

Синхронизация автоколебательных систем с хаотической динамикой

© Э.В. Кальянов, Р.В. Беляев

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
141190 Фрязино, Московская область, Россия
e-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 22 сентября 2010 г.)

Предложены уравнения автоколебательной системы с инерционностью, обладающей хаотической динамикой. Исследованы взаимодействие двух таких системы при взаимной связи через диффузию, а также случай однонаправленной связи. Показано, что в обоих случаях синхронизация является частичной — остаются разностные хаотические колебания. Рассмотрены переходные процессы при установлении хаотической синхронизации.

Введение

Автоколебательные системы с хаотической динамикой широко известны [1,2] и находят важное практическое применение [3,4]. При этом явление синхронизации широко исследуется применительно к таким системам [5,6]. В отличие от систем с регулярной динамикой, в которых существуют два режима неавтономной работы: синхронный и асинхронный [7–9], в хаотических системах введены понятия о нескольких режимах [6]: режим полной синхронизации, обобщенная синхронизация, фазовая синхронизация, частичная синхронизация и др., хотя не все они, как показано в [10], достаточно обоснованы.

В работе с целью выяснения особенностей синхронизации автоколебательных систем с инерционностью исследуется взаимодействие двух хаотических автоколебательных систем при взаимной и однонаправленной связи. При этом учитываются переходные процессы установления синхронной динамики.

Математическая модель

В настоящее время известны различные типы генераторов, обладающих хаотической динамикой. Уравнения многих из них сводятся к уравнениям, описывающим генератор с инерционностью. К таким уравнениям могут быть сведены даже классические уравнения Лоренца и Ресслера [1,11]. Поэтому представляется, что запись уравнений автоколебательной системы в виде генератора с инерционностью свидетельствует о возможности возбуждения в ней хаотических колебаний. К тому же запись уравнений в виде генератора с инерционностью позволяет наглядно записать связанную систему генераторов классическим способом, вводя элементы связи в правую часть уравнений.

Каждая из исследуемых автоколебательных систем описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dx/dt &= x - xy + z, \\ dy/dt &= x^2 - \alpha y - z, \\ dz/dt &= -\beta x + \delta, \end{aligned} \quad (1)$$

где α, β, δ — постоянные коэффициенты. Эту систему можно рассматривать как модификацию уравнений Ресслера, приведенных в [12]. Исключая переменную z , после несложных преобразований можем получить

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 - [1 - (y - x)]dx/dt + \beta x &= f(x, y), \\ dy/dt + \alpha y &= \varphi(x, dx/dt, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [(\alpha + x)y - (1 + x)x]x - \delta, \\ \varphi(x, dx/dt, y) &= (1 + x - y)x - dx/dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Соотношения (2), (3) имеют вид уравнений, описывающих автоколебательную систему с инерционностью. При этом коэффициент α имеет смысл параметра инерционности.

Используя уравнения (2), (3), запишем систему двух генераторов, связанных через диффузию, в виде

$$\begin{aligned} d^2x_i/dt^2 - [1 - (y_i - x_i)]dx_i/dt + \beta_i x_i &= \\ = f_i(x_i, y_i) + D_i(dx_j/dt - dx_i/dt), \\ dy_i/dt + \alpha_i y_i &= \varphi_i(x_i, dx_i/dt, y_i), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} f_i(x_i, y_i) &= [(\alpha_i + x_i)y_i - (1 + x_i)x_i]x_i - \delta_i, \\ \varphi_i(x_i, dx_i/dt, y_i) &= (1 + x_i - y_i)x_i - dx_i/dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где $i, j = 1, 2$ при $i \neq j$.

Численный анализ этих уравнений проводился методом Рунге–Кутты 4-го порядка. При исследовании постоянные параметры выбраны так, что $\beta_i = 0.4, \delta_i = 0.2$; при этом малое различие, определяющее расстройку, задавалось значениями параметров инерционности, выбранными равными $\alpha_1 = 1.25, \alpha_2 = 1.251$.

Автономные колебания

Характерной особенностью парциальных генераторов (подсистем) в рассматриваемой связанной автоколебательной системе является возможность возбуждения колебаний в подсистемах при нулевых начальных условиях (при $x_i(0) = y_i(0) = 0$). Роль единичного толчка в ней выполняет постоянный коэффициент δ_i .

На рис. 1, *a, b* приведены реализации колебательных процессов подсистем системы, описываемой уравнениями (4), (5), при их автономной работе, когда $D_1 = D_2 = 0$. На рис. 1, *c* показана реализация разностных колебаний $x_1(t) - x_2(t)$. Аттракторы, соответствующие этим колебательным процессам, приведены на рис. 2, *a-c*. На рис. 2, *d* показано движение изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$. Рис. 1 и 2 рассчитаны в интервале времени $t \in [360, 540]$ с целью исключения переходного процесса установления колебаний, который в системах с хаотической динамикой, как показано в [13–15], может занимать достаточно большое время.

Как видно, несмотря на малое отличие по параметру инерционности, колебательные процессы существенно различаются между собой. Это наглядно иллюстрирует реализация разностных колебаний, а также соответствующий ей аттрактор и проекция движения изображающей точки. Аттракторы автономных колебаний имеют структуру, подобную структуре аттрактора Ресслера, и отображают хаотическое перемешивание фазовых траекторий. При этом, как показывает численный анализ, спектры мощности, соответствующие автономным хаотическим колебаниям $x_1(t)$ и $x_2(t)$, а также разностным колебаниям $x_1(t) - x_2(t)$, являются непрерывными и занимают широкие полосы частот.

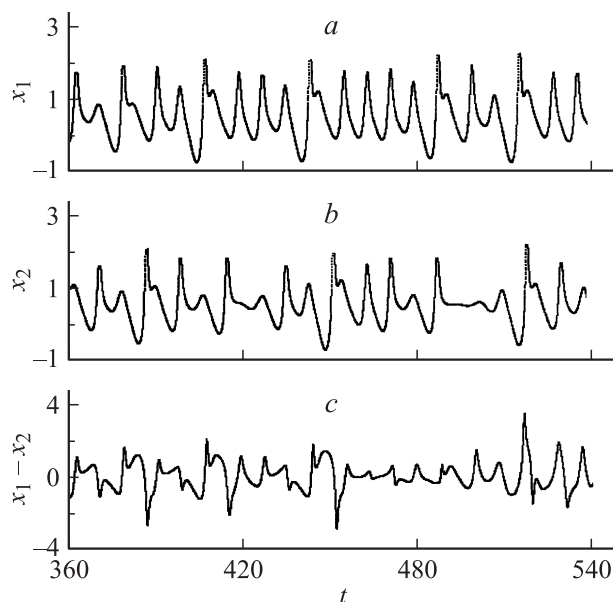


Рис. 1. Реализация колебательных процессов $x_1(t)$ (*a*), $x_2(t)$ (*b*) и реализация (*c*), отображающая их разность.

Рассмотренная автоколебательная система может использоваться для шифрования информации методом, основанным на использовании хаотических решений детерминированных уравнений. Автоколебательная форма записи системы делает ее пригодной для использования с алгоритмом хаотизирующей обратной связи, с помощью которой, как показано в [16], обеспечивается более развитая хаотизация колебаний.

Взаимная синхронизация

При анализе взаимного влияния колебаний подсистем системы, описываемой уравнениями (4), (5), ограничимся случаем симметричной связи, полагая $D_1 = D_2 = D$.

Достаточно наглядно результаты процесса взаимодействия колебаний отображаются бифуркационной диаграммой, представленной на рис. 3, *a*. На ней показано изменение максимальных значений разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (обозначенной через $[x_1 - x_2]$) в зависимости от коэффициента взаимной связи D . Видно, что по мере увеличения коэффициента взаимной связи (до значения $D \approx 0.11$) происходит уменьшение разброса точек, соответствующих максимальным значениям разности колебаний, что свидетельствует о проявлении эффекта взаимной синхронизации (в виде асинхронной динамики), когда колебания подсистем приближаются к их идентичности. Из диаграммы следует, что идентичными колебания становятся при $D > 0.11$. При этом движение изображающей точки на плоскости $\{x_1, x_2\}$ отображается в отличие от рис. 2, *d* прямой линией $x_1 = x_2$, что, естественно, реализуется при идентичных колебательных процессах. Режим работы при $D > 0.11$ можно (но достаточно условно) считать взаимной хаотической синхронизацией, а величину коэффициента связи, при которой возникает синхронный режим, — порогом синхронизации. Однако при уменьшении масштаба бифуркационной диаграммы по оси ординат виден „остаточный“ разброс точек, соответствующих максимальным значениям разности взаимодействующих колебательных процессов (рис. 3, *b*). Хотя этот разброс точек и уменьшается по мере увеличения коэффициента связи, но он четко иллюстрирует неполное совпадение колебаний в подсистемах.

Различие колебательных процессов подтверждается реализацией, отображающей разность колебательных процессов, и соответствующим ей аттрактором. Реализации разности взаимодействующих колебаний приведены на рис. 4, *a, b*, на рис. 4, *c, d* показаны реализации колебательного процесса $x_1(t)$ в режиме взаимной синхронизации колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (*c*) и при асинхронной динамике (*d*). Для осуществления синхронного режима (рис. 4, *a, c*) величина коэффициента взаимной связи в соответствии с диаграммами рис. 3 задана равной значению $D = 0.2$, а для асинхронного (рис. 4, *d*) — $D = 0.05$.

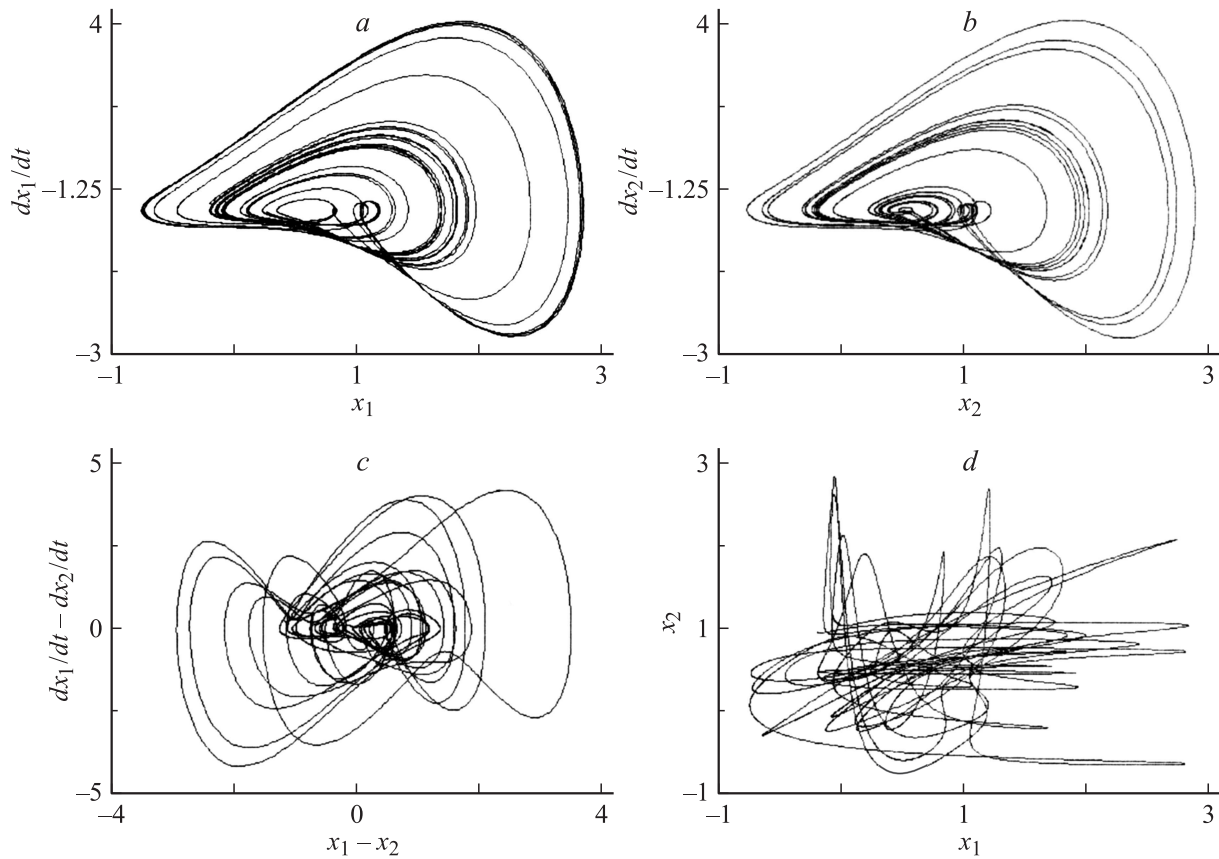


Рис. 2. Хаотические аттракторы, соответствующие колебаниям $x_1(t)$ (a), $x_2(t)$ (b), $x_1(t) - x_2(t)$ (c), и движение изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$ (d).

С целью устранения переходного процесса установления хаотических движений расчет на рис. 4, a приведен при $t > 360$. При этом взаимная связь обеспечивается не с начального момента возбуждения колебаний, а с момента времени $t = 360$. Это позволяет отобразить переходной процесс установления состояния взаимной синхронизации. Проанализировав рис. 4, a, переходной процесс установления синхронных колебаний существует в интервале времени $t \in [360, 420]$. При уменьшении коэффициента связи этот интервал времени увеличивается, а при увеличении, наоборот, уменьшается. Так, при $D = 0.15$ переходной процесс установления синхронного режима работы занимает интервал времени $t \in [360, 460]$, а при $D = 0.4$ — интервал времени $t \in [360, 385]$.

Установившаяся в случае рис. 4, a (при $t > 420$) взаимная синхронизация в действительности является частичной взаимной хаотической синхронизацией, так как существуют „остаточные“ разностные колебания, свидетельствующие о неполной идентичности колебательных процессов в подсистемах. Аттрактор, соответствующий разностной реализации колебаний x_1 и x_2 , представленной на рис. 4, b, которая рассчитана после окончания переходного процесса установления взаимной частичной синхронизации, показан на рис. 5, a. На рис. 5, b приве-

ден аттрактор, соответствующий синхронному колебательному процессу $x_1(t)$, представленному на рис. 4, c. При этом аттрактор, соответствующий синхронному колебательному процессу $x_2(t)$, имеет такой же вид. На рис. 5, c, d приведены аттрактор разностных колебаний и траектория движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$ при асинхронной динамике (когда $D = 0.05$).

Аттрактор, соответствующий разностным колебательным процессам при частичной синхронизации (рис. 5, c), имеет своеобразный вид, отличный от вида аттрактора, соответствующего разностным колебаниям при автономных колебаниях. При этом сохраняется хаотический характер движений. Таким образом, при выбранном малом различии подсистем не реализуется обобщенная синхронизация хаотических подсистем, для которой, как известно [6], должно выполняться определенное функциональное соотношение между взаимодействующими колебательными процессами. В рассмотренном случае несомненно проявляется эффект взаимной синхронизации, но остается четко выраженное „остаточное“ различие между колебаниями, причем это различие имеет хаотическую природу. Именно это позволяет считать рассматриваемую хаотическую синхронизацию частичной.

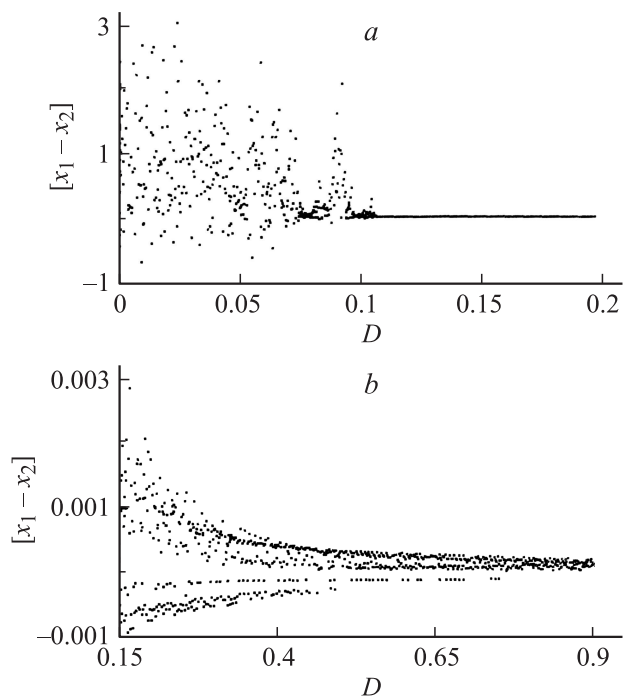


Рис. 3. Изменение максимальных значений разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в зависимости от коэффициента взаимной связи D в интервалах изменения параметра связи $D \in [0, 0.2]$ (a) и $D \in [0.15, 0.9]$ (b).

Аттрактор, соответствующий асинхронной динамике при $D = 0.05$ (рис. 5, c), имеет структуру, в которой отображаются комбинированные разностные движения: фрагменты траекторий, присущие автономным колебаниям (см. рис. 2, c), и фрагменты траекторий, реализующихся при частичной хаотической синхронизации (см. рис. 5, a). При уменьшении параметра связи преобладают фрагменты траекторий движения, соответствующие разности реализаций, отображающих автономные колебания. При увеличении коэффициента D , наоборот, начинают преобладать фрагменты траекторий, соответствующие режиму частичной синхронизации. Это обусловлено тем, что переход от асинхронной динамики к режиму взаимной синхронизации осуществляется по сценарию перемежаемости. Эффект перемежаемости движений проявляется и в траектории движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$: наряду с движениями, отображаемыми рис. 2, c, существуют движения в направлении $x_1 = x_2$.

Об установлении режима частичной синхронизации (и отсутствии обобщенной синхронизации) свидетельствует структура спектра мощности разностных колебаний. На рис. 6 приведены спектры мощности разностных колебаний при относительно малой ($D = 0.15$, кривая 1) и большой ($D = 0.9$, кривая 2) величинах коэффициента связи. Как видно, даже при величине коэффициента взаимной связи, равной величине $D = 0.9$, соответствующей, согласно рис. 3, a, режиму взаимной хаотической

синхронизации, спектр мощности разностных колебаний $S(x_1 - x_2)$ являясь непрерывным, отображает хаотические движения в широком диапазоне частот ω .

Рассмотренные закономерности взаимодействующих колебаний сохраняются и при относительно большой „расстройке“ подсистем. Так, например, в случае $\alpha_1 = 1.25$, $\alpha_2 = 1.26$ с увеличением коэффициента взаимной связи также происходит возникновение асинхронной динамики, сопровождающейся уменьшением разброса точек, соответствующих максимальным значениям разности колебательных процессов, а затем (при $D \approx 0.2$) устанавливается частичная взаимная хаотическая синхронизация. При этом выбросы остаточных хаотических колебаний значительно больше: при $D = 0.3$ они лишь на два порядка меньше выбросов, реализующихся в разностных колебаниях в случае автономной работы подсистемы.

Принудительная синхронизация

Уравнения (4), (5) позволяют провести анализ взаимодействия подсистем при различной степени асимметрии связи. Наибольший интерес представляет случай однонаправленной связи применительно к принудительной синхронизации, когда $D_1 = D$, $D_2 = 0$. Принудитель-

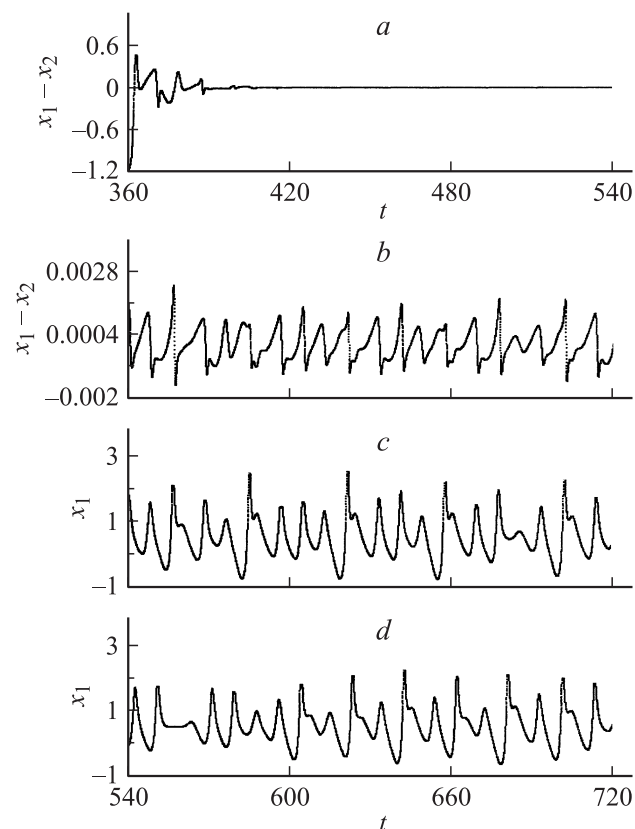


Рис. 4. Реализации разности взаимодействующих колебаний $x_1(t)$, $x_2(t)$ (a, b) и реализации колебаний $x_1(t)$ (c, d) в режиме взаимной частичной синхронизации (a–c) и при асинхронной динамике (d).

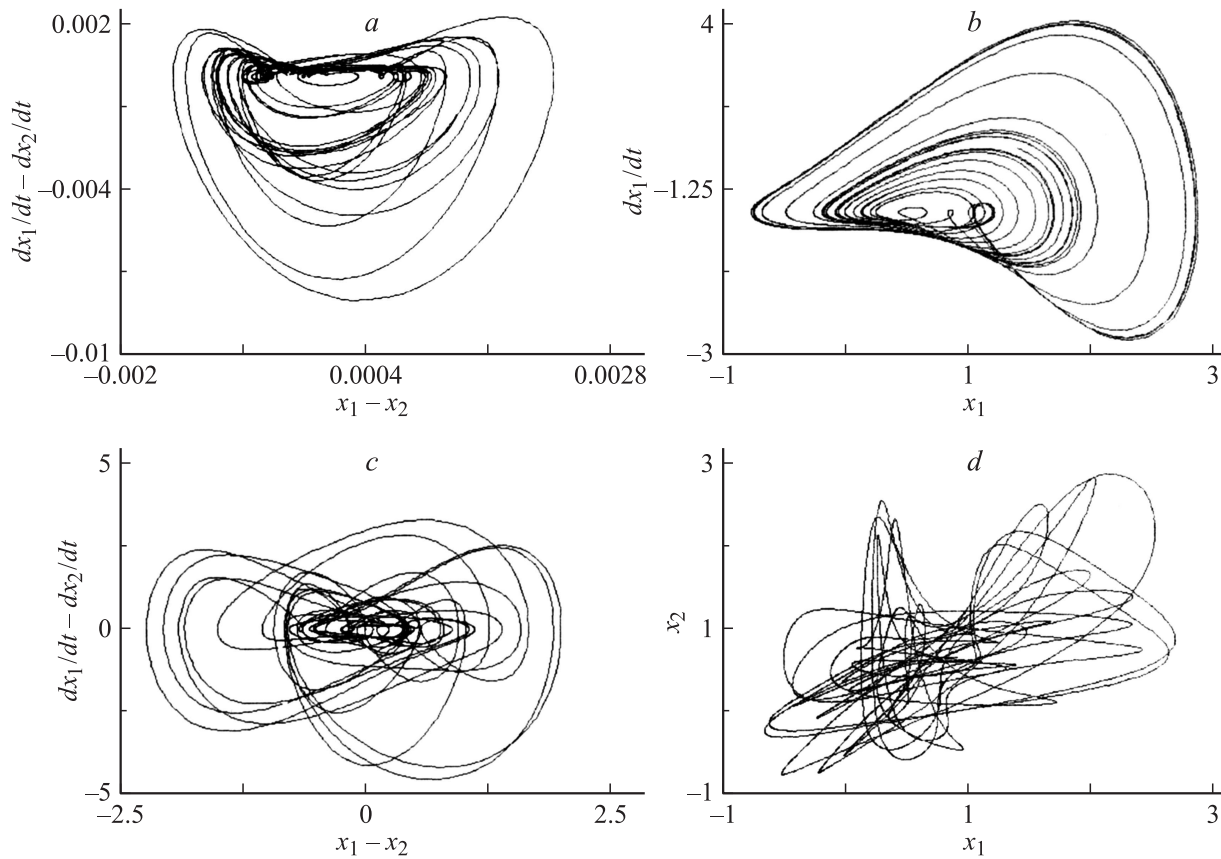


Рис. 5. Аттракторы при синхронной динамике (*a, b*), соответствующие разностной реализации (*a*), колебательному процессу $x_1(t)$ (*b*), а также аттрактор разностных колебаний (*c*) и траектория движения изображающей точки в проекции на плоскость $\{x_1, x_2\}$ (*d*) при асинхронной динамике, когда $D = 0.05$. Все рисунки рассчитаны в интервале времени $t \in [540, 720]$.

ная синхронизация, а именно так называемая „полная“ синхронизация, реализующаяся при идентичных генераторах, а также „обобщенная“ синхронизация, реализующаяся при малом различии параметров подсистем, используются при скрытой передаче информации.

На рис. 7 приведены бифуркационные диаграммы, иллюстрирующие процессы при однонаправленной связи подсистем, обеспечивающей возможность принудительной синхронизации колебаний первой подсистемы (ве-

домой) колебаниями второй (ведущей). На них показано изменение максимальных значений разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в зависимости от коэффициента однонаправленной связи D . Рис. 7, *a* рассчитан в интервале значений коэффициента однонаправленной связи $D \in [0, 0.4]$, а *b* — в интервале $D \in [0.3, 0.9]$. Из рис. 7, *a* видно, что по мере увеличения коэффициента однонаправленной связи (до значения $D \approx 0.26$) происходит уменьшение разброса точек, соответствующих максимальным значениям разности колебаний, что свидетельствует о проявлении эффекта принудительной синхронизации (в виде асинхронной динамики), когда уменьшается разброс точек, соответствующих максимальным значениям разности колебательных процессов, и колебания подсистем приближаются к их идентичности. Из диаграммы следует, что идентичными колебаниями становятся при $D > 0.26$, что можно условно считать принудительной хаотической синхронизацией, пороговое значение коэффициента связи равно 0.26. При этом движение изображающей точки на плоскости $\{x_1, x_2\}$ отображается, как и в случае взаимной синхронизации, прямой линией $x_1 = x_2$, что, естественно, реализуется при идентичности колебательных процессов. В то же время при уменьшении масштаба по оси ординат можно

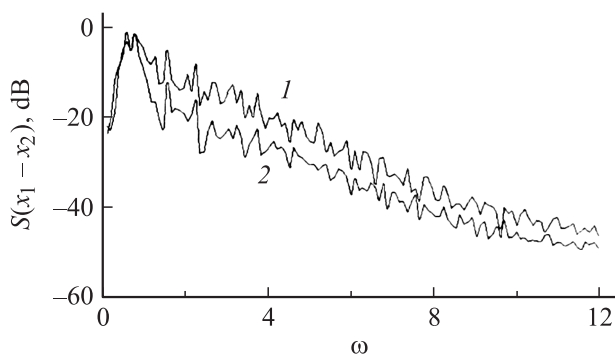


Рис. 6. Спектры мощности разностных колебаний взаимно связанных подсистем при слабой (1) $D = 0.9$ и сильной (2) $D = 0.15$ связи.

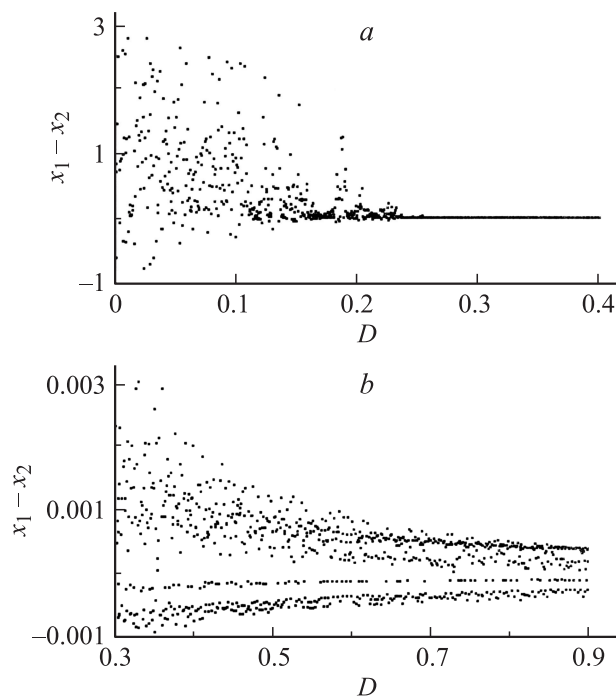


Рис. 7. Изменение максимальных значений разности колебательных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в зависимости от коэффициента однонаправленной связи D в интервалах изменения параметра связи $D \in [0, 0.4]$ (*a*) и $D \in [0.3, 0.9]$ (*b*).

видеть „остаточный“ разброс точек, соответствующих максимальным значениям разности колебательных процессов ведущей и ведомой подсистем (рис. 6, *b*). Несмотря на то что этот разброс точек и уменьшается по мере увеличения коэффициента связи, он четко иллюстрирует неполное совпадение колебаний в подсистемах. Разброс точек, соответствующих максимальным значениям разности колебательных процессов, при $D = 0.3$ на три порядка меньше, чем в случае отсутствия связи. При взаимной связи подсистем такое различие максимальных значений разности колебательных процессов наблюдалось при меньшей величине коэффициента связи (см. рис. 3).

Различие колебательных процессов подтверждается реализацией, отображающей разность колебательных процессов, и соответствующим ей аттрактором. Реализации разности взаимодействующих колебаний приведены на рис. 8, *a, b*. Они получены при $D = 0.3$. Рис. 8, *a* рассчитан с целью устранения переходного процесса установления хаотических движений в интервале времени $t \in [360, 520]$. При этом однонаправленная связь обеспечивается не с начального момента возбуждения колебаний, а с момента времени $t = 360$, что позволяет отобразить переходной процесс установления принудительной синхронизации. Переходной процесс, как следует из рис. 8, *a*, занимает интервал времени $t \in [360, 400]$. При уменьшении коэффициента связи этот интервал времени, как и в случае взаимной связи, увеличивается,

а при увеличении, наоборот, уменьшается. Однако даже при $D = 0.9$ переходной процесс установления режима синхронизации занимает относительно большое время (см. рис. 8, *a*): он существует в интервале времени $t \in [360, 380]$.

Установившаяся в случае, показанном на рис. 8, *a* (при $t > 400$), хаотическая синхронизация является частичной принудительной хаотической синхронизацией, так как существуют „остаточные“ разностные колебания (см. рис. 8, *b*). Эти колебания относительно слабые, но тем не менее свидетельствуют о неполной идентичности колебательных процессов в подсистемах; к тому же неидентичность колебаний хаотически изменяется во времени.

Аттрактор, соответствующий разностным колебательным процессам при частичной принудительной синхронизации, имеет вид, подобный хаотическому аттрактору, показанному на рис. 5, *a* для случая взаимной синхронизации. Это свидетельствует о том, что даже при выбранном малом различии подсистем не реализуется обобщенная синхронизация хаотических колебаний, при которой должна выполняться функциональная связь между колебательными процессами ведущей и ведомой подсистем. В рассмотренном случае четко проявляется эффект принудительной синхронизации, но остается „остаточное“ различие между колебаниями, причем это различие имеет хаотическую природу. Именно это позволяет считать рассматриваемую принудительную хаотическую синхронизацию частичной.

Аттрактор, соответствующий асинхронной динамике, имеет структуру, в которой, как и в случае взаимной связи (см. рис. 5, *c*), отображаются комбинированные движения: фрагменты движений, присущие автономным колебаниям, и фрагменты движений, реализующиеся при частичной принудительной хаотической синхронизации. Это обусловлено тем, что переход к режиму прину-

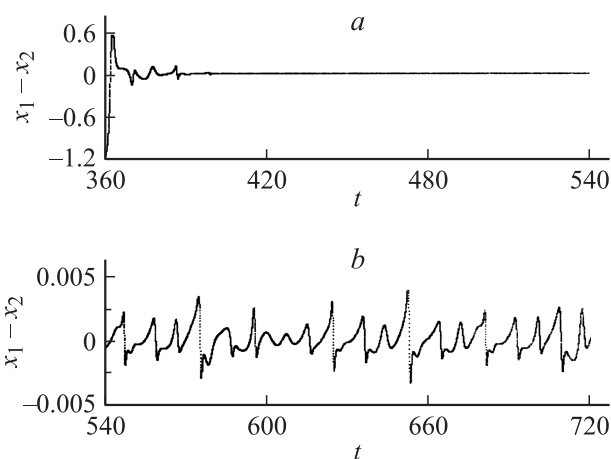


Рис. 8. Реализации разностных колебаний в интервалах времени $t \in [360, 540]$ (*a*) и $t \in [540, 720]$ (*b*) при включении воздействия управляющих колебаний на управляемые осцилляции в момент времени $t = 360$.

длительной синхронизации осуществляется по сценарию перемежаемости.

Заключение

Результаты проведенных исследований свидетельствуют о сложной динамике предложенной автоколебательной системы. Хаотический аттрактор, соответствующий ее колебаниям, имеет вид аттрактора Ресслера.

При взаимной связи двух подсистем проявляется режим взаимной синхронизации, которую следует считать частичной взаимной синхронизацией, так как остаются разностные колебания, имеющие вид хаотических движений. Этим колебаниям соответствует хаотический аттрактор, имеющий оригинальную структуру.

При однонаправленной связи двух систем проявляется режим принудительной синхронизации, которую также следует считать частичной принудительной синхронизацией, так как остается различие между ведомыми и ведущими колебаниями, отображаемые разностными хаотическими движениями, которым соответствует хаотический аттрактор. При использовании режима принудительной хаотической синхронизации для создания систем скрытой связи следует учитывать наличие остаточных разностных колебаний, имеющих хаотический характер.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-02-00351).

Список литературы

- [1] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [2] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит., 2001. 296 с.
- [3] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит., 2002. 252 с.
- [4] *Залогин Н.Н., Кислов В.В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнике и информационных систем. М.: Радиотехника, 2006. 208 с.
- [5] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1999. 368 с.
- [6] *Пиковский А., Розенблом М., Куртс Ю.* Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
- [7] *Железовский Б.Е., Кальянов Э.В.* Многочастотные режимы в приборах СВЧ. М.: Связь, 1978. 256 с.
- [8] *Блехман И.И.* Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 251 с.
- [9] *Болознев В.В.* Функциональные преобразователи на основе связанных генераторов. М.: Радио и связь, 1982. 86 с.
- [10] *Ланда П.С.* // Изв. вузов. ПНД. 2004. Т. 12. № 4. С. 48–59.
- [11] *Кальянов Э.В.* // РЭ. 1996. Т. 41. N 5. С. 575–582.
- [12] *Rossler O.E.* // Phys. ett. 1976. Vol. 57A. N 5. P. 397–398.

- [13] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ, 2000. Т. 26. Вып. 15. С. 26–31.
- [14] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 15. С. 61–68.
- [15] *Кальянов Э.В.* // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 1. С. 65–76.
- [16] *Кальянов Э.В., Беляев Р.В., Калинин В.И.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 8. С. 1–7.