|\bar{G}''(k, \nu)|$ и положение точек, определяющих его ширину $\Delta\nu$. Все это дает основание к тому, чтобы при больших k_c в знаменателе уравнения (15) пренебречь первым слагаемым по сравнению со вторым. В этом случае массовый оператор не зависит от частоты ($\Sigma(\nu, k) \approx \Sigma(k)$), а из выражения (15) следует дифференциальное уравнение

$$\Sigma(k) \frac{d\Sigma(k)}{dk} + 2k\Sigma(k) + \frac{i\eta^2}{k_c} = 0, \quad (26)$$

которое приводится к специальному уравнению Риккати. Частное решение этого уравнения, полученное при условии $\Sigma(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, имеет вид

$$K = -i\sqrt{\xi} \frac{H_{-2/3}^{(1)}(s)}{H_{1/3}^{(1)}(s)}, \quad (27)$$

где $\xi = \tilde{\Sigma}(k) + K^2$, $s = 2K_c \xi^{3/2}/3$, $H_a^{(1)}(s)$ — функция Ханкеля. Численное решение уравнения (27) относительно $\tilde{\Sigma}(k)$ позволяет найти зависимости ν_m и $\Delta\nu$ от k , представленные соответственно на рис. 2 и 3 кривыми б. Из сравнения кривых б и последовательностей точек 4 на этих рисунках можно заключить, что имеется качественное согласие в поведении ν_m и $\Delta\nu$ как функций k , определенных на основе выражения (27) и в работе [20]. При этом ν_m и $\Delta\nu$ непосредственно выражаются через массовый оператор: $(\nu_m - k^2)/\eta = \tilde{\Sigma}'(k)$, $\Delta\nu/\eta = -2\tilde{\Sigma}''(k)$. Раскладывая правую часть выражения (27) в степенной ряд при малых значениях аргумента s и решая получившееся алгебраическое уравнение относительно $\tilde{\Sigma}(k)$ при $K \ll 1$, имеем

$$\tilde{\Sigma}(k) \approx \frac{A(1+i\sqrt{3})}{K_c^{2/3}} + \frac{2\pi^2(\sqrt{3}+i)}{3^{1/6}\Gamma(2/3)bK_c^{1/3}} K. \quad (28)$$

Здесь

$$A = \frac{3^{5/3}\Gamma(2/3)\pi[b - 3\sqrt{3}\Gamma^3(2/3)]}{2(4\sqrt{3}\pi^3 - b^2)} \approx -0.5553,$$

где $b = [16\sqrt{3}\pi^3 - 8\Gamma^6(2/3)]^{1/2}$, $\Gamma(\tau)$ — гамма-функция. Правая часть формулы (28) с точностью до константы совпадает с первыми двумя слагаемыми в правой части выражения (23). Такое совпадение становится полным, если к уравнению (26) применить использованный при решении уравнения (15) приближенный метод. Следуя ему, выразим из (26) $\Sigma(k)$ и продифференцируем полученное выражение по k . Принимая, что $|d^2\Sigma(k)/dk^2|/2 \ll 1$, исключаем вторую производную, в результате чего для Y имеем кубическое уравнение

$$Y^3 - 2KY^2 - \frac{2i}{K_c} = 0, \quad (29)$$

только одно решение которого представляет физический интерес

$$Y = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{D}{K_c} \right)^{1/3} + 4K^2 \left(\frac{K_c}{D} \right)^{1/3} + 2K \right], \quad (30)$$

где

$$D = 8K^3 K_c + 27i + 3i \sqrt{3(27 - 16iK^3 K_c)}.$$

Таким образом, согласно уравнению (26), с учетом определения (17) имеем

$$\tilde{\Sigma}(k) = -\frac{i}{K_c Y}, \quad (31)$$

где Y описывается формулой (30). Из выражения (31) находим, что $|d^2 \Sigma(k)/dk^2|/2 < 0.2$ при $K_c \geq 0.5$. Графики зависимостей ν_m и $\Delta \nu$ от k , где $\tilde{\Sigma}(k)$ определяется выражением (31), показаны соответственно на рис. 2 и 3 кривыми 7. Поведение этих функций также качественно совпадает с результатами работы [20] (последовательность точек 4 на рис. 2 и 3). При $K \ll 1$ из выражений (30) и (31) имеем

$$\tilde{\Sigma}(k) \approx -\frac{1+i\sqrt{3}}{(4K_c)^{2/3}} + \frac{\sqrt{3}+i}{3(4K_c)^{1/3}} K + O(K^3). \quad (32)$$

Сравнивая формулы (23) и (32), видим, что первые два слагаемые в их правых частях совпадают. В случае однородных колебаний зависимость ν_m от k_c , которая следует из выражений (30) и (31), показана на рис. 4 кривой 4. Отметим близость кривых 2–4 на этом рисунке при $K_c \geq 1.5$, а также их полное совпадение при $K_c \gg 1$. Все это подтверждает правомерность использования уравнения (26) вместо уравнения (15) в области больших K_c . Вместе с тем кривые 2–4 на рис. 4 демонстрируют при $K_c \geq 1$ отклонение отображаемых ими зависимостей от численных результатов работы [20] (последовательность точек 1 на этом же рисунке). Кроме того, для полученных здесь зависимостей ν_m от k при любых значениях k справедливо неравенство $\nu_m - k^2 < 0$, в то время как численные расчеты в [20] дают изменение знака разности $\nu_m - k^2$ при увеличении k .

Эти несоответствия могут быть устранены, если в знаменателе подынтегрального выражения в уравнении (10) использовать три члена разложения (14). Подставляя их в уравнение (10) и полагая, что $|d^2 \Sigma(k)/dk^2|/2 \ll 1$, после интегрирования имеем

$$\tilde{\Sigma}(k, \nu) = \frac{1}{\tilde{g} - iYK_c + K_c^2} - \frac{2iK_c}{(K_c^2 + \kappa_+^2)(\kappa_+ - \kappa_-)}, \quad (33)$$

где

$$\kappa_{\pm} = -Y/2 \pm \sqrt{Y^2/4 + \tilde{g}}; \quad \text{Im}(\tilde{g}/Y) > 0, \quad \text{Im}(Y) > 0.$$

Решить это уравнение затруднительно, однако при $K_c \gg 1$, когда справедливы неравенства $4\tilde{g}/Y^2 \ll 1$ и $\tilde{g}/K_c Y \ll 1$, выражение (33) можно упростить, как это

было сделано выше в отношении уравнения (15). Итак, в области больших K_c выражение (33) приводится к виду

$$\tilde{\Sigma}(k) \approx -\frac{i}{K_c Y} + \frac{1}{Y(Y + iK_c)}. \quad (34)$$

Эта формула не содержит зависимости от частоты ν , как и выражения (26), (31), которые следуют из уравнения (15) при условии $K_c \gg 1$. Первое слагаемое в выражении (34) может быть получено при учете только двух членов разложения (14) в уравнении (10) и совпадает с правой частью равенства (31), а второе слагаемое появляется при учете в (10) трех членов разложения (14). Если в выражении (34) рассматривать второе слагаемое как малую добавку к первому слагаемому и воспользоваться для Y формулой (30), то для ν_m и $\Delta \nu$ получаем зависимости от волнового вектора k , представленные соответственно на рис. 2 и 3 кривыми 8. Таким образом, при учете в уравнении (10) трех членов разложения (14) функция $\nu_m - k^2$ оказывается знакопеременной и качественно согласуется во всей области изменения k с результатами численного расчета (последовательность точек 4 на рис. 2), полученными в работе [20]. В случае однородных колебаний зависимость ν_m от k_c , которая следует из (34) при использовании для Y выражения $Y = -(\sqrt{3} + i)/4AK_c^{1/3}$, вытекающего из формулы (28) при $K = 0$, имеет вид

$$\frac{\nu_m}{\eta} = \frac{A(8A^2 K_c^{8/3} + 1)}{K_c^{2/3} (2AK_c^{4/3} + 1)^2} \quad (35)$$

и показана на рис. 4 кривой 5; $A \approx -0.5553$. Видно, что при $K_c \gg 1$ имеется совпадение (сравни последовательность точек 1 и кривую 5 на рис. 4) полученных здесь результатов с численными данными работы [20]. Вместе с тем кривая 5 хорошо аппроксимирует последовательность точек 1 уже при $K_c \geq 1$.

Спектр и затухание джозефсоновских плазменных волн при $K_c \gg 1$ получаем из выражения (11), в котором для массового оператора используется формула (34). Поскольку $\tilde{\Sigma}(k)$ не зависит от частоты, то имеем $(\nu' - k^2)/\eta = \tilde{\Sigma}'(k)$, $\nu''/\eta = -\tilde{\Sigma}''(k)$. При $K \gg 1$ из выражений (11) и (34), учитывая определения (17), для спектра и затухания волн находим

$$\omega^2 \approx \omega_J^2 \left[1 + \gamma^2 \frac{1}{4(k\lambda_J)^2} - \gamma^2 \frac{i}{2kk_c\lambda_J^2} \right] + (kc_0)^2, \quad (36)$$

что совпадает с асимптотикой выражения (8) при $k \gg k_c$.

Заключение

В работе использована простая одномерная модель джозефсоновского перехода, позволившая развить метод исследования джозефсоновских плазменных волн и проследить основные закономерности влияния на их спектр и затухание случайных неоднородностей. Для

анализа уравнения (3), описывающего такие волны в случайно-неоднородном переходе, было использовано самосогласованное приближение, учитывающее многократное рассеяние волн на неоднородностях, согласно которому образ Фурье (9) усредненной функции Грина выражается через массовый оператор, подчиняющийся интегральному уравнению (10). Решение этого уравнения описывает вклад в функцию Грина джозефсоновских плазменных волн и стохастического разброса случайно-неоднородного параметра $\lambda_J^{-2}(y)$. Последнее в основном затрагивает ширину $\Delta\nu$ пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$ и известно как неоднородное (флуктуационное) уширение. Поэтому зависимости ν_m и $\Delta\nu$ от k , которые вытекают из численного решения уравнения (10), нельзя безоговорочно использовать для определения спектра ν' и затухания ν'' усредненной волны. Для поиска закона дисперсии усредненных волн было использовано упрощение уравнения (10), обеспечивающее малое нарушение его самосогласованности. Критерием допустимости такого нарушения стало соответствие ν_m и $\Delta\nu$, полученных численно из выражений (9), (10) и определенных с использованием упрощающих допущений в уравнении (10). Этому критерию не удовлетворяют приближения, учитывающие первые порядки теории возмущений (сравни кривые 1–3 и последовательность точек 4 на рис. 2 и 3), что заставило искать другие подходы к упрощению уравнения (10). Анализ этого уравнения позволил сделать вывод, что основной вклад в интеграл в его правой части дает окрестность точки $k_1 = k$. Поэтому знаменатель в подынтегральном выражении в уравнении (10) раскладывался в степенной ряд в окрестности этой точки. Использование двух первых членов разложения (14) дало возможность получить при $k_c \leq \sqrt{\eta}/2$ качественное согласие зависимостей ν_m от волнового вектора k , определенных в работе [20] и из выражений (9), (16), (18) (сравни последовательности точек 4 и кривые 5 на рис. 2 и 7), а также зависимостей $\Delta\nu$ от k (сравни последовательности точек 4 и кривые 5 на рис. 3 и 8). Что касается зависимости ν_m от k_c , которая исследовалась для однородных колебаний ($k = 0$), то при $k_c \leq 0.4\sqrt{\eta}$ выражения (9), (16), (18) дают для нее результаты, совпадающие с данными работы [20] (последовательность точек 1 и кривая 2 на рис. 4). Указанные соответствия позволили, используя (16) и (18), найти спектр ν' и затухание ν'' усредненной волны (выражение (20)). Можно отметить качественное согласие зависимостей ν' и ν_m от k , полученных соответственно на основе выражения (20) и формул (9), (16), (18) (кривые 5 и 6 на рис. 5 и 7), и их совпадение при $k \gg \sqrt{\eta}$. Для однородных колебаний ($k = 0$) зависимости ν' и ν_m от k_c , полученные на основе того же набора формул, качественно согласуются, совпадая между собой при $k_c \gg \sqrt{\eta}$ (кривые 2 и 3 на рис. 4). В то же время законы изменения ν'' и $\Delta\nu$, полученные соответственно из выражения (20) и формул (9), (16), (18), существенно отличаются друг от друга при $k < \eta/k_c$, $k_c < K_{c0}\sqrt{\eta}$, где $K_{c0} \approx 0.4387$. В этой области значений k и k_c затухание волны

$\nu'' = 0$ при $k = 0$ и линейно возрастает с увеличением k , проходя через максимум при $k \approx \eta/k_c$ (кривая 6 на рис. 6), а $\Delta\nu$ монотонно убывает с ростом k (кривая 5 на рис. 6). При $k_c > K_{c0}\sqrt{\eta}$ немонотонная зависимость ν'' от k сохраняется, но в этом случае $\nu'' \neq 0$ при $k = 0$ (кривая 5 на рис. 8). Столь существенное изменение затухания однородных колебаний при малом изменении k_c в окрестности критического значения $k_{c0} = K_{c0}\sqrt{\eta}/\lambda_J$ обусловлено сменой соотношения между корреляционным радиусом r_c и λ_J , которое определяет степень влияния неоднородностей на распространение волн. По мере роста k_c в области $k_c > K_{c0}\sqrt{\eta}$ зависимость ν'' от k переходит в монотонную с линейным спадом при $k \ll \sqrt{\eta}$ и $k_c \gg \sqrt{\eta}$ (см. формулы (23) и (24)). В пределе $k \gg \sqrt{\eta}$ спектр и затухание усредненных волн определяются выражением (25). Совпадение ν_m и ν' при $k_c \gg \sqrt{\eta}$ в случае однородных колебаний (кривые 2 и 3 на рис. 4) позволило сделать вывод о слабой зависимости массового оператора от частоты. Этот факт дал возможность пренебречь в знаменателе уравнения (15) первым слагаемым, получить дифференциальное уравнение (26) и найти его решение (27), на основе которого был вычислен массовый оператор $\bar{\Sigma}(k)$ и определено поведение ν_m и $\Delta\nu$ в зависимости от k , представленное соответственно на рис. 2 и 3 кривыми 6. Из приближенного решения уравнения (26) было получено для $\bar{\Sigma}(k)$ аналитическое выражение (31), которое позволило построить графики ν_m и $\Delta\nu$, показанные соответственно на рис. 2 и 3 кривыми 7. Чтобы устранить расхождение аналитических и численных результатов при $k \gg \sqrt{\eta}$, $k_c \gg \sqrt{\eta}$ (сравни последовательность точек 4 с кривыми 5–7 на рис. 2 и последовательность точек 1 с кривыми 2–4 на рис. 4), были учтены три члена разложения (14) в подынтегральном выражении уравнения (10). В этом случае интегрирование в (10) позволило получить для массового оператора выражение (33), которое в области $K_c \gg 1$ приводится к формуле (34). На ее основе получены зависимости ν_m и $\Delta\nu$ от k (рис. 2 и 3 кривые 8). Для однородных колебаний из выражений (34) и (28) следует формула (35), используя которую получена зависимость ν_m от k_c , показанная на рис. 4 кривой 5 и совпадающая с численными данными работы [20].

Отмечу, что производную $d\Sigma(k, \nu)/dk$, входящую в выражение (15), можно найти дифференцируя уравнение (10) по k и используя при взятии интеграла в правой части полученного выражения разложение (14). Однако двукратное применение этого разложения делает приближение более грубым. В частности, при таком подходе $\nu_m - k^2 = 0$ (последовательность точек 8 на рис. 5), что совпадает с численными результатами лишь в пределе $k_c \ll \sqrt{\eta}$. Тем не менее хорошее согласие $\Delta\nu$, вычисленных в этом подходе (последовательность точек 8 на рис. 6) и с использованием формул (9), (16) и (18) (кривая 5 на рис. 6), дает основание для определения закона дисперсии усредненных волн. Итак, при $k_c \ll \sqrt{\eta}$, используя в выражении (15) производную $d\Sigma(k, \nu)/dk$,

вычисленную с помощью дифференцирования уравнения (10), имеем

$$X = -i(KK_c - \sqrt{K^2K_c^2 - 1}). \quad (37)$$

Спектр и затухание волн, которые следуют из этого равенства и формул (11), (17), показаны соответственно на рис. 5 и 6 кривыми 7. Они близки к кривым 6 на этих же рисунках, отражающим спектр волн и их затухание, определенные на основе выражения (20). Из выражения (37) при $KK_c \ll 1$ ($k \ll \eta/k_c$) следуют линейный закон по γ для щели в спектре волн, а также линейная зависимость от k и k_c затухания волны, что согласуется с формулой (22). В области $k \geq \eta/k_c$ спектр волны, который вытекает из формулы (37), определяется выражением (5), а ее затухание, достигая максимума при $k = \eta/k_c$, уменьшается с увеличением k и при $k \gg \sqrt{\eta}$ совпадает с мнимой частью выражения (25).

Затухание усредненной волны, которое следует из выражения (20) или выражения (37), дает возможность оценить вклад в $\Delta\nu$ неоднородного уширения. Из сравнения $\Delta\nu$ (последовательность точек 4 на рис. 6 и 8) и $2\nu''$ (кривые 6 и 7 на рис. 6 и кривая 6 на рис. 8) следует вывод, что $\Delta\nu$ при малых k_c в области $k \ll \sqrt{\eta}$ в основном определяется неоднородным уширением, а при $k \gg \sqrt{\eta}$ главным в $\Delta\nu$ становится вклад затухания волны. При $k_c \gg \sqrt{\eta}$ влияние случайных неоднородностей на спектр и затухание волн проявляется по-другому. В частности, затухание однородных колебаний ($k = 0$) и ширина пика функции $|\bar{G}''(k, \nu)|$ имеют одинаковую зависимость от k_c , подчиняясь степенному закону: ν'' , $\Delta\nu \propto 1/k_c^{2/3}$.

Полученная в работе модификация спектра джозефсоновских плазменных волн может оказаться полезной для исследования случайных неоднородностей джозефсоновского перехода. С этой целью можно использовать линейное слагаемое в длинноволновой области спектра волн, которое получено в пределе „коротких“ ($r_c \leq \lambda_J/\sqrt{\gamma}$) неоднородностей и зависит от стохастических параметров γ и k_c (выражение (24)). При типичных значениях λ_J в переходах для джозефсоновских плазменных волн „короткими“ являются неоднородности с характерным размером $r_c < 10^{-4} - 10^{-5}$ см. С другой стороны, при использовании джозефсоновских плазменных волн может представлять интерес тот факт, что вследствие линейной зависимости частоты волны от k ее групповая скорость при учете неоднородностей, как это следует из выражения (24), оказывается много больше, чем в однородном переходе $c_0\gamma^{2/3}(\lambda_J k_c)^{-1/3} \gg c_0\lambda_J k$, где $k \ll \sqrt{\eta} = \sqrt{\gamma}/\lambda_J$. Однако надо отметить, что линейное слагаемое в спектре волн возникает также при наклоне плоскости однородного джозефсоновского перехода относительно поверхности образца [23].

Автор благодарен В.В. Валькову, А.В. Ведяеву, А.Г. Грановскому и С.Г. Овчинникову за обсуждение результатов работы и ценные критические замечания.

Список литературы

- [1] Дивин Ю.Я., Понне У., Котелянский И.М., Губанков В.Н., Урбан К. // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. С. 1205.
- [2] Savel'ev S., Yampol'skii V.A., Rakhmanov A.L., Nori F. // Rep. Prog. Phys. 2010. Vol. 73. P. 026 501.
- [3] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. М.: Мир, 1984. 639 с.
- [4] Лухарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 319 с.
- [5] Кившарь Ю.С., Маломед Б.А., Непомнящий А.А. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. С. 356.
- [6] Kivshar Yu.S., Chubykalo O.A. // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 43. P. 5419.
- [7] Абдулов Ф.Х., Цой Э.Н. // ЖТФ. 1997. Т. 67. С. 57.
- [8] Andreeva O.Yu., Boyadjiiev T.L., Shukrinov Yu.M. // Physica C: Superconductivity. 2007. Vol. 460–462. P. 1315.
- [9] Morales-Molina L., Mertens F.G., Sanchez A. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 016 612.
- [10] Голубов А.А., Устинов А.В. // Письма в ЖТФ. 1986. Т. 12. С. 435.
- [11] Маломед Б.А., Серпученко И.Л., Трибельский М.И., Устинов А.В. // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т. 47. С. 505.
- [12] Malomed B.A. // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38. P. 9242; 1990. Vol. 41. P. 2616.
- [13] Маломед Б.А., Обознов В.А., Устинов А.В. // ЖЭТФ. 1990. Т. 97. С. 924.
- [14] Fistul M.V., Caputo P., Ustinov A.V. // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 60. P. 131 52.
- [15] Семерджиева Е.Г., Бояджиив Т.Л., Шукринов Ю.М. // ФНТ. 2005. Т. 31. С. 1110.
- [16] Минеев М.Б., Фейгельман М.Ф., Шмидт В.В. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. С. 290.
- [17] Игнатченко В.А., Исхаков Р.С. // ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 1005.
- [18] Kraichnan R.H. // J. Math. Phys. 1961. Vol. 2. P. 124.
- [19] Brown G., Celli V., Haller M., Maradudin A.A., Marvin A. // Phys. Rev. B. 1985. Vol. 31. P. 4993.
- [20] Ignatchenko V.A., Felk V.A. // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 71. P. 094 417.
- [21] Bourret R.C. // Nuovo Cimento 1962. Vol. 26. P. 1; Canad J. Phys. 1962. Vol. 40. P. 782.
- [22] Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. М.: Наука, 1978. 463 с.
- [23] Ломтев А.И. // ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 2256.