

05:08

Ультразвуковые и вихревые колебания в высокотемпературных сверхпроводниках

© Е.Г. Апушкинский,¹ М.С. Астров,² В.К. Соболевский¹

¹ Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: apushkinsky@hotmail.com

² Научно-исследовательский институт электрофизической аппаратуры им. Д.В. Ефремова,
196641 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: astrov@sintez.niiefa.spb.su

(Поступило в Редакцию 22 сентября 2010 г.)

Образец порошка высокотемпературного сверхпроводника (ВТСП) с диаметром крупинок (частиц) 20–50 μm , помещенный в постоянное магнитное поле B_0 и охлажденный до температуры ниже критической, облучался импульсами радиочастотного (РЧ) магнитного поля B_{\sim} ($B_{\sim} \perp B_0$) с несущей частотой 30.7 МГц. Регистрировались стабильные эхо-сигналы, следующие за различными последовательностями РЧ-импульсов. Механизм явления следующий. РЧ магнитное поле стимулирует флюксоидные колебания на поверхности крупинки ВТСП, которые через центры пиннинга вблизи поверхности преобразуются в колебания решетки, индуцируя распространяющуюся звуковую волну. Учтенная нами в уравнении звуковой волны нелинейность второго порядка по градиенту от отклонения кристаллической решетки от положения равновесия приводит к зависимости собственной частоты свободных колебаний кристаллической решетки от амплитуды и длительности возбуждающих эти колебания импульсов. Подобная зависимость и отвечает за возникновение эхо-сигналов.

Введение

Динамика вихрей Абрикосова (флюксоидов) и их взаимодействие с акустическими колебаниями кристаллической решетки в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) изучаются уже довольно давно [1–4]. Известно, что возбуждение акустических колебаний можно осуществлять воздействием электромагнитных колебаний на вихревую решетку. Данный механизм оказался особенно удобным при исследованиях порошков ВТСП. Впервые о наблюдении эхо-сигналов, возбуждаемых РЧ-импульсами в порошках ВТСП YBaCuO и TlBaCaCuO , помещенных в постоянное магнитное поле при температурах ниже критических, сообщалось в [5]. В дальнейшем [6–9] было подробно изучено влияние температуры, давления и магнитного поля на особенности эхо-сигналов для порошков YBaCuO , TlBaCaCuO и Bi(Pb)SrCaCuO , получены зависимости амплитуд эхо-сигналов от амплитуд возбуждающих импульсов и отмечено влияние величины поля B_0 на форму эхо-сигналов. Предложенные механизмы возникновения РЧ эха в ВТСП позволили качественно понять основные черты явления.

В настоящей работе, содержащей обоснование результатов экспериментов [6] со сверхпроводящей керамикой BiPbSrCaCuO , подробно обсуждаются нелинейные свойства решеток (кристаллической, КР, и вихревой, ВР), ответственные за формирование эха. Основное внимание уделяется составлению нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику решеток, и их исследованию на предмет отыскания приближенных решений.

Полученные решения не противоречат известным экспериментальным данным по ВТСП и эхо-явлениям в них. Для условий некоторых экспериментов из [6] проведен численный анализ полученных решений.

Зависимость амплитуды эхо-сигналов от давления [8] указывает на участие акустических колебаний (фононов) КР в формировании эха. Их возбуждение осуществляется через ВР: на границе ВТСП внешнее РЧ поле взаимодействует с флюксоидами, колебания которых передаются КР через центры пиннинга [1]. Данный механизм исследовался в линейном приближении [1–4], что позволило собрать информацию об особенностях распространения ультразвуковых волн (ЗВ) в присутствии вихрей, о свойствах эластичных модулей, силе Магнуса и особенностях механизма пиннинга. Однако линейного приближения не достаточно для объяснения сугубо нелинейного эффекта эха. Нами учтена нелинейность второго порядка в уравнении ЗВ, возникающей на границе ВТСП при отклонении КР от положения равновесия. Формально она обусловлена зависимостью силы натяжения (воздействия одного участка КР на другой) не только от удлинения этих участков, но и от градиента амплитуды колебаний. Учет подобного рода нелинейности ранее применялся для объяснения динамики поляризационного эха в обычных и низкотемпературных сверхпроводящих (НТСП) порошках [10,11]. В решении уравнения ЗВ появляется зависимость собственной частоты свободных колебаний КР от амплитуды и длительности возбуждающих импульсов. Этого достаточно для объяснения эхо-сигналов [12].

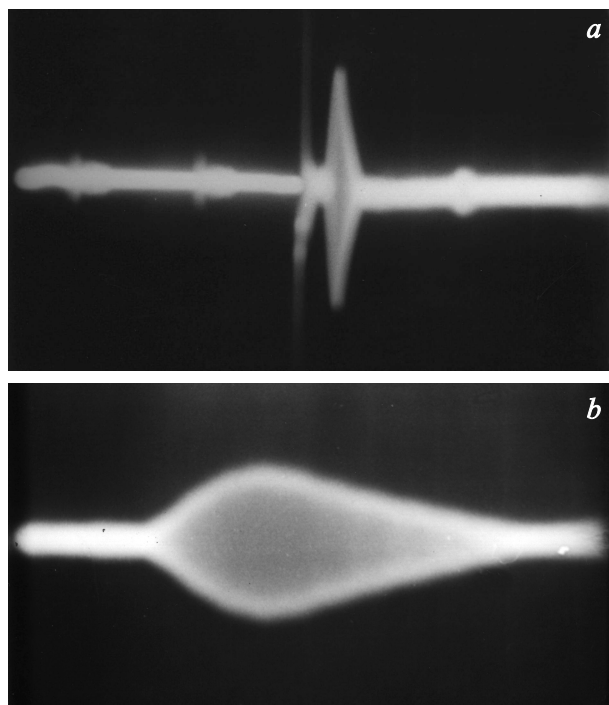


Рис. 1. Типичные эхо-сигналы, полученные от двух возбуждающих РЧ импульсов: *a* — два возбуждающих импульса, первый и второй эхо-сигналы; *b* — форма эхо-сигнала. Амплитуды импульсов: $U_1 = U_2 = \text{const}$; длительность: $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 2.2 \mu\text{s}$; задержка между импульсами $\tau_1 = 23 \mu\text{s}$.

Образцы, оборудование и результаты экспериментов

Технология получения порошковых образцов сверхпроводящей керамики BiPbSrCaCuO подробно изложена в [6], здесь приведем лишь основные сведения о данном материале, полезные в дальнейшем. Порошок состоял в основном из крупинок неправильной формы, средний диаметр которых был в пределах от 20 до $50 \mu\text{m}$. Материал порошка — сверхпроводник II рода, и в полях больше B_{c1} и меньше B_{c2} (для подобных материалов $B_{c1} \sim 20 \text{mT}$, $B_{c2} \sim 60 \text{T}$ [13]) магнитное поле будет проникать в каждую крупинку в виде отдельных квантов (флюксоидов). Температура перехода материала из нормального состояния в сверхпроводящее $T_c = 110 \text{K}$. Порошок помещался в пробирки диаметром 5 mm, после чего давление в некоторых из них понижалось до 1–10 Pa.

Экспериментальная установка [6] обеспечивала получение внешнего постоянного магнитного поля в диапазоне 0–4.7 T. Датчик состоял из колебательного контура с измерительной катушкой, внутри которой размещалась пробирка с образцом. При температуре $T = 77 \text{K}$ датчик настраивался на частоту $f_0 = 30.7 \text{MHz}$ и обладал добротностью $Q = 60$. Измерительная катушка была ориентирована так, чтобы обеспечивать ортогональность РЧ магнитного поля \mathbf{B}_\sim , возбуждаемого в ней, к вектору

магнитной индукции постоянного поля \mathbf{B}_0 . Установка позволяла воздействовать на образцы двумя или тремя РЧ импульсами с регулируемыми амплитудами, длительностями и временными задержками между импульсами. Пример наблюдавшихся эхо-сигналов приведен на рис. 1.

В настоящей работе используется лишь часть экспериментальных данных [6]. Отметим, что для ВТСП зависимость времени релаксации T_2 от внешнего постоянного магнитного поля B_0 и зависимости амплитуд эхо-сигналов от уровня возбуждающих импульсов оказались схожими с аналогичными зависимостями для НТСП [10].

Механизм фононного эха в порошках ВТСП

а) Качественное описание

Магнитное поле проникает в образец в виде отдельных нитей (вихрей Абрикосова), имеющих различную длину вследствие сложной конфигурации крупинок. Нити закрепляются за КР в местах дефектов последней. В этих зонах взаимодействие носителей с КР отличается от остального образца, что приводит к снижению концентрации сверхпроводящих пар в области дефектов. Дефекты вкраплены в тело крупинки довольно сложным образом, что приводит к сложной конфигурации каждой нити [14]. Схематичное изображение одной крупинки порошка с флюксоидами приведено на рис. 2. Количество флюксоидов в каждой крупинке зависит от величины B_0 , а их пространственное расположение представляет собой решетку.

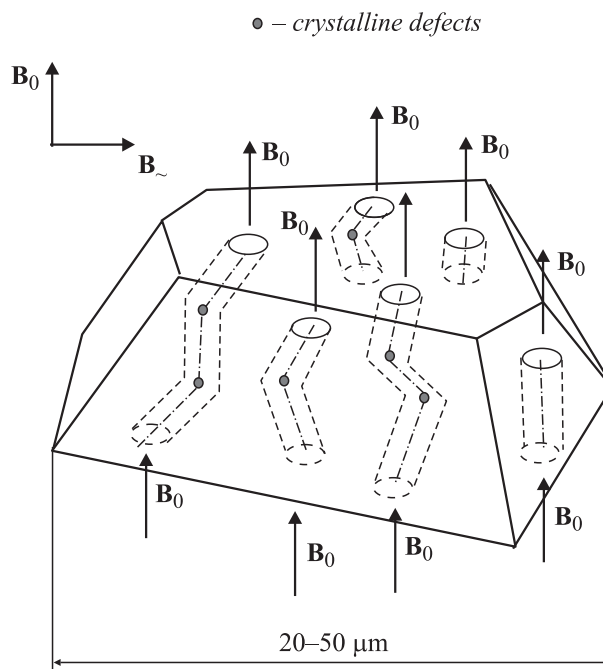


Рис. 2. Схематичное изображение крупинки порошка ВТСП, находящегося в сверхпроводящем состоянии во внешнем магнитном поле.

О наличии акустических колебаний КР свидетельствует зависимость амплитуды эхо-сигналов от давления воздуха в пробирке. С понижением давления уменьшается затухание колебаний и увеличивается эхо-сигнал. В [1] описан механизм возбуждения колебаний КР под действием переменного РЧ-поля:

1) \mathbf{B}_{\sim} вызывает колебания флюксоидов;
2) за счет наличия пиннинга они передаются на решетку, возбуждая ЗВ;

3) если размеры крупинок порошка таковы, что каждая из них образует резонатор, возможно значительно снизить потери и увеличить эхо-сигнал. Для генерации основной моды колебаний размер крупинки должен быть равен половине длины $(\lambda/2)$ ЗВ, что позволяет оценить скорость ультразвука (c_s), возникающего в исследуемом ВТСП: $c_s = \lambda f_0 \approx 1400\text{--}3000$ м/с (средняя скорость $c_s \approx 2200$ м/с). Это согласуется с известными данными по скоростям распространения ЗВ в материалах ВТСП [1,3,4]. Например, в [1] для $f_0 = 10$ МГц значение скорости звука принималось равным 2000 м/с.

Рассмотрим возбуждение РЧ магнитным полем колебаний ВР при отсутствии скачков вихрей между центрами пиннинга. На границах крупинок поле катушки $B_{\sim}(x=0, l; t) = B_{\sim}(t)$ (полагаем $x \parallel B_0$; $z \parallel B_{\sim}$). Магнитный момент флюксоида, выходящий на поверхность, должен совершать колебательное движение, следуя за суммарным внешним магнитным полем (см. рис. 3). Одновременно колебательное движение вокруг положения равновесия должен совершать и образующий его вихрь. Вследствие взаимодействия с внешним РЧ полем траектории носителей, создающих вихрь, претерпевают искажения и становятся эллиптическими [15]. Ось вихря отклоняется от положения равновесия на величину $v(x, t)$. Из геометрических соображений $\text{tg } \gamma = dv/dx = B_{\sim}(t)/B_0$ (рис. 3), откуда следует формула для смещения вихря под действием поля \mathbf{B}_{\sim} на

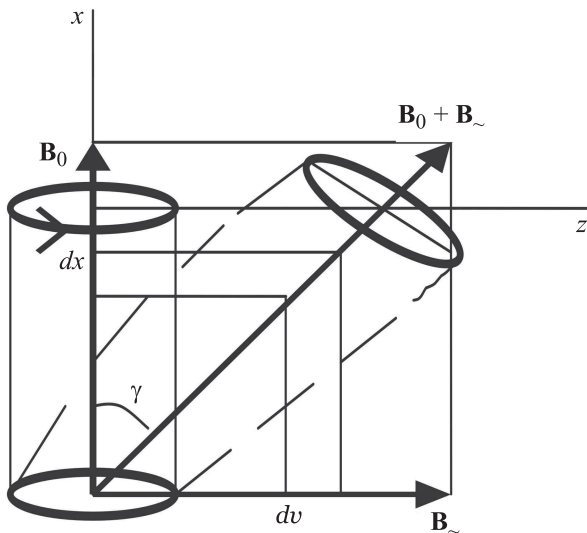


Рис. 3. Колебания вихря относительно положения равновесия под действием внешнего РЧ поля.

границах [2]:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{B_{\sim}(t)}{B_0}, \quad x = 0, l, \quad (1)$$

где l — размер частицы в рассматриваемом сечении.

По мере удаления от границы в глубь крупинки воздействие РЧ магнитного поля ослабевает, параметр затухания [1] можно представить в виде

$$\lambda_{\sim} = \left(\lambda_0^2 + \frac{B_0^2}{\mu_0 \alpha_p} \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где $\lambda_0(T) = \lambda_0(0)[T_c/(T_c - T)]^{1/2}$ — лондоновская глубина проникновения, $\lambda_0(0) \approx 1500$ Å [4] — глубина проникновения постоянного магнитного поля в плоскости сильной сверхпроводимости (ab), α_p — комплексный параметр, связанный с параметром Лабуша α_L , частотой ω_0 поля $B_{\sim}(t)$ и релаксационным временем температурного депиннинга, μ_0 — магнитная постоянная.

В условиях эксперимента [6] $\lambda_0(T = 77 \text{ К}) \approx 2740$ Å. В отсутствие скачка вихрей между центрами пиннинга $\alpha_p = \alpha_L$ [2]. $\alpha_L = J_c B_0 / r_p$, где J_c — критическая плотность тока, r_p — диапазон пиннингового взаимодействия, примерно равный для ВТСП длине корреляции ξ [2]. Для исследуемого соединения в полях до 5 Т при гелиевых температурах $J_c \approx (5 \cdot 10^9 - 5 \cdot 10^{10})$ А/м², а $r_p \approx \xi_0 \approx 20$ Å [3]. Используя аппроксимацию $\xi = \xi_0 [T_c / (T_c - T)]^{1/2}$ и $T_c = 110$ К, получим для рабочей температуры $\xi(77) \approx 37$ Å [16]. Критическая плотность тока в нулевом магнитном поле $J_c^0(T) = J_0(1 - T/T_c)$, тогда для $J_0 = 7 \cdot 10^{10}$ А/м² [17] получаем $J_c^0(T = 77) \approx 2 \cdot 10^{10}$ А/м². Зависимость критической плотности тока от величины постоянного магнитного поля аппроксимируем формулой $J_c = J_c^0(B_{c2} - B_0)/(B_{c2} + B_0)$. Критические поля: $B_{c1} \approx \Phi_0 / (4\pi \lambda_0^2)$, $B_{c2} \approx \Phi_0 / (4\pi \xi^2)$, где Φ_0 — квант магнитного потока [16]. Тогда $B_{c1}(0) \approx 7.3$ мТ, $B_{c2}(0) \approx 82.4$ Т, $B_{c1}(77) \approx 2$ мТ и $B_{c2}(77) \approx 25$ Т, что хорошо коррелирует с известными данными по ВТСП, и все наши эксперименты лежат в этих пределах [13].

Теперь можно оценить реальную глубину проникновения РЧ поля в ВТСП (рис. 4). Величина

$$\frac{B_0^2}{\mu_0 \alpha_p} = \frac{B_0 r_p}{\mu_0 J_c} = \frac{B_0 \xi}{\mu_0 J_c^0} \frac{B_{c2} + B_0}{B_{c2} - B_0}$$

с ростом поля B_0 растет как за счет увеличения B_0 , так и за счет уменьшения J_c . При $B_0 < 0.05$ Т глубина проникновения РЧ поля $\lambda_{\sim} \sim \lambda_0$, при $B_0 > 4$ Т имеем $\lambda_{\sim} \approx B_0 / (\mu_0 \alpha_p)^{1/2}$, а в интервале между этими значениями полей применяем формулу (2). Таким образом, при размерах крупинок порошка l от 20 до 50 мкм для $B_0 < 4.7$ Т величина λ_{\sim} лежит в интервале от 0.27 до 1 мкм. Следовательно, на глубине $< 5\%$ от границы крупинки происходит взаимодействие вихрей с внешним РЧ магнитным полем, что приводит к смещению концов вихрей на величину $v(x, t)$ [1–3]. Вдоль вихря начинает

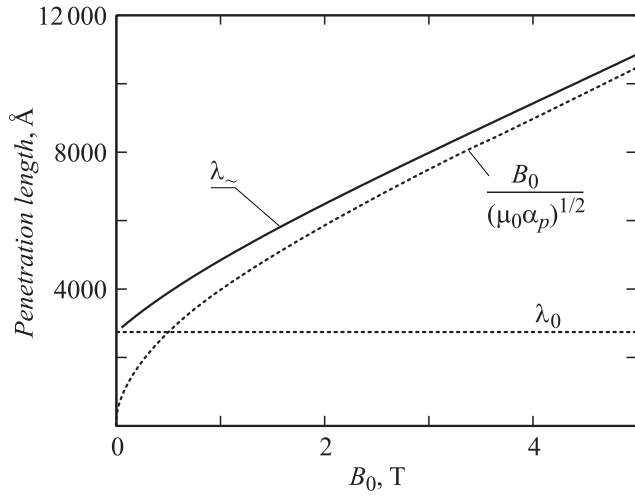


Рис. 4. Зависимость глубины проникновения РЧ поля B_{\sim} в ВТСП от величины постоянного магнитного поля B_0 при температуре $T = 77$ К.

распространяться волна, получившая название вихревой [16]. Ее воздействие на ионы КР в центрах пиннинга приведет к возникновению ЗВ в крупинке порошка [1], сама вихревая волна при этом быстро затухает. ЗВ будет распространяться на всю глубину крупинки, возбуждая в точках пиннинга помимо смещения ионов $u(x, t)$ в узлах КР смещение вихрей $v(x, t)$. Каждая крупинка может рассматриваться как некоторый резонатор акустических волн с собственной частотой, определяемой размерами этой крупинки. При выходе флюксоидов на поверхность их колебания будут сопровождаться излучением, каждый резонатор акустических волн станет осциллятором волн электромагнитных той же частоты. Если порошок неоднороден по размерам крупинок, его можно рассматривать как ансамбль осцилляторов с различными собственными частотами, распределенными вокруг некоторого среднего значения ω_0 . Именно этот ансамбль осцилляторов участвует в образовании эхосигналов, наблюдаемых в эксперименте. Увеличение давления приводит к усилению затухания колебаний (спаду сигнала), а частотная зависимость эхосигналов носит резонансный характер.

б) Математическая модель

Запишем уравнение движения вихревого смещения v для элементарного объема ΔV :

$$-\Gamma(B_0, x) \frac{\partial v}{\partial t} - \mathbf{F}_{rest}(v - u) + [\mathbf{j}_{RF} \times \mathbf{B}_0] \Delta V + \mathbf{F}_t = m_f \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (3)$$

подобное приведенному в [18]. Рассмотрим входящие в него силы:

$[\Gamma(B_0, x) \partial v / \partial t]$ — сила вязкого затухания движения вихрей, проявляющаяся только на концах флюксоидов

за счет излучения и в точках пиннинга, где происходит передача энергии от колебаний ВР к колебаниям КР. Данная сила должна увеличиться с ростом поля и температуры [4]. В экспериментах наблюдался рост затухания (рис. 5), что может свидетельствовать об увеличении $\Gamma(B_0, x)$ с ростом поля B_0 ;

$\mathbf{F}_{rest}(v - u)$ — возвращающая сила, обусловленная взаимодействием с другими флюксоидами и напряжением, вызванным случайно распределенными индивидуальными пиннинговыми центрами. В состоянии равновесия вихря сила равна нулю; вне этого состояния ее можно задать с помощью эмпирической формулы, полученной путем обобщения большого числа экспериментальных данных [16]:

$$F_{rest}(v - u) = \text{sgn}(v - u) B_0 I_c \times \{1 - \exp[-|v - u|/r_p]\} \Delta V.$$

Параметр r_p является мерой смещения, при котором начинает проявляться необратимость; он слабо зависит от величины B_0 , обычно давая один пологий максимум;

$[\mathbf{j}_{RF} \times \mathbf{B}_0] \Delta V$ — сила Ампера. Если плотность тока, наводимого в крупинке внешним РЧ полем, записать как

$$\mathbf{j}_{RF} = \text{rot } \mathbf{H}_{\sim} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & H_{\sim} \end{vmatrix},$$

то $[\mathbf{j}_{RF} \times \mathbf{B}_0] = \mathbf{k}(B_0/\mu_0) \partial B_{\sim} / \partial x$. Индукция $B_{\sim}(x)$ на границе образца определяется внешним воздействием, а при проникновении в глубь образца она спадает. Следовательно, $\partial^2 v / \partial x^2 = (1/B_0) \partial B_{\sim} / \partial x$ и $[\mathbf{j}_{RF} \times \mathbf{B}_0] = \mathbf{k}(B_0^2/\mu_0) \partial^2 v / \partial x^2 = \mathbf{k} C_{44} \partial^2 v / \partial x^2$, где введено обозначение $C_{44} = (B_0^2/\mu_0)$ для модуля упругости ВР [16,19];

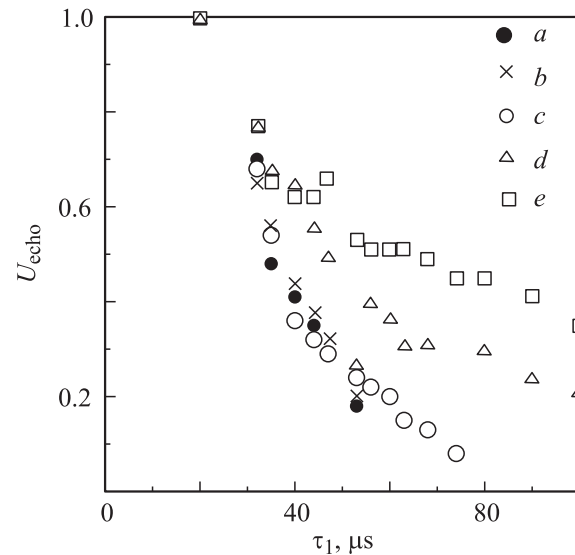


Рис. 5. Амплитуда двухимпульсного эха в зависимости от интервала между возбуждающими импульсами при различных величинах внешнего магнитного поля B_0 : a — 4.5, b — 4.25, c — 3.55, d — 0.64, e — 0.31Т.

$F_T(t)$ — случайная сила термического отклонения, которую будем считать равной нулю за счет временного усреднения.

$m_f \partial^2 v / \partial t^2$ — сила инерции, которая в условиях воздействия внешнего РЧ поля обычно мала вблизи границы крупинки, так как очень мала инерционная масса вихря m_f , определяемая из кинетической энергии его сердцевинки.

С учетом выше сказанного уравнение (3) приобретает вид

$$C_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Delta V - \left[\Gamma(B_0, x) \frac{\partial v}{\partial t} \right] - B_0 J_c \operatorname{sgn}(v) \times \left\{ 1 - \exp \left[\frac{-|v|}{r_p} \right] \right\} \Delta V = m_f \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (4)$$

При условии, что смещение вихрей $v(x, t)$ значительно превосходит смещение узлов КР $u(x, t)$, в (4) вместо относительного смещения $[v(x, t) - u(x, t)]$ используется смещение $v(x, t)$ [18]. Переходя к новой переменной $y = |v|/r_p \ll 1$ и учитывая $B_0 J_c / (r_p C_{44}) = \alpha_L / C_{44}$, получим следующее уравнение для относительного вихревого смещения:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \left[\frac{\Gamma(B_0, x)}{\Delta V C_{44}} \right] \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\alpha_L}{c_{44}} \operatorname{sgn}(y) [1 - \exp(-|y|)] = \frac{m_f}{\Delta V C_{44}} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{B_{\sim}(t)}{r_p B_0}, \quad x = 0, l. \quad (6)$$

в) Возбуждение вихрей в приповерхностной области сверхпроводника

Рассмотрим линейное приближение для приповерхностной области ВТСП. При $y \ll 1$ оно корректно описывает поведение флюксонидов вблизи поверхности, где при сильном внешнем воздействии можно пренебречь и массой вихря $m_f \approx 0$. При этом (5) сводится к виду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \left[\frac{\Gamma(B_0, x)}{\Delta V C_{44}} \right] \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\alpha_L}{c_{44}} y = 0. \quad (7)$$

В течение времени существования колебаний КР потери в ВР будут малы, и слагаемым, ответственным за затухание в (7), можно также пренебречь. Тогда при $\alpha_L / C_{44} > 0$ решение ищем в виде

$$y = \tilde{C}_1 \operatorname{sh} \left[x \sqrt{\alpha_L / C_{44}} \right] + \tilde{C}_2 \operatorname{ch} \left[x \sqrt{\alpha_L / C_{44}} \right],$$

где постоянные интегрирования \tilde{C}_1, \tilde{C}_2 определяются из условия (6) при $x = 0$ и ограничения $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$.

Окончательно можно записать

$$v(x, t) = \frac{B_{\sim}(t) \lambda_{\sim}}{B_0} \exp \left(-\frac{x}{\lambda_{\sim}} \right), \quad (8)$$

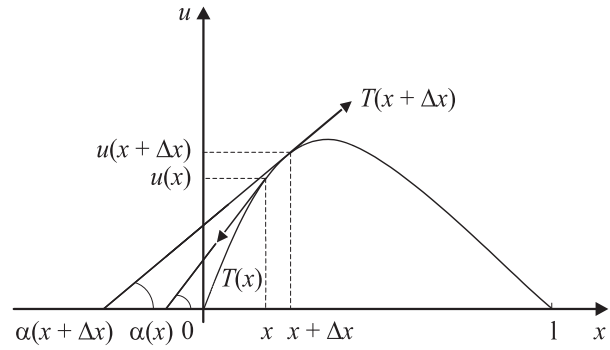


Рис. 6. Отклонение кристаллической решетки от положения равновесия в точке пиннинга за счет отклонения вихревой нити.

что в точности совпадает с результатом, приведенным в [2]. Формула (8) определяет закон, по которому затухают колебания при удалении от границы крупинки. Таким образом, линейное приближение, рассмотренное в [2], дает корректное описание поведения вихрей лишь для приграничной области.

г) Распространение акустических колебаний во внутреннюю область сверхпроводника

Пусть вдоль оси x расположен вихрь, прикрепленный к одномерной КР в точках пиннинга. Запишем уравнение движения для $u(x, t)$ — отклонения КР от положения равновесия, вызванного колебаниями вихря. Введем обозначения для характеристик среды: ρ — плотность вещества ВТСП, c_s — скорость звука, T_2 — время релаксации КР (определяется из графика работы [6], приведенного на рис. 5), и предположим, что в любой точке x сила натяжения $T(x, t)$ направлена по касательной к решетке. Согласно принципу Даламбера, сумма проекций на оси координат u и x (рис. 6) всех сил, действующих на участок от x до $x + \Delta x$, должна быть равна нулю. Решетка выводится из состояния равновесия силой, направленной по оси u и возникающей в точках пиннинга за счет движения вихрей. Возможны только поперечные колебания решетки, поэтому сила инерции также направлена по оси u . Удлинение участков КР в процессе колебания не происходит, и значение силы $|T| = T_0$ не зависит ни от времени, ни от координаты (закон Гука). Проекция всех сил на ось u (рис. 6).

$$\rho \Delta V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T(x + \Delta x, t) \sin[\alpha(x + \Delta x)] - T(x, t) \sin[\alpha(x)] - \frac{2\rho \Delta V}{T_2} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_L \Delta V [v(x, t) - u(x, t)].$$

Учтем для силы $T(x + \Delta x, t) = T(x, t) = T_0$, малость амплитуд $u(x, t) \ll v(x, t)$, произведя разложение¹ по

¹ Первый нелинейный член в разложении $\sin \alpha(x) = (\operatorname{tg} \alpha) / (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2} \approx \operatorname{tg} \alpha (1 - (1/2) \operatorname{tg}^2 \alpha)$ сохранен для возможности изучения эхо-сигналов [12]

малым углом α и замену $\operatorname{tg} \alpha = du/dx$, получаем уравнение баланса сил, которое после преобразований и замены $c_s^2 = T_0 \Delta x / \rho \Delta V$ приобретает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_s^2 \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\alpha_L}{\rho} v(x, t). \quad (9)$$

Этому уравнению подчиняется ЗВ, распространяющаяся в крупинке ВТСП при поверхностном возбуждении.

Функция, стоящая в правой части (9), определяется внешним воздействием $B_{\sim}(t)$ с учетом затухания (8)

$$\begin{cases} v(x, t) = \frac{B_m \lambda_{\sim}}{B_0} \exp[-i\omega_0(t-t_0) - \frac{x}{\lambda_{\sim}}], & t \in [t_0, t_0 + \Delta t], \\ v(x, t) = 0, & t \notin [t_0, t_0 + \Delta t]. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь B_m — амплитуда, ω_0 — несущая частота, Δt — длительность возбуждающих импульсов, t_0 — момент начала РЧ импульса магнитного поля. Релаксация происходит примерно по экспоненциальному закону (рис. 5) $u(x, t - t_0) = f(x, t - t_0) \exp[-(t - t_0)/T_2]$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c_s^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \exp \left[-\frac{2(t-t_0)}{T_2} \right] \right\} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ - \frac{f}{T_2^2} = \frac{\alpha_L}{\rho} v(x, t) \exp \left(\frac{t-t_0}{T_2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим три частных случая.

1. В наших экспериментах [6] время релаксации $T_2(B_0) \sim 40-80 \mu\text{s}$ при $\Delta t \sim$ единицы μs (максимальная амплитуда эха достигалась при $\Delta t = 2.2 \mu\text{s}$). Следовательно, во время действия возбуждающих импульсов можно не учитывать релаксацию, и уравнение (11) упрощается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c_s^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\alpha_L}{\rho} v(x, t). \quad (12)$$

2. После окончания действия РЧ импульса при $\Delta t < t < 10T_2$ уравнение (11) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c_s^2 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \exp \left[-\frac{2(t-t_0)}{T_2} \right] \right\} \\ \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{f}{T_2^2} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

3. С уменьшением амплитуды колебаний, обусловленной релаксацией, происходит исчезновение всех нелинейностей, и (11) при $t \gg T_2$ сведется к обычному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{f}{T_2^2} = 0. \quad (14)$$

Его решение [20] имеет вид

$$f(x, t) = C_1 \exp\{\pm i[kx + s(t - t_0) + \varphi_0]\}, \quad (15)$$

где $k = \omega/c_s$ — волновое число, определяемое из граничных условий, $s = \pm(1/T_2^2 - \omega^2)^{1/2} \approx \pm i\omega$. При $\omega \approx \omega_0 = 2\pi \cdot 30.7 \cdot 10^6 \text{ 1/s}$ и $T_2 \approx 40 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ имеем $\omega^2 \gg 1/T_2^2$. Будем считать, что на границах крупинки происходит полное отражение ЗВ.² Установление этого режима происходит за время $\tau_{\text{trans}} \sim 1/c_s \approx 16 \text{ ns}$, что значительно меньше остальных характерных времен. Для основной моды колебаний граничное условие в нуле дает $\varphi_0 = \pi/2$, на другом конце крупинки $k = \pi/l$. Распределение крупинки по диаметрам определяет распределение осцилляторов, ответственных за эхо-сигнал, по резонансным частотам. С учетом граничных условий $f(x, t) = (1/2)C_1 \exp\{i\{\omega/c_s[x \pm c_s(t - t_0)] + \pi/2\}\}$. В режиме стоячей волны $f(x, t)$ есть сумма падающей и отраженной (со сдвигом фазы на π волн)

$$f(x, t) = C_1 \exp\{i\omega(t - t_0)\} \sin \left[\frac{\pi}{l} x \right], \quad (16)$$

а значения константы C_1 выберем так, чтобы в некоторый момент времени t_1 сшить решения уравнений (13) и (14).

Решение уравнения (13) будем искать с использованием метода медленно меняющихся амплитуд (ММА) по аналогии с [11] в виде

$$\begin{aligned} f(x, t) = a(t - t_0)b(x) \exp\{-i\omega_0(t - t_0)\} \\ + a^*(t - t_0)b^*(x) \exp\{i\omega_0(t - t_0)\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где ω_0 — частота внешнего воздействия, а знак * обозначает комплексное сопряжение. Подставив (17) в (13) и пренебрегая величинами второго порядка малости по отношению к $\partial f/\partial t$ и $2/T_2$, получим равенство, выполняющееся, когда равны нулю амплитуды при разных фазах. Высшие гармоники в методе ММА не учитываются — предполагается их фильтрация добротным контуром датчика [21]. Следовательно, слагаемыми на утроенной частоте пренебрегаем, а при фазе $-i\omega_0(t - t_0)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{2} i\omega a - \frac{1}{2} i\gamma \exp \left\{ -\frac{2(t-t_0)}{T_2} \right\} |a|^2 a = 0, \quad (18)$$

где введены обозначения

$$\omega = \omega_0 - \Omega, \quad \Omega = -\frac{1}{b\omega_0} c_s^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2},$$

$$\gamma = -\frac{3}{2b\omega_0} c_s^2 \left[\left| \frac{\partial b}{\partial x} \right|^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 b^*}{\partial x^2} \right].$$

Для режима стоячей волны $b = b^* = |b|$ и

$$\gamma = -\frac{9}{2b\omega_0} c_s^2 \left(\frac{\partial b}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}.$$

² На самом деле, часть энергии ЗВ передается окружающей крупинку среде, что приводит к затуханию, учитываемому через T_2 . В этом случае устанавливается стоячая волна с КСВ $\neq 1$. Величина КСВ для понимания сути эхо-явлений не принципиальна, поэтому будем рассматривать случай полного отражения и режим с КСВ = 1.

Обратим внимание на присутствие в параметре γ , определяющем нелинейность, зависимости от координаты x . Это естественно, так как нелинейность проявляется тем сильнее, чем больше амплитуда колебаний, а в режиме стоячей волны амплитуда зависит от координаты.

Решение уравнения (18) ищем в виде

$$a(t) = |a(t)| \exp \left\{ \frac{1}{2} i \psi(t) \right\}. \quad (19)$$

Подставим (19) в (18) и приравняем нулю вещественные и мнимые части: $|a| = C_0 = \text{const}$;

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \omega - \gamma C_0^2 \exp \left\{ -\frac{2(t-t_0)}{T_2} \right\} = 0.$$

Решение последнего уравнения будет

$$\begin{aligned} \psi(t) = & \omega(t-t_0) + \frac{1}{2} \gamma C_0^2 T_2 \\ & \times \left(1 - \exp \left\{ -\frac{2(t-t_0)}{T_2} \right\} \right) + \psi_0 \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} a(t) = & a(t_0) \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[\omega(t-t_0) + \frac{1}{2} \gamma C_0^2 T_2 \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(1 - \exp \left\{ -\frac{2(t-t_0)}{T_2} \right\} \right) \right] \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Отметим, что фаза акустических колебаний КР зависит от константы $C_0 = a(t_0)$, и перейдем теперь к решению уравнения (12) в момент окончания внешнего воздействия.

Все выкладки аналогичны, но вместо (18) имеем

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{2} i(\omega + \gamma |a|^2) a = \frac{\alpha_L}{\rho} \frac{B_m \lambda_{\sim}}{B_0} \exp \left\{ -\frac{x}{\lambda_{\sim}} \right\}, \quad (21)$$

где $B_m \neq 0$ при $t \in [t_0, t_0 + \Delta t]$ и $B_m = 0$ при $t \notin [t_0, t_0 + \Delta t]$. Исходя из оценки величины λ_{\sim} можно сделать следующие приближения:

1) на расстоянии λ_{\sim} , где возбуждение еще существенно, можно полагать малыми величинами $(\partial b / \partial x)$ и γ ;

2) ограничиться режимом малосигнального приближения, т.е. случаем малых $|a|^2$. Условие $\omega \gg \gamma |a|^2$ означает отказ от рассмотрения нелинейности при решении уравнения (21).

Если ввести обозначение

$$B(x) = \frac{\alpha_L}{\rho} \frac{B_m \lambda_{\sim}}{B_0} \exp \left\{ -\frac{x}{\lambda_{\sim}} \right\},$$

то без учета нелинейности уравнение (21) примет вид $\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{2} i \omega a = B$ и в момент $t = t_0 + \Delta t$ будет иметь решение

$$\begin{aligned} a(t_0 + \Delta t) = & \left[a(t_0) \exp \left\{ \frac{i \omega \Delta t}{4} \right\} + \frac{4B \Delta t \sin \left(\frac{\omega \Delta t}{4} \right)}{\omega \Delta t} \right] \\ & \times \exp \left\{ \frac{i \omega \Delta t}{4} \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

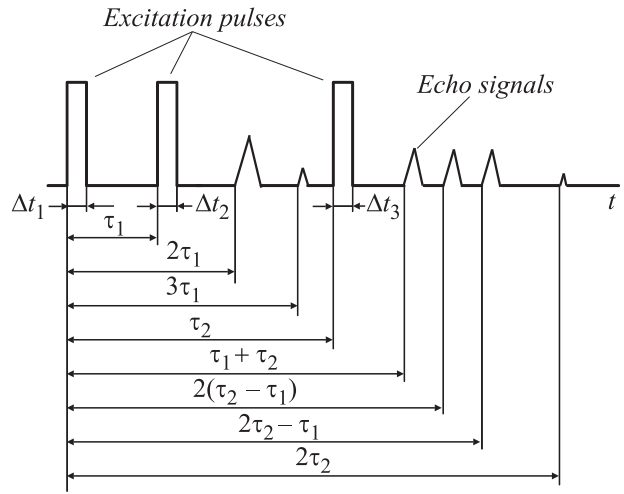


Рис. 7. Временное расположение возбуждающих импульсов РЧ магнитного поля и эхо-сигналов.

Формулу (22) можно рассматривать как нулевое приближение при отыскании решения уравнения (21) по методу последовательных приближений Пикара [20]. На первом этапе дальнейшего анализа ограничимся нулевым приближением.

д) Генерация сигналов эха

С помощью (20) и (22) выведем выражения для всех наблюдавшихся эхо-сигналов для последовательности возбуждающих импульсов, показанной на рис. 7. Индекс $m = 1, 2, 3$ будем относить к номеру РЧ импульса. Полагаем $a(t_0 = 0) = 0$ и $\Delta t_m \ll \tau_{1,2}$. На время действия импульса будем не только пренебрегать релаксацией, но и считать $\omega \Delta t_m / 2 \ll 1$. В этом приближении на момент окончания каждого из трех импульсов соотношение (22) сводится к виду

$$\begin{cases} a(\Delta t_1) = a(0) + B_1 \Delta t_1, \\ a(\tau_1 + \Delta t_2) = a(\tau_1) + B_2 \Delta t_2, \\ a(\tau_2 + \Delta t_3) = a(\tau_2) + B_3 \Delta t_3. \end{cases} \quad (23)$$

В интервале между импульсами и после них воспользуемся формулой (20) с учетом замены $\exp \{ -2(t-t_0)/T_2 \} \approx 1 - 2(t-t_0)/T_2$ при $\tau_1, \tau_2 \ll T_2$

$$\begin{cases} a(t = \tau_1) = a(\Delta t_1) \exp \{ i[\omega + \gamma |a(\Delta t_1)|^2] \tau_1 \}, \\ a(t > \tau_1 + \Delta t_2) = a(\tau_1 + \Delta t_2) \times \\ \quad \times \exp \{ i[\omega + \gamma |a(\tau_1 + \Delta t_2)|^2] (t - \tau_1) \}, \\ a(t = \tau_2) = a(\tau_1 + \Delta t_2) \times \\ \quad \times \exp \{ i[\omega + \gamma |a(\tau_1 + \Delta t_2)|^2] (\tau_2 - \tau_1) \}, \\ a(t > \tau_2 + \Delta t_3) = a(\tau_2 + \Delta t_3) \times \\ \quad \times \exp \{ i[\omega + \gamma |a(\tau_2 + \Delta t_3)|^2] (t - \tau_2) \}. \end{cases} \quad (24)$$

Из (24) видно, что колебания, существующие в интервале между импульсами, носят нелинейный характер.

Нелинейность проявляется как зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды и длительности уже закончившегося возбуждающего импульса, и именно она отвечает за образование эхо-сигнала. Используем формулы (23) и (24):

$$\begin{aligned}
 a(t > \tau_1 + \Delta t_2) &= B_1 \Delta t_1 \left[1 + \gamma (B_2 \Delta t_2)^2 (t - \tau_1) \right. \\
 &\times [i - \gamma (B_1 \Delta t_1)^2 (t - \tau_1)] \exp\{i\omega t\} \\
 &+ B_2 \Delta t_2 \left[1 + \gamma (B_1 \Delta t_1)^2 (t - \tau_1) \right. \\
 &\times [i - \gamma (B_2 \Delta t_2)^2 (t - \tau_1)^2] \exp\{i\omega(t - \tau_1)\} \\
 &+ B_2 \Delta t_2 \gamma (B_1 \Delta t_1)^2 (t - \tau_1) \left[i - \frac{\gamma (B_2 \Delta t_2)^2}{2} (t - \tau_1) \right] \\
 &\times \exp\{i\omega(t + \tau_1)\} - \frac{1}{2} B_1 \Delta t_1 \gamma^2 (B_1 \Delta t_1)^2 (B_2 \Delta t_2)^2 \\
 &\times (t - \tau_1)^2 \exp\{i\omega(t + 2\tau_1)\} \\
 &+ B_1 \Delta t_1 \gamma (B_2 \Delta t_2)^2 (t - \tau_1) \left[i - \frac{\gamma (B_1 \Delta t_1)^2}{2} (t - \tau_1) \right] \\
 &\times \exp\{i\omega(t - 2\tau_1)\} - \frac{1}{2} B_2 \Delta t_2 \gamma^2 (B_1 \Delta t_1)^2 (B_2 \Delta t_2)^2 \\
 &\times (t - \tau_1)^2 \exp\{i\omega(t - 3\tau_1)\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

Предпоследнее слагаемое в (25) будет отвечать за сигнал первичного эха, возникающего в момент времени $t = 2\tau_1$; последнее — за сигнал вторичного эха, возникающего в момент времени $t = 3\tau_1$. Продолжим процедуру при сохранении слагаемых лишь второго порядка малости относительно γ :

— для сигнала стимулированного эха, наблюдаемого в момент времени $t = \tau_2 + \tau_1$,

$$\begin{aligned}
 a_{[\tau_2+\tau_1]} &= i\gamma B_1 \Delta t_1 B_2 \Delta t_2 B_3 \Delta t_3 (t - \tau_2) \left[1 + i\gamma(\tau_2 - \tau_1) \right. \\
 &\times \left. \{(B_1 \Delta t_1)^2 + (B_2 \Delta t_2)^2\} \right] \exp\{i\omega[t - (\tau_1 + \tau_2)]\}; \quad (26)
 \end{aligned}$$

— для эхо-сигналов, возникающих в моменты времени $t = 2(\tau_2 - \tau_1)$; $2\tau_2 - \tau_1$; $2\tau_2$,

$$\begin{aligned}
 a_{[2(\tau_2-\tau_1)]}(t) &= -\gamma^2 (B_1 \Delta t_1) (B_2 \Delta t_2)^2 (B_3 \Delta t_3)^2 (t - \tau_2) \\
 &\times (\tau_2 - \tau_1) \exp\{i\omega[t - 2(\tau_2 - \tau_1)]\}, \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{[2\tau_2-\tau_1]}(t) &= i\gamma (B_2 \Delta t_2) (B_3 \Delta t_3)^2 (t - \tau_2) \\
 &\times [1 + i\gamma(\tau_2 - \tau_1) (B_1 \Delta t_1)^2] \exp\{i\omega[t - (2\tau_2 - \tau_1)]\}, \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{[2\tau_2]}(t) &= i\gamma (B_1 \Delta t_1) (B_3 \Delta t_3)^2 (1 - \tau_2) \\
 &\times [1 + i\gamma(\tau_2 - \tau_1) (B_2 \Delta t_2)^2] \exp\{i\omega[t - 2\tau_2]\}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Если подставить в уравнение (17) одно из полученных выражений (25)–(29), то с учетом релаксации можно записать формулы, описывающие колебания ионов в узлах КР в окрестности моментов времени, соответствующих эхо-сигналам.

Колебания КР возбуждают колебания флюксоидов, закрепленных в центрах пиннинга. Колебания КР и ВР связаны уравнением (4), которое при $(v - u)/r_p \ll 1$ примет вид

$$C_{44} \Delta V \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left[\Gamma(B_0, x) \frac{\partial v}{\partial t} \right] - \alpha_L (v - u) \Delta V = m_f \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (30)$$

Отметим, что $\alpha_L = (B_0 J_c)/r_p$ значительно больше всех остальных коэффициентов, входящих в (30) [2]. В центрах пиннинга $v \approx u$. В момент образования эхо-сигналов колебания ВР в первом приближении совпадают с колебаниями КР. Согласно (1), колеблющиеся концы флюксоидов будут наводить переменное РЧ поле, которое регистрируется измерительной катушкой. Суммарное РЧ поле от порошка с учетом распределения крупинок по диаметрам $G(l)$ представим в виде

$$B_{\sim}(t) \sim \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} G(l) B_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} dl. \quad (31)$$

Наконец, запишем итоговые формулы для основных регистрируемых эхо-сигналов, отметив РЧ магнитные поля дополнительным индексом \sim

— для первичного эхо-сигнала:

$$\begin{aligned}
 B_{[2\tau_1]}^{\text{echo}}(t) &\sim - \left(\frac{c_s^2}{\omega_0} \right) \left(\frac{\alpha_L \lambda_{\sim}}{\rho B_0} \right)^3 B_0 (B_{\sim 1} \Delta t_1) \\
 &\times (B_{\sim 2} \Delta t_2)^2 (t - \tau_1) \exp \left\{ -\frac{2\tau_1}{T_2} \right\} \\
 &\times \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} G(l) \left(\frac{\pi}{l} \right)^5 \sin \left\{ 2\omega_0 \tau_1 + \left(\frac{c_s^2}{\omega_0} \right) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (t - 2\tau_1) \right\} dl; \quad (32)
 \end{aligned}$$

— для стимулированного эха:

$$\begin{aligned}
 B_{[\tau_1+\tau_2]}^{\text{echo}}(t) &\sim - \left(\frac{8c_s^2}{\omega_0} \right) \left(\frac{\alpha_L \lambda_{\sim}}{\rho B_0} \right)^3 B_0 (B_{\sim 1} \Delta t_1) (B_{\sim 2} \Delta t_2) \\
 &\times (B_{\sim 3} \Delta t_3) (t - \tau_1) \exp \left\{ -\frac{\tau_1 + \tau_2}{T_2} \right\} \\
 &\times \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} G(l) \left(\frac{\pi}{l} \right)^5 \sin \left\{ \omega_0 (\tau_1 + \tau_2) + \left(\frac{c_s^2}{\omega_0} \right) \right. \\
 &\times \left. \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (t - (\tau_2 + \tau_1)) \right\} dl; \quad (33)
 \end{aligned}$$

— для эха, возникающего в момент времени $t = 2\tau_2 - \tau_1$:

$$B_{[2\tau_2 - \tau_1]}^{\text{echo}}(t) \approx - \left(\frac{8c_s^2}{\omega_0} \right) \left(\frac{\alpha_L \lambda_{\sim}}{\rho B_0} \right)^3 B_0 (B_{\sim} \Delta t_2) \times (B_{\sim} \Delta t_3)^2 (t - \tau_2) \exp \left\{ - \frac{2\tau_2 - \tau_1}{T_2} \right\} \times \int_{l_{\min}}^{l_{\max}} G(l) \left(\frac{\pi}{l} \right)^5 \sin \left\{ \omega_0 (2\tau_2 - \tau_1) + \left(\frac{c_s^2}{\omega_0} \right) \times \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 (t - (2\tau_2 - \tau_1)) \right\} dl. \quad (34)$$

Заключение

Получены выражения, описывающие экспериментально наблюдавшиеся эхо-сигналы в порошках ВТСП в зависимости от параметров внешних возбуждающих импульсов, характеристик используемого сверхпроводника и условий эксперимента. Это может свидетельствовать о внутренней непротиворечивости предложенной модели для механизма возникновения колебаний в ВТСП-порошках.

Два экспериментально наблюдавшихся эффекта остались за рамками настоящей статьи: отчетливый максимум на зависимости амплитуды сигналов эха от величины постоянного магнитного поля B_0 [6] и возможность регистрации сигнала долгоживущего эха только в присутствии внешнего постоянного поля. Математическое описание этого режима будет приведено в отдельной работе.

Исследованное эхо-явление позволяет наблюдать сигналы, излучаемые ансамблем частиц ВТСП-порошка, находящимся в когерентном состоянии. При этом каждая отдельная частица может находиться в возбужденном состоянии, которое достигается воздействием на нее импульсов РЧ магнитного поля. Это приводит к навязыванию флюксоидам, закрепленным на частице, определенной фазы колебаний, которая может быть восстановлена в момент наблюдения эха. Таким образом, система частиц может использоваться для хранения информации. Наиболее перспективным способом приращения исследованного эхо-явления является создание устройств хранения информации в виде, удобном для ее обработки квантовым компьютером. Данная методика может быть также использована при проектировании аналоговых радиотехнических приборов и устройств (нелинейные фильтры, управляемые линии задержки и т.п.) В качестве интересного направления отметим приборы для обработки сигналов с шумовым заполнением [22]. Во всех случаях эхо-сигналы рассматриваются как результат нелинейного взаимодействия между входными сигналами.

Список литературы

- [1] Haneda H., Ishigura T., Miriam M. // Appl. Phys. Lett. 1996. Vol. 68. N 23. P. 3335–3337.
- [2] Dominguez D., Bulaevskii L., Ivlev N., Maley M., Bishop A.R. // Phys. Rev. B. 1995. Vol. 51. № 21. P. 15649–15652.
- [3] Dominguez D., Bulaevskii L., Ivlev B., Maley M., Bishop A.R. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 74. N 13. P. 2579–2582.
- [4] Pankert J., Marbach G., Comberg A., Lemmens P., Froning P., Ewert S. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. N 24. P. 3052–3055.
- [5] Nishihara H., Hayashi K., Okuda Y., Kajimura K. // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 39. N 10–13. P. 7351–7353.
- [6] Апушкинский Е.Г., Астров М.С., Долбиев В.В., Марущак Н.И. // Научное приборостроение. 1992. Т. 2. № 2. С. 54–64.
- [7] Petrov M.P., Pleshakov I.V., Paugurt A.P. et al. // Solid State Commun. 1991. Vol. 78. N 10. P. 893–895.
- [8] Дробинин А.В., Ципенюк Ю.М. // ЖЭТФ. 1997. Т. 11. Вып. 3. С. 1032–1046.
- [9] Tsipenyuk Ju.M. // Chinese J. Phys. 1996. Vol. 34. N 2-U. P. 484–488.
- [10] Tsuruoka F., Kajimura K. // Phys. Rev. B. 1980. Vol. 22. P. 5092–5109.
- [11] Kajimura K. // Phys. Acoustics. 1982. Vol. 16. N 4. P. 295–340.
- [12] Голдин Б.А., Котов Л.Н., Зарембо Л.К., Карпачев С.Н. Спин-фононные взаимодействия в кристаллах (ферритах). Л.: Наука, 1991. 149 с.
- [13] Tachikawa K., Togano K. // Proc. IEEE. 1989. Vol. 77. N 8. P. 1124–1131.
- [14] Onogi T., Ichiguchi T., Ban M. // Hitachi Rev. 1990. Vol. 39. N 1. P. 41–46.
- [15] Ichiguchi T. // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 57. N 1. P. 638–644.
- [16] Campbell A.M., Evetts J.E. Critical currents in superconductors. London: Taylor and Francis Ltd, 1972. 243 p.
- [17] Van der Beek C.J., Nieuwenhuys, Kes P.H., Schnack H.G., Criessen R. // Physica C. 1992. Vol. 197. P. 320–336.
- [18] Van der Beek C.J., Geshkenbein V.B., Vinokur V.M. // Phys. Rev. B. 1993. Vol. 48. N 5. P. 3393–3403.
- [19] Labusch R. // Phys. Status. Solid 1969. Vol. 32. P. 439–442.
- [20] Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. NY: McGraw-Hill Book Company, 1968. 1130 p.
- [21] Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Сов. радио, 1971. 672 с.
- [22] Apushkinsky E., Astrov M. // Magnetic Storage Systems Beyond 2000. NATO Sci. Ser. Sub-series II. Mathematics, Physics and Chemistry. Kluwer Academic Publishers, 2001. Vol. 41. P. 317–320.