

01;03

Отклонения от закона дефекта скорости, наблюдаемые при малых значениях числа Рейнольдса

© Ю.Г. Чесноков

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
198013 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: ygchesnokov@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 19 октября 2010 г.)

На основе результатов, которые получены различными авторами при помощи метода прямого численного моделирования, изучены отклонения от закона дефекта скорости при турбулентном течении по плоским каналам и трубам кругового поперечного сечения.

Введение

Будем рассматривать развитое турбулентное течение жидкости в плоском канале или круглой трубе с гладкими стенками. Течение рассматривается на достаточно больших расстояниях от входа в канал или трубу, где условия на входе уже не сказываются. В этом случае единственной отличной от нуля составляющей средней скорости жидкости является продольная U . Все статистические характеристики течения зависят лишь от расстояния до рассматриваемой точки от стенки канала или трубы. При заданных размерах канала или трубы и заданной плотности ρ , а также кинематической вязкости жидкости ν закономерности течения определяются лишь постоянным по длине канала или трубы продольным градиентом давления. В частности, градиентом давления будут однозначно определяться осевая скорость жидкости U_0 , средняя по сечению канала или трубы скорость U_b и напряжение трения на стенке τ .

Вместо напряжения трения обычно вводят в рассмотрение так называемую динамическую скорость $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$ (см., например, работу Мони́на и Ягло́ма [1]). Поэтому значения статистических характеристик течения на расстоянии y от стенки должны зависеть лишь от следующих величин: ρ , ν , y , h (здесь через h обозначена полуширина плоского канала или радиус трубы) и одной из скоростей U_0 , U_b или u_τ . Выберем в качестве характерной скорости динамическую скорость u_τ . Тогда из пяти определяющих параметров можно составить только две безразмерные комбинации: безразмерное расстояние от стенки $Y = y/h$ и число Рейнольдса, определенное по динамической скорости: $Re_\tau = u_\tau h/\nu$. Следовательно, должно иметь место следующее соотношение:

$$U(y) = u_\tau \varphi(Y, Re_\tau).$$

Здесь φ — некоторая универсальная функция, различная для плоских каналов и для труб кругового поперечного сечения. При малых значениях Y ($Y \ll 1$) характерный линейный размер h становится несущественным [1,2], так что функция φ может зависеть лишь от произведений аргументов Y и Re_τ . Следовательно, должно иметь

место равенство:

$$U(y) = u_\tau \varphi_1(u_\tau y/\nu).$$

Это так называемый закон стенки. Впрочем, при сравнительно малых значениях Re_τ определенные отклонения от закона стенки все же имеются [3–5]. Вдали от стенок канала или трубы касательное напряжение Рейнольдса значительно превышает вязкое напряжение. Поэтому закономерности изменения скорости в турбулентном ядре потока не должны зависеть явным образом от вязкости жидкости. В этой области выполняется соотношение:

$$\frac{dU(y)}{dy} = \frac{u_\tau}{h} f\left(\frac{y}{h}\right). \quad (1)$$

Из формулы (1) вытекает, что справедливо следующее соотношение:

$$\frac{U_0 - U(y)}{u_\tau} = F\left(\frac{y}{h}\right) = F(Y). \quad (2)$$

Соотношение (2) известно как закон дефекта скорости. Оно выполняется вне сравнительно узкой зоны, прилегающей к стенке канала или трубы. Впервые оно было предложено исходя из экспериментальных данных для течений в трубе, еще Карманом и в дальнейшем неоднократно проверялось. Исходя из формулы (1) можно сделать также определенные выводы о зависимости от координаты Y касательного напряжения Рейнольдса. Для течения в плоском канале обозначим через u и v продольную и поперечную (в направлении нормали к стенке) составляющие пульсационной скорости жидкости. При помощи черты над величиной будем обозначать операцию осреднения (например, по ансамблю реализаций турбулентного потока). Безразмерные скорости (отнесенные к динамической скорости u_τ) принято обозначать при помощи надстрочного индекса „плюс“. Если уравнение Рейнольдса для скорости U проинтегрировать один раз по координате y , получается следующее:

$$Re_\tau \frac{dU^+}{dY} - \overline{u^+v^+} = 1 - Y.$$

Таким образом, зависимость касательного напряжения трения от координаты Y имеет вид:

$$-\overline{u^+v^+} = 1 - Y - Re_\tau f(Y).$$

Вблизи оси канала вязкие напряжения малы и эта формула упрощается: $u^+v^+ \approx 1 - Y$.

В течение нескольких последних десятилетий для изучения сравнительно простых турбулентных течений используется метод прямого численного моделирования. В частности, имеются как работы, посвященные прямому численному моделированию турбулентных течений в плоском канале [6–11], так и работы, в которых изучаются турбулентные течения в круглой трубе [12–16]. Хотя значения числа Рейнольдса Re_τ , при которых возможно осуществить расчеты, сравнительно невелики (для течений в плоском канале наибольшее значение этого параметра составляет 2000), они дают много разнообразной информации о закономерностях таких течений.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы при помощи данных прямого численного моделирования, полученных различными авторами, изучить возможные отклонения от закона дефекта скорости, наблюдаемые при сравнительно малых значениях числа Рейнольдса.

Турбулентные течения в плоском канале

В силу определения величина дефекта скорости $U_0^+ - U^+(Y)$ на оси канала (при $Y = 1$) обращается в нуль. Если предположить, что при малых расстояниях до оси $\eta = 1 - Y$ зависимость дефекта скорости от η можно разложить в ряд Тэйлора по степеням η , то в силу симметрии течения относительно оси такое разложение должно содержать только четные степени η и разложение должно начинаться со слагаемых порядка не ниже η^2 . Из-за возможных погрешностей при расчете скорости вблизи оси канала судить о поведении дефекта скорости при малых η по данным прямого численного моделирования сложно. Однако можно отметить следующее. Если на каком-либо интервале значений η зависимость дефекта скорости от η является степенной, то функция $(\eta dU/d\eta)/[U_0 - U(\eta)]$ должна принимать постоянное значение, равное показателю степени степенной зависимости.

На рис. 1 показано, что зависимость дефекта скорости от η мало отличается от квадратичной для широкого диапазона значений η . Поэтому для того, чтобы выявить возможные отклонения от закона дефекта скорости, можно построить зависимости величины $[U_0^+ - U^+(\eta)]/\eta^2$ от расстояния до оси канала. Оказывается (рис. 2), что такие зависимости, построенные по данным прямого численного моделирования, полученным в работе [8], при различных значениях числа Рейнольдса Re_τ не укладываются на одну кривую. В сравнительно широком диапазоне значений η дефект скорости при возрастании Re_τ увеличивается. Сходный характер имеют и кривые, построенные по результатам работ [9,10]. Следует однако отметить, что при сравнительно больших значениях числа Рейнольдса указанная закономерность нарушается. По данным работы [10],

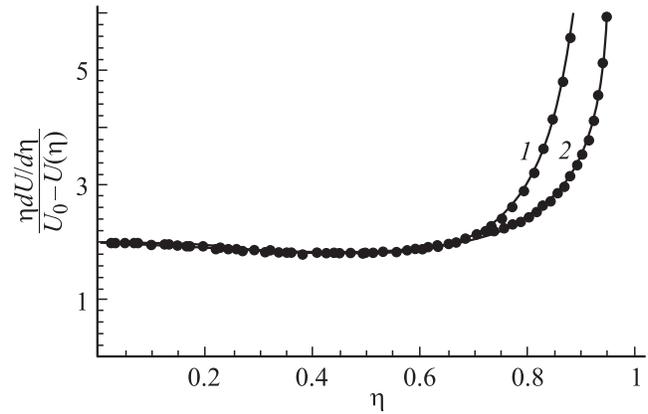


Рис. 1. Зависимости величины $[\eta dU/d\eta]/[U_0 - U(\eta)]$ от расстояния до оси, по данным работы [10]. Зависимости построены при значениях числа Рейнольдса $Re_\tau = 186$ (кривая 1) и 934 (кривая 2).

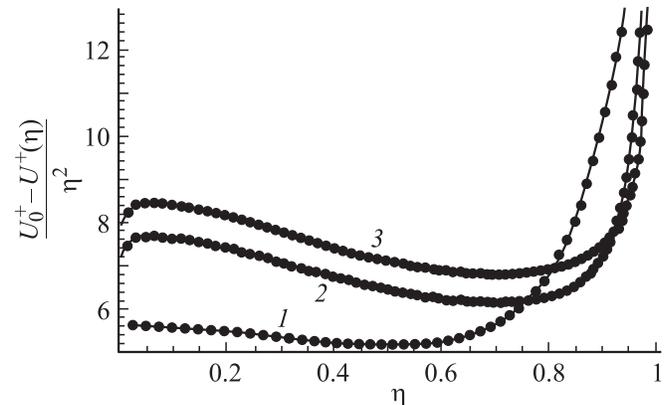


Рис. 2. Зависимости величины $[U_0^+ - U^+(\eta)]/\eta^2$ от расстояния до оси, по данным работы [8]. Зависимости построены при значениях числа Рейнольдса $Re_\tau = 109$ (кривая 1), 298 (кривая 2) и 643 (кривая 3).

кривая, соответствующая наибольшему значению числа Рейнольдса ($Re_\tau = 2004$), в ядре потока располагается не выше, а ниже кривой, построенной для числа Рейнольдса $Re_\tau = 934$. Так как в настоящее время данные для более высоких значений Re_τ отсутствуют, судить о возможных отклонениях от закона дефекта скорости при таких сравнительно больших значениях числа Рейнольдса не представляется возможным. Аналогичным образом и зависимости величины $\eta^{-1}dU^+(\eta)/d\eta$ при различных значениях числа Рейнольдса не укладываются на одну кривую (рис. 3). И в этом случае выявленная закономерность нарушается при больших значениях Re_τ .

Наличие отклонений от закона дефекта скорости необходимо принимать во внимание при построении приближенных выражений для расчета зависимости величины дефекта скорости от расстояния до оси канала. Такого рода зависимость можно построить следующим образом: при каждом значении числа Рейнольдса зависимость величины дефекта скорости от расстояния до оси ап-

проксимировалась при помощи выражения вида

$$U_0^+ = U^+(\eta) = \frac{(c_0 + c_1\eta^2 + c_2\eta^4)\eta^2}{1 + b_1\eta^2 + b_2\eta^4}. \quad (3)$$

При различных значениях Re_τ коэффициенты оказываются различными. Затем строились приближенные выражения для расчета указанных коэффициентов в зависимости от Re_τ . В результате были получены следующие выражения:

$$c_0 = 9.48 - \frac{1896}{(\ln Re_\tau)^4}, \quad c_1 = 14.83 - \frac{11890}{(\ln Re_\tau)^4},$$

$$c_2 = -22.6 + \frac{15020}{(\ln Re_\tau)^4},$$

$$b_1 = 3.59 - \frac{2196}{(\ln Re_\tau)^4}, \quad b_2 = -4.517 + \frac{2258}{(\ln Re_\tau)^4}. \quad (4)$$

Разумеется, предложенная формула теряет пригодность в сравнительно узкой области вблизи стенки канала. Полученные формулы можно рекомендовать для расчета при значениях Re_τ из интервала от 110 до 934 и значениях η из интервала от 0 до 0.98.

На рис. 4 результаты расчетов по этим формулам сопоставлены с данными прямого численного моделирования, полученными в работе [10]. Поскольку между результатами, полученными в различных работах, имеются заметные расхождения, согласование можно признать удовлетворительным. Если считать, что профиль скорости описывается соотношением (3) вплоть до стенок канала, т.е. пренебречь тонким пристенным слоем, то можно проинтегрировать соотношение (3) по сечению канала при ряде значений числа Рейнольдса. В результате получается зависимость величины $U_0^+ - U_b^+$ от числа Рейнольдса. Как видно из рис. 5, результаты такого расчета довольно удовлетворительно согласуются с результатами прямого численного моделирования.

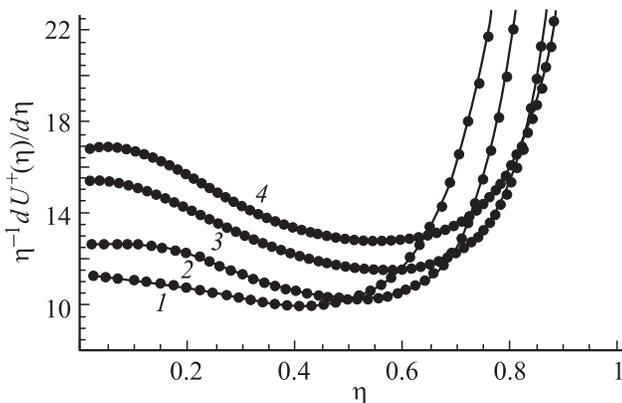


Рис. 3. Зависимости величины $\eta^{-1}dU^+(\eta)/d\eta$ от расстояния до оси, по данным работы [8]. Зависимости построены при значениях числа Рейнольдса $Re_\tau = 109$ (кривая 1), 150 (кривая 2), 298 (кривая 3) и 643 (кривая 4).

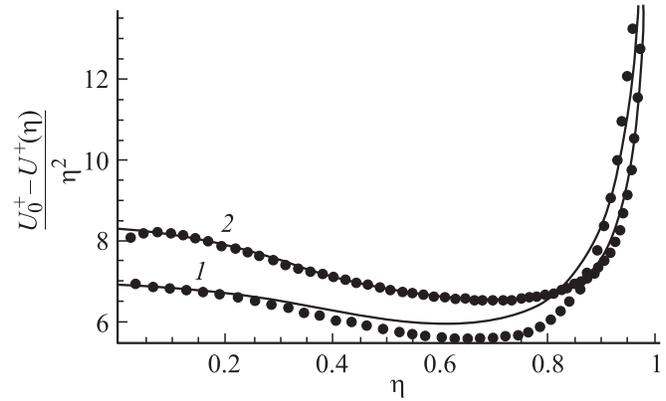


Рис. 4. Зависимости величины $[U_0^+ - U^+(\eta)]/\eta^2$ от расстояния до оси. Точки построены по результатам прямого численного моделирования, полученным в работе [10], сплошные линии по формулам (3), (4) (1 — при $Re_\tau = 186$, 2 — при $Re_\tau = 547$).

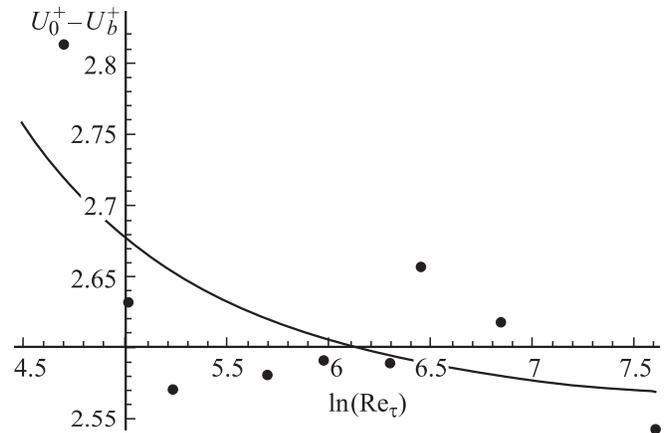


Рис. 5. Зависимость величины $U_0^+ - U_b^+$ от Re_τ в полулогарифмических координатах. Точки построены по результатам прямого численного моделирования, полученным в работах [8,10], сплошная линия по формулам (3), (4).

При расчетах известной величиной обычно является расход жидкости. Поэтому необходимо располагать формулами, которые позволяли бы при заданном расходе определять величины Re_τ и U_0^+ . Примем в качестве характерного линейного размера ширину канала, а в качестве характерной скорости — среднюю по сечению. Введем в рассмотрение число Рейнольдса, определенное по этим параметрам: $Re = 2U_b h/v$. По данным прямого численного моделирования, полученным в работах [8–10], можно построить следующую зависимость:

$$Re_\tau = 0.09235Re^{0.8765}.$$

Зависимость между параметрами U_0^+ и Re , по данным, полученным в работах [8,10], имеет вид:

$$U_0^+ = 7.490Re^{0.1039}.$$

Турбулентные течения в трубе

При сравнительно малых значениях числа Re_τ увеличение дефекта скорости с ростом Re_τ наблюдается и для турбулентного течения по круглой трубе (рис. 6). Основное различие с приведенными выше графиками заключается в быстром уменьшении величины $[U_0^+ - U^+(\eta)]/\eta^2$ вблизи оси трубы. Имеющихся данных недостаточно для построения какой-либо аппроксимации для профиля скорости. Отметим, что сравнительно недавно были получены новые экспериментальные данные [17,18] по распределению скорости при турбулентном течении по трубе с гладкими стенками, причем эти данные охватывают очень широкий диапазон значений числа Рейнольдса. Если, как это принято, вычислять число Рейнольдса по диаметру трубы и средней по поперечному сечению скорости ($Re = U_b d/\nu$, где d — диаметр трубы), то этот параметр в указанных экспериментах изменялся в диапазоне от $7.4 \cdot 10^4$ до $3.6 \cdot 10^7$. Выявить какую-либо зависимость дефекта скорости от величины числа Рейнольдса по этим данным не удастся. При малых расстояниях до оси трубы разброс значений $[U_0^+ - U^+(\eta)]/\eta^2$ довольно велик, так как даже небольшие погрешности при измерении скорости в результате деления на малую величину приводят к значительным погрешностям результата. В целом данные измерений имеют сравнительно небольшой разброс (рис. 7), и во всем указанном диапазоне числа Re зависимость дефекта скорости от координаты η можно аппроксимировать зависимостью вида (3), где коэффициенты принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} c_0 &= 9.696, & c_1 &= 4.129, & c_2 &= -11.17, \\ b_1 &= 1.511, & b_2 &= -2.380. \end{aligned} \quad (5)$$

Разумеется, формула теряет пригодность вблизи стенки трубы, где указанная величина зависит от критерия Рейнольдса. Если соотношение (3), в котором коэффициенты вычисляются по формулам (5), проинтегрировать

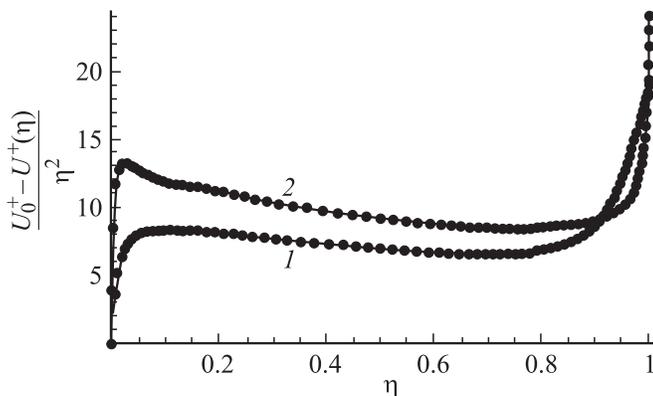


Рис. 6. Зависимости величины $[U_0^+ - U^+(\eta)]/\eta^2$ от расстояния до оси по данным работы [16]. Зависимости построены при значениях числа Рейнольдса $Re_\tau = 182$ (кривая 1) и 1143 (кривая 2).

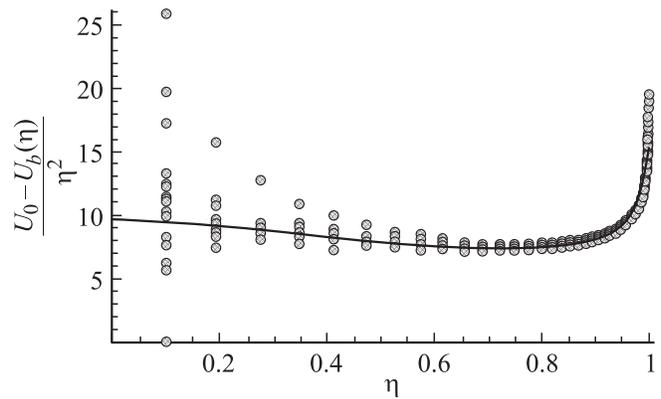


Рис. 7. Зависимости величины $[U_0^+ - U^+(\eta)]/\eta^2$ от расстояния до оси по данным работы [18]. Точки построены по экспериментальным данным, кривая — по формулам (3), (5).

по поперечному сечению трубы, получим следующую формулу:

$$U_0^+ - U_b^+ = 4.320. \quad (6)$$

Среднее арифметическое значение $U_0^+ - U_b^+$, по данным работы [18], равно 4.314. Отметим, что в работе Мони́на и Ягло́ма [1] на основе допущения о том, что профиль скорости является логарифмическим, для данной величины указано значение 3.75. Формула (6) может служить для определения величины U_0^+ для турбулентных течений в трубе, если имеется зависимость для расчета U_b^+ . Такую зависимость можно получить исходя из закона сопротивления. Потери давления в трубах обычно рассчитывают при помощи формулы:

$$\Delta p = \lambda \frac{l \rho U_b^2}{d^2}.$$

Здесь Δp — потеря давления на участке трубы длиной l , d — диаметр трубы, ρ — плотность жидкости, λ — безразмерный коэффициент трения, который для гладких труб зависит только от величины числа Re . Величины λ и U_b^+ связаны между собой следующим образом: $\lambda = 8/U_b^{+2}$. Сравнительно недавно была предложена [9] новая корреляция для расчета λ , которая отличается от обычно используемой формулы значениями числовых коэффициентов:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.930 \lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0.537. \quad (7)$$

Несколько более удобную формулу можно получить, если, как это предлагается в работе Баренблатта [20], считать профиль скорости степенным: $U^+ = c(y^+)^{\alpha}$. Здесь $y^+ = u_\tau y/\nu$ безразмерное расстояние от стенки. Коэффициенты c и α в этой формуле зависят от числа Рейнольдса. На основании экспериментальных данных Никурадзе по течению жидкости в трубах, Баренблатт и Простокишин [21] получили следующие выражения для постоянных c и α :

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln Re + \frac{5}{2}, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln Re}.$$

Если использовать эти выражения для коэффициентов, при расчете λ будут наблюдаться заметные отклонения от данных экспериментов, опубликованных в [22]. Поэтому указанные выражения необходимо пересмотреть в соответствии с данными работ [17,18]. В результате можно получить следующие формулы:

$$c = 0.8283 + 0.6376 \ln \text{Re}, \quad \alpha = \frac{1.294}{-2.817 + \ln \text{Re}}. \quad (8)$$

Предполагая профиль скорости степенным вплоть до оси трубы и пренебрегая тонким слоем сблизи стенки, где эта формула непригодна, для коэффициента трения можно получить [20] следующее выражение:

$$\lambda = 8 \left[\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}{2^{1-\alpha} c \text{Re}^\alpha} \right]^{2/(1+\alpha)}. \quad (9)$$

В работе [20] эта формула записана несколько иначе (она представлена в другой форме при помощи выражений для коэффициентов c и α). Расчеты по формулам (8), (9) хорошо согласуются с экспериментальными данными, полученными МакКеоном с соавторами [22]. В области значений числа Рейнольдса от $7.4 \cdot 10^4$ до $3.5 \cdot 10^7$ относительная погрешность не превышает 0.85%.

Заключение

При сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса для турбулентных течений в плоском канале или трубе наблюдаются отклонения от закона дефекта скорости. При заданном отношении расстояния от оси канала или трубы к полуширине канала или радиусу трубы разность между осевой скоростью и скоростью в данной точке в ядре потока при увеличении числа Рейнольдса возрастает. При небольших значениях числа Рейнольдса распределение скорости по сечению плоского канала может быть рассчитано по формулам (3), (4). Для турбулентного течения в трубе в области значений числа Рейнольдса от $7.4 \cdot 10^4$ до $3.5 \cdot 10^7$ распределение скорости по сечению трубы может быть найдено по формулам (3), (5).

Список литературы

- [1] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. М.: Наука, 1965. 640 с.
- [2] Sreenivasan K.R. // *Frontier in Experimental Fluid Mechanics*. Berlin: Springer, 1989. P. 159–209.
- [3] Antonia R.A., Teitel M., Kim J., Frowne L.W.B. // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 236. P. 579–605.
- [4] Bradshaw P., Huang G.P. // *Proc. R. Soc. Long. A*. 1995. Vol. 451. N 1941. P. 165–188.
- [5] Чесноков Ю.Г. // *ЖТФ*, 2010. Т. 80. Вып. 12. С. 33–39.
- [6] Kim J., Moin P., Moser R. // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 177. P. 133–166.
- [7] Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. // *Phys. Fluids*. 1999. Vol. 11. N 4. P. 943–945.
- [8] Iwamoto K., Suzuki Y., Kasagi N. // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 2002. Vol. 23. P. 678–689.
- [9] Abe H., Kawamura H., Matsuo Y. // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 2004. Vol. 25. P. 404–419.
- [10] Hoyas S., Jiménez J. // *Phys. Fluids*. 2006. Vol. 18. P. 011 702.
- [11] Hoyas S., Jiménez J. // *Phys. Fluids*. 2008. Vol. 20. P. 101 511.
- [12] Eggels J.G.M., Unger F., Weiss M.H., Westerwell J., Adrian R.J., Friedrich R., Nieuwstadt F.T.M. // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 268. P. 175–209.
- [13] Orlandi P., Fatica M. // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 343. P. 43–72.
- [14] Fukagata K., Kasagi N. // *J. Comput. Phys.* 2002. Vol. 181. P. 478–498.
- [15] Wagner C., Huttli T.J., Friedrich R. // *Comput. Fluids*. 2001. Vol. 30. P.581–590.
- [16] Wu X., Moin P. // *J. Fluid Mech.* 2008. Vol. 608. P. 81–112.
- [17] Zagarola M.V., Smith A.J. // *J. Fluid Mech.* 1998. Vol. 373. P. 33–79.
- [18] McKeon B.J., Li J., Morrison J.F., Smith A.J. // *J. Fluid Mech.* 2004. Vol. 501. P. 135–147.
- [19] McKeon B.J., Zagarola M.V., Smith A.J. // *J. Fluid Mech.* 2005. Vol. 538. P. 429–43.
- [20] Barenblatt G.I. // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 248. P. 513–520.
- [21] Barenblatt G.I., Prostokishin V.M. // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 248. P. 521–529.
- [22] McKeon B.J., Swanson C.J., Zagarola M.V. et al. // *J. Fluid Mech.* 2004. Vol. 511. P. 41–44.