

05;12

Расчет проникания недеформируемых ударников в малопрочные преграды с использованием данных пьезоакселерометрии

© В.А. Велданов, В.А. Марков, В.И. Пусев, А.М. Ручко, М.Ю. Сотский, С.В. Федоров

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
105005 Москва, Россия
e-mail: sm4@sm.bmstu.ru

(Поступило в Редакцию 28 июня 2010 г.)

Представлены расчетные и экспериментальная методики определения динамики проникания недеформируемых или слабдеформируемых ударников в грунтовые преграды. Одна из расчетных методик базируется на использовании эмпирических зависимостей для вычисления механических напряжений на поверхности контакта ударника с преградой, а другая — на численном моделировании процесса проникания в рамках двумерной осесимметричной задачи механики сплошных сред. Экспериментальное определение динамики движения ударника в преграде осуществляется с использованием пьезоакселерометрии. На основе разработанных методик проведены исследования проникания ударников в пластилин, используемый в качестве модельной малопрочной среды для глинистых грунтов. В результате обработки экспериментальных данных получены параметры, характеризующие физико-механические свойства пластилиновой мишени и используемые в расчетных методиках. Осуществлено тестирование расчетных методик.

Введение

Задача определения динамики высокоскоростного проникания ударников в различные преграды имеет важное прикладное значение. Такие ударники используются, например, для перфорации нефтяных и газовых скважин [1]. Существует проект использования ударников, оснащенных разного рода датчиками, для исследования строения поверхности Луны и планет Солнечной системы [2]. Проникая на определенную глубину в поверхностный слой планеты, такие исследовательские зонды-ударники должны передавать информацию о свойствах пород, слагающих кору. При этом в процессе проникания необходимо обеспечить сохранность приборных устройств, входящих в состав зонда-ударника. А решение данной задачи невозможно без определения перегрузок, воздействию которых будет подвергаться проникающий модуль.

При проникании металлических ударников в грунтовые преграды вплоть до скоростей взаимодействия 1000 м/с деформации ударников малы [3] и их можно рассматривать в процессе движения как абсолютно жесткие тела. Динамика проникания недеформируемого ударника в преграду зависит от распределения нормальных и касательных механических напряжений на поверхности контакта ударника с преградой [4], определяющих силовое воздействие на него в процессе проникания.

При расчете проникания недеформируемых ударников в грунтовые преграды для определения напряжений на контактной границе используются различные подходы. В простых (инженерных) методиках расчета контактные напряжения часто вычисляются с помощью эмпирических соотношений [5], учитывающих зависимость этих напряжений от текущей скорости ударника и включающих набор коэффициентов, характеризующих динамические свойства конкретной рассматриваемой преграды.

В расчетных методиках более высокого уровня силовое воздействие на ударник при его движении в преграде определяется на основе численного моделирования с позиций механики сплошных сред.

Инженерная методика

Рассмотрим сначала особенности решения задач проникания с использованием инженерной методики. Нормальные напряжения σ_n в точках на поверхности головной части ударника, контактирующей с преградой (рис. 1), принимаются функцией проекции v_n скорости ударника v на нормаль к поверхности его головной

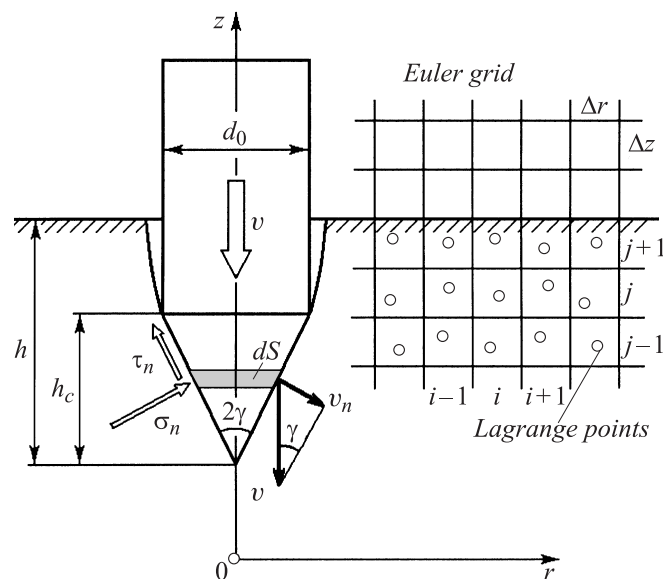


Рис. 1. Расчетная схема проникания недеформируемого ударника в преграду.

части в данной точке. Вид этой функции (закон сопротивления) предполагается одинаковым для ударников с головной частью различной формы и задается обычно параболической зависимостью [5]

$$\sigma_n = Av_n^2 + Bv_n + C, \quad (1)$$

где A, B и C — коэффициенты, зависящие от физико-механических свойств материала преграды. Представленный закон сопротивления (1) отражает известную трактовку [6] сопротивления среды как суммы инерционной (первое слагаемое), вязкостной (второе слагаемое) и прочностной (третье слагаемое) составляющих, каждая из которых может иметь превалирующее значение в различных средах при определенных скоростях.

Вычисление касательных напряжений τ_n на контактной поверхности производится на основании закона сухого трения

$$\tau_n = \mu\sigma_n, \quad (2)$$

где μ — коэффициент поверхностного трения ударника о среду.

С использованием соотношений (1), (2) рассчитывается сила сопротивления преграды F_p , действующая на ударник при проникании. Для ударников с конической формой головной части (2γ — угол раствора конуса, рис. 1):

$$v_n = v \sin \gamma,$$

а выражение для силы сопротивления dF_p , действующей на элементарной площадке dS , принимает вид

$$dF_p = (\sigma_n \sin \gamma + \tau_n \cos \gamma) dS.$$

Интегрирование данного соотношения с учетом (1), (2) по поверхности контакта конической головной части с преградой в предположении, что проникание происходит по нормали к свободной поверхности (в этом случае достигается наибольшая глубина проникания), приводит к следующим выражениям для определения силы сопротивления при различном соотношении глубины проникания h и высоты конуса h_c (рис. 1):

$$F_p = \pi(1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma)(Av^2 \sin^2 \gamma + Bv \sin \gamma + C)h^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \quad (3)$$

при $h \leq h_c$,

$$F_p = \pi(1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma)(Av^2 \sin^2 \gamma + Bv \sin \gamma + C)h_c^2 \operatorname{tg}^2 \gamma \quad (4)$$

при $h > h_c$.

После подстановки приведенных зависимостей для силы сопротивления в уравнение движения ударника массой m :

$$m \frac{dv}{dt} = mv \frac{dv}{dh} = -F_p$$

можно установить взаимосвязь между текущими значениями его скорости и глубины проникания. В зависимости от соотношения входящих в (1) коэффициентов A, B и C эта взаимосвязь на первом этапе проникания

(при $h \leq h_c$) при начальной скорости ударника v_0 имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) \operatorname{tg}^2 \gamma h^3}{3m} \\ &= \ln \sqrt{\frac{Av_0^2 \sin^2 \gamma + Bv_0 \sin \gamma + C}{Av^2 \sin^2 \gamma + Bv \sin \gamma + C}} - \frac{B}{\sqrt{4AC - B^2}} \\ & \times \operatorname{arctg} \frac{(v_0 - v)\sqrt{4AC - B^2} \sin \gamma}{2Av_0v \sin^2 \gamma + B(v_0 + v) \sin \gamma + 2C} \end{aligned}$$

при $4AC - B^2 > 0$;

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) \operatorname{tg}^2 \gamma h^3}{3m} \\ &= \ln \sqrt{\frac{Av_0^2 \sin^2 \gamma + Bv_0 \sin \gamma + C}{Av^2 \sin^2 \gamma + Bv \sin \gamma + C}} + \frac{B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \\ & \times \ln \sqrt{\frac{(2Av_0 \sin \gamma + B + \sqrt{B^2 - 4AC})(2Av \sin \gamma + B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{(2Av_0 \sin \gamma + B - \sqrt{B^2 - 4AC})(2Av \sin \gamma + B + \sqrt{B^2 - 4AC})}} \end{aligned}$$

при $4AC - B^2 < 0$;

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) \operatorname{tg}^2 \gamma h^3}{3m} = \ln \frac{\sqrt{Av_0 \sin \gamma + \sqrt{C}}}{\sqrt{Av \sin \gamma + \sqrt{C}}} \\ & - \frac{\sqrt{AC}(v_0 - v) \sin \gamma}{(\sqrt{Av_0 \sin \gamma + \sqrt{C}})(\sqrt{Av \sin \gamma + \sqrt{C}})} \end{aligned}$$

при $4AC - B^2 = 0$.

На основании приведенных соотношений при подстановке в них $h = h_c$ может быть рассчитана скорость ударника v_c в момент его проникания на глубину, равную высоте конической головной части. С использованием данного значения скорости уравнения, описывающие движение ударника на втором этапе проникания (при $h > h_c$), представляются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) h_c^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{m} (h - h_c) \\ &= \ln \sqrt{\frac{Av_c^2 \sin^2 \gamma + Bv_c \sin \gamma + C}{Av^2 \sin^2 \gamma + Bv \sin \gamma + C}} \\ & - \frac{B}{\sqrt{4AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{(v_c - v)\sqrt{4AC - B^2} \sin \gamma}{2Av_c v \sin^2 \gamma + B(v_c + v) \sin \gamma + 2C} \end{aligned}$$

при $4AC - B^2 > 0$;

$$\begin{aligned} & \frac{\pi A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) h_c^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{m} (h - h_c) \\ &= \ln \sqrt{\frac{Av_c^2 \sin^2 \gamma + Bv_c \sin \gamma + C}{Av^2 \sin^2 \gamma + Bv \sin \gamma + C}} + \frac{B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \\ & \times \ln \sqrt{\frac{(2Av_c \sin \gamma + B + \sqrt{B^2 - 4AC})(2Av \sin \gamma + B - \sqrt{B^2 - 4AC})}{(2Av_c \sin \gamma + B - \sqrt{B^2 - 4AC})(2Av \sin \gamma + B + \sqrt{B^2 - 4AC})}} \end{aligned}$$

при $4AC - B^2 < 0$;

$$\frac{\pi A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) h_c^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{m} (h - h_c) = \ln \frac{\sqrt{A} v_c \sin \gamma + \sqrt{C}}{\sqrt{A} v \sin \gamma + \sqrt{C}} - \frac{\sqrt{AC} (v_c - v) \sin \gamma}{(\sqrt{A} v_c \sin \gamma + \sqrt{C})(\sqrt{A} v \sin \gamma + \sqrt{C})}$$

при $4AC - B^2 = 0$.

К числу наиболее важных характеристик процесса проникания относятся полная глубина проникания ударника в преграду h_p и испытываемая им максимальная перегрузка n_m (отношение максимального ускорения ударника в процессе проникания к ускорению свободного падения g), необходимая для оценки способности конструкции ударника и его полезной нагрузки (например, приборных устройств) выдержать без разрушения возникающее при проникании силовое воздействие. Для определения этих характеристик в рамках рассматриваемой инженерной методики можно получить аналитические соотношения, если принять дополнительно допущение $h_p \gg h_c$ (что обычно и реализуется на практике при проникании ударников в малопрочные грунтовые преграды). При указанном допущении влиянием первой стадии проникания ударника на его последующее движение в преграде можно пренебречь, и тогда, полагая в соотношениях для второго этапа проникания $v_c = v_0$ и $v = 0$, приходим к следующим зависимостям для вычисления полной глубины проникания:

$$h_p = \frac{m}{A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) S_m} \times \left[\ln \sqrt{\frac{A}{C} v_0^2 \sin^2 \gamma + \frac{B}{C} v_0 \sin \gamma + 1} - \frac{B}{\sqrt{4AC - B^2}} \operatorname{arctg} \frac{v_0 \sqrt{4AC - B^2} \sin \gamma}{B v_0 \sin \gamma + 2C} \right]$$

при $4AC - B^2 > 0$;

$$h_p = \frac{m}{A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) S_m} \times \left[\ln \sqrt{\frac{A}{C} v_0^2 \sin^2 \gamma + \frac{B}{C} v_0 \sin \gamma + 1} + \frac{B}{\sqrt{B^2 - 4AC}} \ln \sqrt{\frac{v_0 \sin \gamma (B - \sqrt{B^2 - 4AC}) + 2C}{v_0 \sin \gamma (B + \sqrt{B^2 - 4AC}) + 2C}} \right]$$

при $4AC - B^2 < 0$;

$$h_p = \frac{m}{A \sin^2 \gamma (1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) S_m} \times \left[\ln \left(\sqrt{\frac{A}{C}} v_0 \sin \gamma + 1 \right) - \frac{\sqrt{A} v_0 \sin \gamma}{\sqrt{A} v_0 \sin \gamma + \sqrt{C}} \right]$$

при $4AC - B^2 = 0$, где S_m — площадь миделя ударника ($S_m = \pi d_0^2/4$, d_0 — диаметр ударника, рис. 1).

В предположении $h_p \gg h_c$ перегрузка ударника максимальна в момент его проникания на глубину, равную высоте головной части. Пренебрегая падением скорости на первом этапе проникания ($v_c = v_0$), на основании (3) получаем

$$n_m = - \frac{(1 + \mu \operatorname{ctg} \gamma) (A v_0^2 \sin^2 \gamma + B v_0 \sin \gamma + C) S_m}{mg}$$

Отметим, что приведенные соотношения существенно упрощаются, если для рассматриваемой преграды можно в зависимости (1) пренебречь вязкостной ($B = 0$) или прочностной ($C = 0$) составляющей сопротивления.

Таким образом, с помощью представленной инженерной методики можно достаточно просто рассчитать динамику проникания недеформируемых ударников в грунтовые преграды, если известны входящие в закон сопротивления (1) коэффициенты A , B и C , характеризующие свойства конкретной преграды.

Методика численного моделирования

Другой подход к расчетно-теоретическому исследованию динамики проникания ударников в грунтовые преграды базируется на численном моделировании этого процесса с позиций механики сплошных сред.

По-прежнему предполагая, что взаимодействие ударника с преградой происходит по нормали к свободной поверхности (рис. 1), движение и состояние материала преграды в процессе проникания опишем в рамках двумерной осесимметричной задачи механики сплошных сред, используя цилиндрическую систему координат (z — осевая координата, r — радиальная координата).

Изменение плотности ρ материала преграды происходит в соответствии с законом сохранения массы в дифференциальной форме (уравнением неразрывности):

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

где v_r , v_z — соответственно радиальная и осевая компоненты вектора скорости частиц материала.

Радиальные и осевые ускорения частиц материала определяются на основании закона сохранения импульса в дифференциальной форме:

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z};$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r},$$

где σ_r , σ_z , σ_θ , τ_{rz} — нормальные и касательные компоненты тензора напряжений.

Для определения возникающих в материале преграды механических напряжений (в ответ на его деформирование) принимается модель сжимаемой упругопластической среды. Эта модель получила наиболее широкое распространение в практике численного решения задач проникания в грунтобетонные преграды, позволяя учесть

основные свойства таких преград, связанные с их значительной объемной сжимаемостью и способностью оказывать сопротивление сдвиговому деформированию [7,8]. Компоненты тензора скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_r$, $\dot{\varepsilon}_z$, $\dot{\varepsilon}_\theta$, $\dot{\varepsilon}_{rz}$ материала с использованием кинематических соотношений выражаются через компоненты вектора скорости как

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{v_r}{r}; \quad \dot{\varepsilon}_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}.$$

Определение эволюции напряженного состояния материалов базируется на теории пластического течения [9]. Определяющие уравнения этой теории (уравнения Прандтля–Рейсса) в рассматриваемом случае принимают вид следующих дифференциальных соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{ds_z}{dt} + \lambda s_z &= 2G \left(\dot{\varepsilon}_z + \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \right); \\ \frac{ds_r}{dt} + \lambda s_r &= 2G \left(\dot{\varepsilon}_r + \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \right); \\ \frac{ds_\theta}{dt} + \lambda s_\theta &= 2G \left(\dot{\varepsilon}_\theta + \frac{1}{3\rho} \frac{d\rho}{dt} \right); \\ \frac{d\tau_{rz}}{dt} + \lambda \tau_{rz} &= G \dot{\varepsilon}_{rz}, \end{aligned} \quad (6)$$

где s_z, s_r, s_θ — нормальные компоненты девiatorа тензора напряжений, G — модуль сдвига среды, λ — скалярный множитель, определяемый через удельную мощность пластической деформации dA_p/dt и предел текучести среды σ_Y как

$$\lambda = \frac{3}{2\sigma_Y^2} \frac{dA_p}{dt}.$$

С учетом условия пластичности Мизеса–Шлейхера [8], обычно используемого при описании пластического деформирования грунтов, предел текучести среды σ_Y принимался зависящим от действующего в среде давления p

$$\sigma_Y(p) = \sigma_{Y0} + \Psi p \left(1 + \frac{\Psi p}{\sigma_{Y\infty} - \sigma_{Y0}} \right)^{-1}, \quad (7)$$

где σ_{Y0} — сдвиговая прочность грунта при нулевом среднем напряжении (аналог начального сцепления среды в условии Кулона–Мора [7]), Ψ — величина, являющаяся аналогом коэффициента внутреннего трения, $\sigma_{Y\infty}$ — предел сдвиговой прочности среды при $p \rightarrow \infty$.

С использованием рассчитываемых на основании теории пластического течения значений s_z, s_r, s_θ и давления p в материале преграды определяются нормальные компоненты тензора напряжений $\sigma_z = s_z - p$, $\sigma_r = s_r - p$, $\sigma_\theta = s_\theta - p$.

При определении давления в материале преграды предполагалось, что оно зависит только от объемной деформации его частиц, а влиянием их внутренней

энергии можно пренебречь. В качестве уравнения, связывающего величину объемной деформации и давление, была принята динамическая кривая сжатия [8]

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left(1 + \frac{p - p_0}{K_i} \right)^{-1/n_i},$$

где величины α_i характеризуют фазовый состав материала грунтовой преграды и соответствуют объемной концентрации пор, занятых воздухом (α_1), а также жидкой (α_2) и твердой (α_3) составляющих; ρ_0 — плотность среды при нормальных условиях (давлении p_0); K_i и n_i — экспериментальные параметры. Записанное уравнение сжимаемости базируется на предположении о равенстве давлений во всех трех фазовых компонентах в любом достаточно малом объеме. При этом сжимаемость каждой фазы описывается уравнениями в форме Тэта [8], а общая объемная деформация определяется как сумма объемных деформаций отдельных составляющих. При известном фазовом составе начальная плотность среды ρ_0 определяется как $\rho_0 = \alpha_2 \rho_{20} + \alpha_3 \rho_{30}$, где $\rho_{20} = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{30} \approx 2600\text{--}2700 \text{ kg/m}^3$ — плотность жидкой и твердой составляющих.

Таким образом, уравнение объемной сжимаемости определяется только фазовым составом грунтовой преграды, и с учетом очевидного соотношения $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ для задания закона ее сжимаемости достаточно задать значения объемных концентраций каких-либо двух составляющих из трех (обычно задаются величины α_1 и α_2 , характеризующие объемную концентрацию воздушных пор и жидкой составляющей).

Граничные условия в рассматриваемой задаче (рис. 1) являются следующими. На оси симметрии ($r = 0$) полагается отсутствующей радиальная составляющая скорости частиц среды ($v_r = 0$). На свободной поверхности преграды механические напряжения задаются нулевыми. Наконец, на поверхности контакта материала преграды с ударником используется условие „непроницаемости“ — нормальная к поверхности ударника составляющая вектора скорости частиц среды принимается равной проекции скорости ударника на нормаль к его поверхности в данной точке.

Интегрирование механических напряжений, возникающих в материале преграды, по поверхности контакта с головной частью ударника позволяет определить осевую силу F_p , действующую на ударник в процессе проникания, что, в свою очередь, дает возможность рассчитать динамику проникания ударника (определить законы изменения его скорости v и испытываемой им перегрузки).

Для численного решения задач динамического нагружения материалов был разработан вычислительный алгоритм, основанный на методе свободных лагранжевых точек [10]. Суть используемого численного метода заключается в следующем. В расчетной области вводится неподвижная эйлерова сетка с прямоугольными ячейками размером Δr в радиальном и Δz в осевом

направлениях (рис. 1). В те ячейки эйлеровой сетки, которые оказываются внутри области расчетного поля, занятой средой, помещаются индивидуальные (лагранжевы) точки среды. Индивидуальные точки не имеют размеров и массы, в данных точках определены все параметры среды: радиальная и осевая компоненты вектора скорости, плотность, компоненты тензора напряжений. Каждая точка характеризуется также своими радиальной и осевой координатами.

Ячейки эйлеровой сетки индивидуализируются постановкой каждой из них в соответствие пары целых чисел (i, j) , где i — номер данной ячейки в радиальном направлении, а j — в осевом (рис. 1). Той же парой чисел индексируются и все параметры среды в индивидуальной (лагранжевой) точке, находящейся в данный момент времени в эйлеровой ячейке (i, j) . Для определения эволюции параметров в данной лагранжевой точке используются параметры лагранжевых точек из четырех соседних эйлеровых ячеек: ячейки слева $(i-1, j)$, ячейки справа $(i+1, j)$, ячейки сверху $(i, j+1)$ и ячейки снизу $(i, j-1)$. Если какие-либо из данных эйлеровых ячеек оказываются пустыми (не занятыми средой), то в них считаются находящимися фиктивные точки, имеющие такие же компоненты вектора скорости, что и рассматриваемая индивидуальная точка (i, j) , при нулевом давлении. Введение фиктивных лагранжевых точек позволяет единым образом рассчитывать эволюцию параметров всех индивидуальных точек независимо от количества имеющих у них соседей.

Например, новое значение плотности $\hat{\rho}_{(i,j)}$ (в момент времени $t + \Delta t$) в лагранжевой точке, находящейся в момент времени t в ячейке эйлеровой сетки (i, j) , определяется из разностного аналога уравнения неразрывности (5):

$$\hat{\rho}_{(i,j)} = \rho_{(i,j)} \left(1 - \Delta t \left(\frac{v_{r(i+1,j)} - v_{r(i-1,j)}}{r_{(i+1,j)} - r_{(i-1,j)}} + \frac{v_{r(i+1,j)} + v_{r(i-1,j)}}{r_{(i+1,j)} + r_{(i-1,j)}} + \frac{v_{z(i,j+1)} - v_{z(i,j-1)}}{z_{(i,j+1)} - z_{(i,j-1)}} \right) \right).$$

Аналогичным образом из разностных аналогов соответствующих уравнений могут быть определены и все остальные параметры движения и состояния среды на новом временном слое. Для определения компонент девиатора тензора напряжений, эволюционирующих в соответствии с (6), использовался подход, предложенный в [11], — они рассчитывались в предположении упругого поведения материала с последующей их корректировкой (приведением на круг текучести) в том случае, если материал находится в пластическом состоянии.

Далее определяются новые радиальная и осевая координаты индивидуальных точек

$$\hat{r}_{(i,j)} = r_{(i,j)} + \Delta t v_{r(i,j)}; \quad \hat{z}_{(i,j)} = z_{(i,j)} + \Delta t v_{z(i,j)},$$

в соответствии с которыми производится процедура перераспределения индивидуальных точек по ячейкам

эйлеровой сетки. Для каждой индивидуальной точки определяются новые номера i и j эйлеровой ячейки, в которой она оказывается на новом временном слое. При этом если в какую-либо ячейку эйлеровой сетки попадает несколько индивидуальных точек, то все эти точки заменяются одной, с присвоением ей параметров, усредненных по параметрам „сосыжковавшихся“. Исключение составляют точки, находящиеся на границе, занятой средой (эйлеровы ячейки, в которых расположены эти точки, имеют среди окружающих соседних ячеек хотя бы одну пустую). Данные точки позволяют отслеживать границу среды и потому наделяются более высоким приоритетом. Если в одной эйлеровой ячейке оказывается несколько индивидуальных точек, одна из которых является граничной, то в расчете оставляется только граничная точка, а остальные из дальнейшего расчета исключаются. Таким образом, в каждый момент времени в любой эйлеровой ячейке обеспечивается возможность расположения только одной лагранжевой точки. После перераспределения индивидуальных точек по ячейкам эйлеровой сетки описанная вычислительная процедура повторяется. Для сквозного расчета ударных волн в рассмотренную схему вводится искусственная вязкость [12].

Шаг численного интегрирования по времени Δt на основании условия устойчивости Куранта [12] выбирается удовлетворяющим неравенству

$$\Delta t < \min_{(i,j)} \frac{\Delta l}{c_{(i,j)} + \sqrt{v_{r(i,j)}^2 + v_{z(i,j)}^2}},$$

где $c_{(i,j)}$ — скорость звука в лагранжевых точках, Δl — меньшая величина из шагов эйлеровой сетки по радиальной Δr и осевой Δz координатам (обычно используется эйлерова сетка с квадратными ячейками, так что $\Delta r = \Delta z$).

Описанный вычислительный метод был апробирован на решении широкого круга задач взрывного и ударного нагружения сплошных сред (в том числе и задач проникания) и хорошо себя зарекомендовал [13,14]. К числу его достоинств следует отнести возможность расчета движений сплошной среды с большими деформациями, без использования специальных процедур перестройки расчетной сетки.

Так же как и в случае использования инженерной методики, определение динамики проникания ударников в грунтовые преграды на основе численного моделирования требует задания ряда величин, характеризующих физико-механические свойства конкретной преграды (например, параметров в зависимости сдвиговой прочности среды от давления или в уравнении сжимаемости среды). Очевидно, задача получения данных о свойствах различных грунтовых преград, необходимых для проведения расчетов по прониканию ударников, не может решаться без привлечения экспериментальных методов.

Пьезоакселерометрия проникания

С учетом сказанного выше ясно, что достоверность информации о параметрах процесса проникания, получаемой с использованием расчетных методик, должна обеспечиваться их опорой на результаты соответствующих экспериментов. Проведение экспериментальных исследований необходимо как для создания банка данных по физико-механическим характеристикам грунтовых преград, используемым в расчетных методиках, так и для тестирования самих методик.

Важное место в экспериментальных исследованиях проникания ударников занимают методы с применением высокоскоростной фото- и рентгеноимпульсной съемки [15], установкой специальных датчиков в среднемишени [3] и в ударнике [16,17]. При этом при проведении экспериментов в зависимости от решаемых с их помощью задач реализуется как прямая (ударник движется, а преграда покоится), так и обратная (разгоняется преграда, а ударник неподвижен) схемы взаимодействия. В [16,17] отмечается, что размещение датчиков в ударнике позволяет более точно отслеживать историю его нагружения при взаимодействии с преградой.

При этом использование в экспериментах ударников, оснащенных датчиками, влечет, как правило, переход к обратной схеме взаимодействия, так как в противном случае возникают проблемы, связанные с обеспечением сохранности датчиков в процессе разгона ударника в баллистической установке и сложностью организации надежной электрической связи датчика на движущемся с высокой скоростью (сотни метров в секунду) ударнике с регистрирующей аппаратурой. Реализация обратной схемы взаимодействия требует увеличения мощности баллистической установки вследствие того, что обычно приходится разгонять существенно более массивную по сравнению с ударником преграду. Кроме того, ускорение на баллистической установке грунтовой преграды, размещаемой для этого в специальном металлическом поддоне-контейнере, имеет и другие нежелательные последствия. Они связаны с малой прочностью грунтовой преграды и ее высокой сжимаемостью из-за наличия большого количества воздушных пор. Вследствие действующей при разгоне перегрузки может происходить неконтролируемое изменение физико-механических свойств грунтовой преграды (например, ее плотности), что затрудняет последующий анализ результатов экспериментов. Возникает также необходимость учета влияния на динамику нагружения ударника прочного металлического контейнера, в который помещается разгоняемый объем грунта.

Для того чтобы избежать искажения условий взаимодействия, возникающих при реализации обратной схемы метания, в разработанной экспериментальной методике определения истории замедления недеформируемых или слабдеформируемых ударников в процессе проникания в грунтовые преграды осуществлялся разгон ударника, а преграда была неподвижной. Динамика

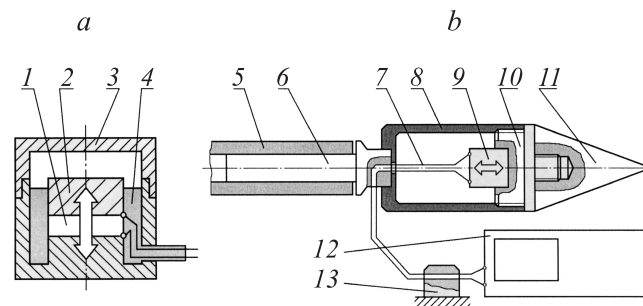


Рис. 2. Экспериментальная сборка для проведения пьезоакселерометрии проникания ударника в преграду: *a* — конструктивная схема пьезоакселерометра (1 — пьезоэлемент, 2 — инерционная масса, 3 — корпус, 4 — эпоксидный компаунд); *b* — конструктивная схема ударника (5 — ствол баллистической установки, 6 — направляющий стержень-хвостовик, 7 — провод электрической связи, 8 — корпус ударника, 9 — пьезоакселерометр, 10 — платформа, 11 — головная часть, 12 — регистрирующая аппаратура, 13 — фиксирующий узел).

торможения ударника определялась на основании пьезоакселерометрии с использованием датчиков, действие которых основано на прямом пьезоэффекте [18,19]. При этом удалось преодолеть трудности, связанные с передачей информации от пьезоакселерометров, размещенных в движущемся ударнике, к стационарной регистрирующей аппаратуре.

Как показал предварительный анализ, по частотным характеристикам и пределам измерений для исследования взаимодействия с малопрочными грунтовыми преградами ударников массой свыше 0.5 kg и скорости в несколько сотен метров в секунду приемлемы промышленные ударные пьезоакселерометры [20] с амплитудным значением измеряемых ускорений до 10^6 m/s^2 и нижней собственной частотой в закрепленном состоянии в диапазоне 100–180 kHz. В связи с достаточно высокой стоимостью пьезоакселерометров была произведена их конструктивная доработка с целью обеспечения возможности многократного использования пьезоакселерометров в экспериментах [21]. Доработка заключалась в увеличении прочности соединения инерционной массы и пьезоэлемента за счет скрепления их по боковой поверхности эпоксидным компаундом (рис. 2, *a*, стрелками показано направление чувствительной оси пьезоэлемента, которое должно совпадать с направлением полета ударника). Проведенное сравнительное тестирование при одинаковых условиях ударного нагружения показало сохранение паспортных характеристик пьезоакселерометров до и после доработки.

Конструкция ударника, разработанного для проведения экспериментов с пьезоакселерометрией проникания, представлена на рис. 2, *b*. Пьезоакселерометр 9 устанавливается на платформе 10, выполненной из стали. К платформе привинчиваются стальная головная часть 11, которая может иметь различную форму, и корпус ударника 8, изготовленный из алюминиевого сплава. В донной части корпуса имеется отверстие,

через которое проходит провод 7 для передачи электрического сигнала от пьезоакселерометра к регистрирующей аппаратуре 12. Этот провод фиксируется в передней части направляющего стержня-хвостовика 6, который также крепится к донной части корпуса. Фиксация провода электрической связи на выходе из корпуса ударника исключает возможность передачи через провод механического воздействия на пьезоакселерометр в процессе движения ударника. Разгон ударника осуществляется с помощью пороховой баллистической установки. Направляющий стержень-хвостовик имеет диаметр, равный диаметру канала ствола 5 баллистической установки, и перед выстрелом вставляется в ствол со стороны дульного среза. Для защиты провода электрической связи от воздействия имеющих высокую температуру пороховых газов, истекающих из ствола с большой скоростью (существенно превышающей скорость ударника) после выхода за дульный срез направляющего стержня, в передней части последнего сразу после места фиксации провода предусмотрена защитная юбка. Форма и размеры защитной юбки выбирались на основе анализа картины ее обтекания потоком пороховых газов при выстреле, получаемой с использованием высокоскоростной оптической съемки. Противоположный конец провода электрической связи, подсоединяемый к регистрирующей аппаратуре, также прочно закрепляется в специальном фиксирующем узле 13 (рис. 2, *b*) для предотвращения возможности передачи через провод механических нагрузок на аппаратуру в процессе выстрела. Длина участка провода между ударником и фиксирующим узлом на входе регистрирующей аппаратуры определяется размерами баллистической трассы и глубиной проникания ударника в преграду.

Использовавшийся в эксперименте ударник описанной конструкции (рис. 2, *b*) имел диаметр корпуса 40 mm, его полная масса (вместе с направляющим стержнем-хвостовиком) в зависимости от формы и размеров привинчиваемой головной части изменялась в диапазоне от 0.53 до 0.59 kg. Эксперименты с непрерывной регистрацией ускорения ударника были проведены применительно к прониканию в пластилиновую преграду. Пластилин имеет физико-механические свойства (плотность и прочность), близкие к свойствам глинистых грунтов, и часто используется в качестве модельной малопрочной среды, заменяющей грунт, в исследованиях проникания ударников [22,23]. Пластилиновый блок-мишень имел форму прямоугольного параллелепипеда

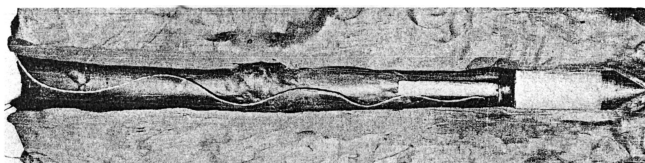


Рис. 3. Разрез пластилиновой мишени с проникшим в нее ударником.

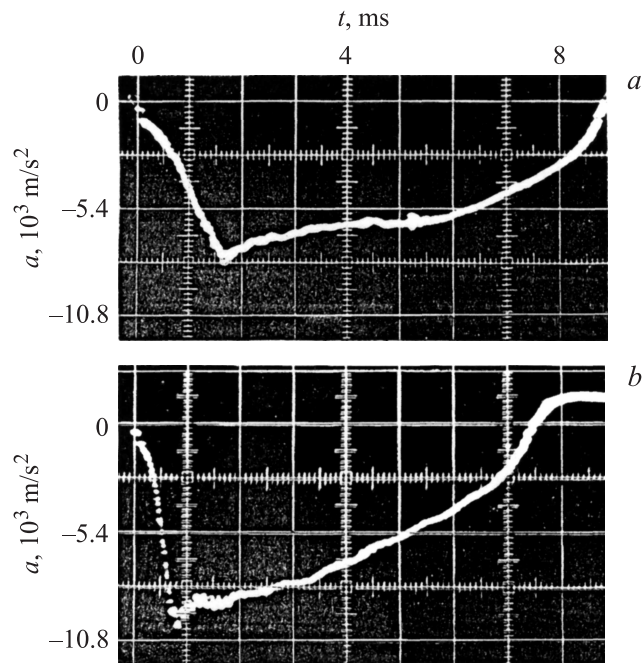


Рис. 4. Осциллограммы торможения ударников с различными углами раствора конической головной части при проникании в пластилиновую мишень: *a* — $2\gamma = 30^\circ$, $v_0 = 45$ m/s; *b* — $2\gamma = 60^\circ$, $v_0 = 44$ m/s.

размером $0.6 \times 0.6 \times 1.5$ m. На рис. 3 для иллюстрации типичной картины взаимодействия представлен разрез пластилинового блока после проведения эксперимента вдоль образованной при проникании ударника каверны, у дна которой находится остановившийся в результате торможения ударник, а вслед за ним по каверне тянется провод электрической связи с регистрирующей аппаратурой.

На рис. 4 приведены осциллограммы торможения при проникании в пластилин по нормали к свободной поверхности ударников с углами раствора 2γ конической головной части 30° (рис. 4, *a*) и 60° (рис. 4, *b*), при начальной скорости взаимодействия соответственно 45 и 44 m/s (масса ударников соответственно 0.59 и 0.53 kg). Коэффициент преобразования используемого пьезоакселерометра составлял 0.05 pC/g. Метрологический анализ проведенных экспериментов, осуществленный с использованием данных [18–20], показал, что для реализованных условий проведения испытаний относительная погрешность в определении ускорения ударников составляет 5–7% при доверительной вероятности 0.95 (это означает, что погрешность измерений не выходит за пределы толщины следа луча на осциллограмме).

На приведенных осциллограммах (рис. 4) четко выделяются первый и второй этапы проникания. На первом этапе ($h < h_c$) происходит увеличение абсолютного значения ускорения ударников в связи с возрастанием площади контакта головной части с пластилином, на втором этапе ($h > h_c$) абсолютное значение ускорения монотонно уменьшается. Максимум перегрузки, испы-

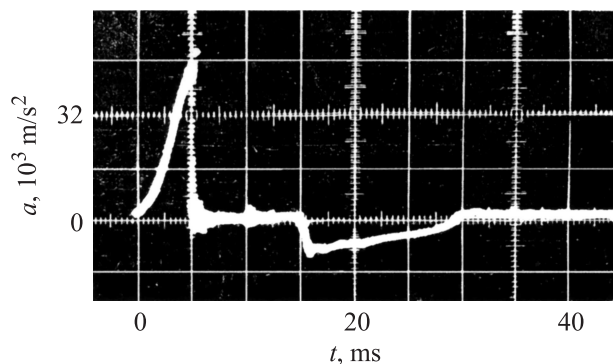


Рис. 5. Осциллограмма разгона ударника в баллистической установке и последующего торможения в пластилиновой мишени ($2\gamma = 30^\circ$, $v_0 = 125 \text{ м/с}$).

тываемой ударниками, достигается при их проникании в пластилин на глубину, равную высоте конической головной части. Для ударника с углом раствора конуса $2\gamma = 60^\circ$ максимальная перегрузка примерно на 20% выше, чем при $2\gamma = 30^\circ$.

На рис. 5 представлен результат измерения ускорения ударника с углом раствора конической головной части $2\gamma = 30^\circ$ на всех этапах баллистического цикла — от начала разгона при выстреле из баллистической установки до полной остановки при проникании в пластилиновую мишень. Видно, что ударник примерно в течение 5 мс движется с положительным ускорением, разгоняясь в баллистической установке. На этапе разгона ускорение ударника постоянно возрастает, достигая к моменту выхода направляющего стержня-хвостовика за дульный срез значения около $5 \cdot 10^4 \text{ м/с}^2$. Непрерывный рост ускорения в процессе выстрела свидетельствует о том, что пороховой заряд не успевает полностью сгореть за время движения разгонной части ударника по стволу. Горение пороха сопровождается интенсивным газовыделением и соответственно повышением давления в канале ствола и увеличением силы, действующей на ударник и разгоняющей его. В момент выхода разгонной части ударника за дульный срез баллистической установки происходит резкий спад ускорения до нулевого значения, и в течение примерно 10 мс ударник летит к мишени с постоянной скоростью (скорость, до которой разогнался ударник, составляет около 125 м/с). Далее на осциллограмме фиксируется процесс замедления ударника при проникании в пластилиновую мишень (примерно в течение 15 мс до момента полной остановки ударник движется с отрицательным ускорением). Следует обратить внимание на равенство площадей фигур, образованных на осциллограмме (рис. 5) горизонтальной нулевой линией с кривой ускорения ударника при выстреле из баллистической установки и с кривой его замедления при проникании в пластилин. Обе эти площади определяются, очевидно, скоростью, до которой разгоняется ударник.

Результаты расчетов

С использованием результатов пьезоакселерометрии проникания ударников в пластилиновую мишень были определены параметры, характеризующие физико-механические свойства данной преграды и используемые в представленных в настоящей работе расчетных методиках, на основании чего было осуществлено тестирование этих методик.

Для определения коэффициентов A , B и C , входящих в закон сопротивления (1), на котором базируется инженерная методика расчета, использовались экспериментальные данные по торможению ударников с углами раствора 2γ конической головной части 30° и 60° , представленные на рис. 4. В результате интегрирования указанных осциллограмм были получены зависимости скорости ударников от времени

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt,$$

что, в свою очередь, позволило установить соответствие в экспериментах между текущими значениями скорости и ускорения ударников $a(v)$, проиллюстрированное на рис. 6.

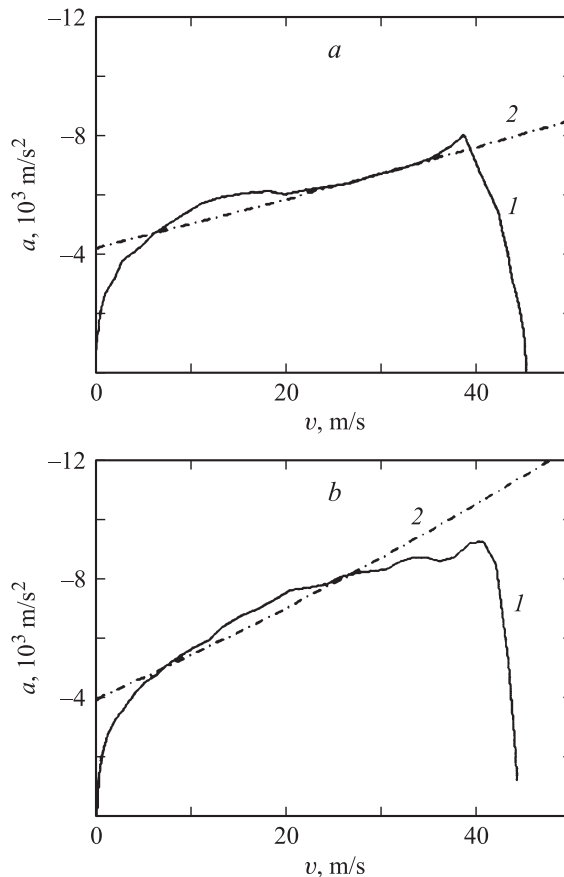


Рис. 6. Зависимость ускорения ударника от его скорости при проникании в пластилин (1 — обработка экспериментальных данных, 2 — расчет по инженерной методике): a — $2\gamma = 30^\circ$, $v_0 = 45 \text{ м/с}$; b — $2\gamma = 60^\circ$, $v_0 = 44 \text{ м/с}$.

Участки зависимостей ускорения ударников от скорости, полученных обработкой экспериментальных данных, на которых ускорение уменьшается с ростом скорости (рис. 6), соответствуют первому этапу проникания, когда происходит изменение площади контакта головной части ударника с преградой. При определении коэффициентов в законе сопротивления (1) эти участки во внимание не принимались и расчет данных коэффициентов производился на основании динамики торможения ударников на втором этапе проникания. Расчетное значение ускорения F_p/m для этого этапа, определяемое с использованием для вычисления силы сопротивления F_p соотношения (4), оказывается зависящим только от текущей скорости ударника. Коэффициенты A, B и C в данной зависимости ускорения от скорости были рассчитаны с привлечением метода наименьших квадратов [24] из условия близости расчетных значений к полученным обработкой экспериментальных данных на участках, соответствующих второму этапу проникания (для коэффициента поверхностного трения пластилиновой преграды в расчетной зависимости использовалось значение $\mu = 0.1$).

При этом коэффициент A , определяющий инерционную составляющую сопротивления преграды в (1), был принят равным $A = \rho_0/2$, где $\rho_0 = 1500 \text{ kg/m}^3$ — плотность пластилина в нормальных условиях. Данное значение A несколько отличалось от значения, получаемого на основе формальной обработки результатов экспериментов. Однако это практически не сказалось на точности расчета силы сопротивления для рассматриваемых экспериментов (рис. 4), так как они были проведены при относительно невысокой скорости взаимодействия (несколько десятков метров в секунду), когда влияние инерционного слагаемого в (1) несущественно по сравнению с другими составляющими сопротивления преграды. Определив значение A указанным выше образом, получим возможность удобной интерпретации инерционного сопротивления $\rho_0 v_n^2/2$ как давления торможения потока материала преграды (предполагаемого несжимаемым) на жесткой границе, вытекающего из уравнения Бернулли [6]. Кроме того, как будет видно далее, закон сопротивления (1) пластилиновой мишени с коэффициентом инерционной составляющей $A = \rho_0/2$ позволяет хорошо описать динамику проникания ударников при более высоких скоростях взаимодействия, когда инерционное сопротивление становится преобладающим. Отметим, что установленная возможность использования для пластилиновой преграды значения $A = \rho_0/2$ обусловлена, очевидно, относительно невысокой сжимаемостью пластилина. Для грунтов, обладающих существенной сжимаемостью (вследствие содержания большого количества воздушных пор), значение коэффициента A оказывается больше чем $\rho_0/2$ и в предельном случае при реализации так называемого „ньютонова“ обтекания [15] стремится к значению ρ_0 [3].

Что же касается коэффициентов B и C в зависимости (1), то для них по результатам экспериментов (рис. 4) были получены значения $B = 1.04 \cdot 10^5 \text{ Pa}\cdot\text{c/m}$,

$C = 1.44 \text{ МПа}$. Следует отметить, что значение коэффициента C , определяющего прочностное сопротивление преграды, оказывается близким к сдвиговой прочности (пределу текучести) пластилина. На рис. 6 проведено сопоставление экспериментальных данных с расчетными зависимостями ускорения ударников ($2\gamma = 30^\circ$ и 60°) от скорости, свидетельствующее об их хорошем соответствии при приведенных значениях коэффициентов A, B и C .

Зафиксированная в экспериментах (рис. 4) динамика торможения ударников была использована также для „настройки“ методики численного моделирования. При относительно невысоких скоростях взаимодействия, реализованных в данных экспериментах, основное влияние на динамику проникания в соответствии с рассмотренной физико-математической моделью оказывают параметры в условии пластичности Мизеса—Шлейхера (7), определяющем прочностное сопротивление материала преграды. Так как в отличие от грунта пластилин не является сыпучей средой, его сдвиговая прочность полагалась не зависящей от действующего давления ($\psi = 0$). В этом случае условие (7) переходит в условие пластичности Мизеса [9], включающее только одну характеристику материала — его предел текучести σ_{Y0} . Данное значение и определялось для пластилина на основании сопоставления результатов численного моделирования с экспериментальными данными для ударников с углами раствора 2γ конической головной части 30° и 60° . Наилучшее соответствие было получено при значении $\sigma_{Y0} = 1.2 \text{ МПа}$.

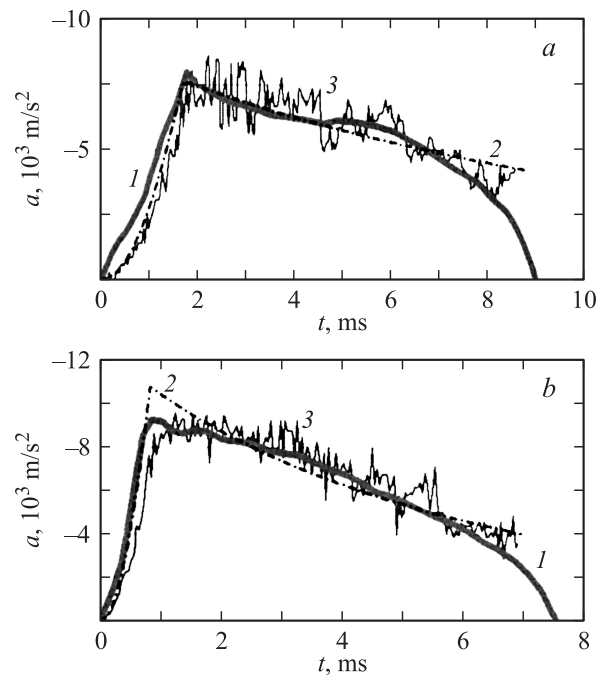


Рис. 7. Сравнение экспериментальных и расчетных данных по торможению в пластилине ударников с различными углами раствора конической головной части (1 — эксперимент, 2 — расчет по инженерной методике, 3 — численное моделирование): а — $2\gamma = 30^\circ$, $v_0 = 45 \text{ m/s}$; б — $2\gamma = 60^\circ$, $v_0 = 44 \text{ m/s}$.

На рис. 7 расчетные кривые изменения ускорения ударников с течением времени, полученные на основе инженерной методики и методики численного моделирования применительно к условиям проведения экспериментов (рис. 4), наложены на соответствующие осциллограммы. Видно, что между расчетными и экспериментальными результатами наблюдается хорошее соответствие на протяжении всего периода торможения. Нужно отметить только, что небольшой „дребезг“, которым сопровождается изменение ускорения ударников при численном моделировании процесса проникания, имеет счетное происхождение. Он обусловлен заменой непрерывной сплошной среды (материала преграды) набором отдельных индивидуальных точек, каждая из которых представляет по сути осциллятор с собственной частотой колебаний, возрастающей с измельчением расчетной сетки [12]. Однако данный счетный эффект незначительно затеняет общий характер изменения ускорения, а при интегрировании этой зависимости и получении законов изменения скорости и пройденного ударником в преграде пути осцилляции вообще уже не наблюдаются.

Дополнительное тестирование расчетных методик было осуществлено с использованием результатов эксперимента (рис. 5), проведенного при более высокой скорости взаимодействия. В расчетах применительно к условиям данного эксперимента использовались параметры среды (коэффициенты в законе сопротивления и предел текучести), определенные выше на основании обработки экспериментальных данных, представленных на рис. 4. Несмотря на то что скорость взаимодействия возросла почти в 3 раза, расчетные кривые изменения ускорения ударника по-прежнему находятся в хорошем соответствии с результатами пьезоакселерометрии (рис. 8). На рис. 8 приводятся также конфигурация каверны и положение ударника в пластилиновой мишени в различные моменты времени по результатам численного моделирования (при этом окраска материала преграды определяется распределением его плотности). По изменению окраски в области преграды за ударником видно, что проникание сопровождается колебаниями ее материала (главным образом, радиальными), в ходе которых происходят и небольшие изменения плотности. Эти колебания связаны с ограниченным задаваемым размером расчетной области (и соответственно ограниченным размером преграды), выбор которого диктуется разумной продолжительностью численного расчета. Как свидетельствует кривая изменения ускорения ударника, полученная в результате численного моделирования (рис. 8), на динамику его движения возникающие в преграде колебания влияют слабо.

Близкое согласие проведенных расчетов с результатами экспериментов дало основание применить расчетные методики, чтобы продолжить зависимости силы сопротивления от скорости при проникании в пластилин в область скоростей в несколько сотен метров в секунду (рис. 9). Данные зависимости рассчитывались для второго этапа проникания применительно к ударникам с

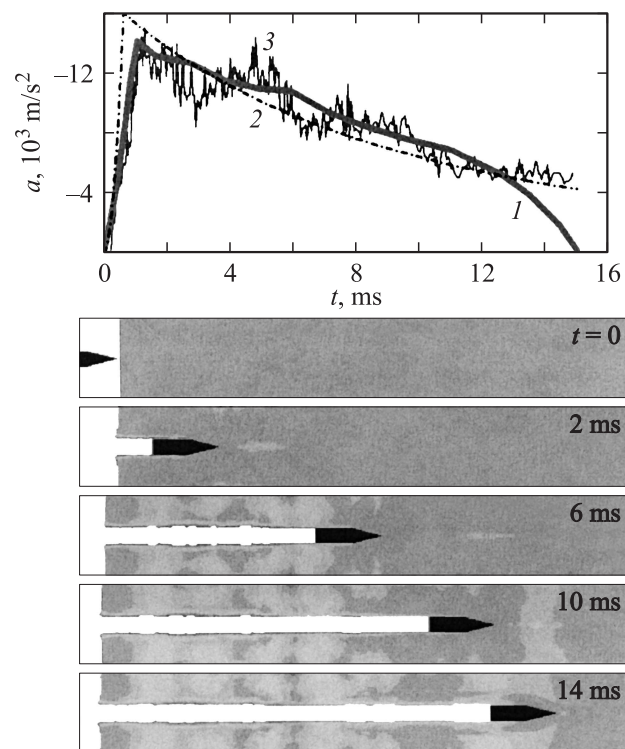


Рис. 8. Проникание в пластилиновую мишень ударника с углом раствора конической головной части 30° при начальной скорости 125 m/s (1 — эксперимент, 2 — расчет по инженерной методике, 3 — численное моделирование).

рассматривавшимися выше углами раствора конической головной части. При угле конуса $2\gamma = 30^\circ$ результаты, полученные на базе инженерной методики и методики численного моделирования, практически совпали. Для ударника с $2\gamma = 60^\circ$ расчет по инженерной методике дал

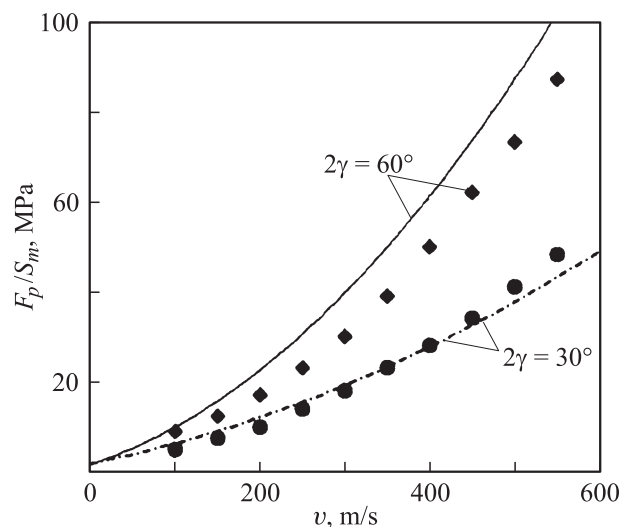


Рис. 9. Зависимость удельной силы сопротивления от скорости при проникании в пластилин ударников с различными углами раствора конической головной части (линии — расчет по инженерной методике, значки — численное моделирование).

в области высоких скоростей значение силы сопротивления несколько выше (на 10–15%) прогнозируемого по результатам численного моделирования. В целом было зафиксировано, что с увеличением скорости возрастание силы сопротивления для ударника с большим углом раствора головной части происходит более резко. Если при $v = 100 \text{ m/s}$ ударник с $2\gamma = 60^\circ$ испытывал сопротивление примерно на 30% выше, чем ударник с $2\gamma = 30^\circ$, то при увеличении скорости до 500 m/s это различие достигает уже 50% (рис. 9).

Заключение

Разработанный комплекс расчетных и экспериментальных методик позволяет эффективно решать широкий круг задач, связанных с определением динамики проникания недеформируемых и слабodeформируемых ударников в грунтовые преграды. Проведенные на его основе исследования торможения ударников в пластилине, часто используемом в качестве модельной малопрочной среды, заменяющей грунт, подтвердили возможность использования одних и тех же коэффициентов в законе сопротивления преграды (1) для ударников с различной формой головной части. На основе данного закона могут достаточно просто решаться задачи пространственного проникания, возникающие в тех случаях, когда взаимодействие ударника с преградой происходит под углом или при движении ударника с углом атаки [25]. Численное моделирование проникания с позиций механики сплошных сред оправдано в ситуациях, требующих выяснения каких-либо „тонких“ физических особенностей процесса, например при определении границ области контакта с преградой головной части ударника, имеющей криволинейную образующую.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-08-00341-а) и АВЦП „Развитие научного потенциала высшей школы“ (проект 2.1.2/2792).

Список литературы

- [1] Фридляндер Л.Я., Афанасьев В.В., Воробьев Л.С. и др. Прострелочно-взрывная аппаратура: Справочник. М.: Недра, 1990.
- [2] Велданов В.А., Смирнов В.Е., Хаврошкин О.Б. // Астрономический вестник. 1999. Т. 33. № 5. С. 490–494.
- [3] Allen W.A., Mayfield E.B., Morrison H.L. // J. Appl. Phys. 1957. Vol. 28. N 3. P. 370–376.
- [4] Велданов В.А., Федоров С.В. // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 6. С. 116–127.
- [5] Велданов В.А. // Мат. XIII Междунар. симп. „Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред“ им. А.Г. Горшкова. М.: МАИ, 2007. С. 55–56.
- [6] Сагомонян А.Я. Проникание. М.: Изд-во МГУ, 1974.
- [7] Григорян С.С. // Прикладная механика и техническая физика. 1960. Т. 24. № 6. С. 1057–1072.
- [8] Вовк А.А., Замышляев Б.В., Евтерев Л.С. и др. Поведение грунтов под действием импульсных нагрузок. Киев: Наук. думка, 1984.
- [9] Бабкин А.В., Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. В 3 т. Т. 1. Основы механики сплошных сред. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.
- [10] Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. (Oran E., Boris J. Numerical Simulation of Reactive Flow. NY: Elsevier, 1987.)
- [11] Уилкинс М.Л. // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263. (Wilkins M.L. // Methods in Computational Physics. NY: Academic Press, 1964. P. 211–263.)
- [12] Бабкин А.В., Колпаков В.И., Охитин В.Н., Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. В 3 т. Т. 3. Численные методы в задачах физики взрыва и удара. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
- [13] Федоров С.В., Велданов В.А. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 7. С. 134–137.
- [14] Федоров С.В. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 10. С. 131–134.
- [15] Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И., Попов Н.Н. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974.
- [16] Forrestal M.J., Lee L.M., Jenrette B.D. // J. Appl. Mech. 1984. Vol. 51. N 9. P. 602–607.
- [17] Велданов В.А., Сотский М.Ю. // Мат. XI Междунар. симп. „Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред“. Т. 1. М.: МАИ, 2005. С. 14–15.
- [18] Баженов А.А., Лобастов С.А., Яровиков В.И. // Метрология. 2003. № 10. С. 25–35.
- [19] Шкаликов В.С., Пеллинец В.С., Исаакович Е.Г. и др. Измерение параметров вибрации и удара. М.: Стандарты, 1980.
- [20] Баженов А.А., Лобастов С.А., Яровиков В.И. // Метрология. 2003. № 11. С. 19–32.
- [21] Велданов В.А., Ручко А.М., Сотский М.Ю. // Тез. докл. XIV Междунар. симп. „Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред“ им. А.Г. Горшкова. М.: МАИ, 2008. С. 86–87.
- [22] Бивин Ю.К. // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 1. С. 93–101.
- [23] Осипенко К.Ю., Симонов И.В. // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 1. С. 151–161.
- [24] Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. М.: Высш. шк., 1982.
- [25] Велданов В.А., Жариков А.В. // Мат. XIII Междунар. симп. „Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред“ им. А.Г. Горшкова. М.: МАИ, 2007. С. 56–57.