

01;03

## Внутренние поперечные флуктуационные волны в вязкой жидкости у твердой границы

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 18 ноября 2010 г.)

На основе анализа дисперсионного уравнения показано, что внутри слоя жидкости, ограниченного твердыми стенками и дном, на границе стратификации пристенных слоев маловязких жидкостей толщиной  $\sim 100$  nm, стратифицированных ориентирующим влиянием твердой стенки (твердого дна) и флуктуационных сил, возможно существование как слабо затухающих уединенных волн, так и сильно затухающих периодических волн с законами дисперсии, характерными для чисто капиллярных волн как на глубокой, так и на мелкой жидкости.

### Введение

Изучение физических закономерностей реализации волнового движения на поверхности вязкой жидкости конечной толщины и на границе раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей представляет значительный интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическим приложениями (см., например, [1–8] и цитируемую там литературу).

В [3,4] на уровне вывода и анализа дисперсионного уравнения для волн на заряженной свободной поверхности слоя вязкой жидкости конечной толщины и на границе раздела двух вязких несмешивающихся жидкостей в различных физических ситуациях изучено влияние вязкости жидкости и толщины слоя на закономерности развития неустойчивости свободной поверхности по отношению к поверхностному заряду. Основным результатом этих работ состоит в выяснении факта зависимости от вязкой диссипации и конечности толщины слоя величины инкремента развития неустойчивости на начальной стадии ее реализации, а также отсутствия влияния этих факторов на критические условия реализации неустойчивости.

Вопрос о структуре течений (о закономерностях распределения по толщине слоя вихревой и потенциальной компонент поля скоростей), связанных с периодическим волновым движением свободной поверхности слоя вязкой жидкости конечной толщины, рассматривался в [6]. Выяснилось, что при распространении капиллярно-гравитационной волны по свободной поверхности слоя вязкой жидкости на твердом дне с длиной волны, сравнимой с толщиной слоя, поле скоростей течения жидкости, связанного с волной, имеет сложную структуру. В таком случае вихревое движение концентрируется в малой окрестности свободной поверхности и в малой окрестности твердого дна, потенциальное же течение заполняет весь объем жидкости. В ситуации, когда длина волны много больше толщины слоя жидкости, вихревое движение, порождаемое поверхностной волной, запол-

няет весь ее объем, причем интенсивность вихревого движения у твердого дна может значительно превышать таковую у свободной поверхности жидкости. Если толщина слоя много больше длины волны, то вихревое движение концентрируется у свободной поверхности, а в окрестности твердого дна стремится к нулю. Это обстоятельство можно интерпретировать как утверждение, что поверхностная волна не чувствует дна.

Структура течений, связанных с периодическим волновым движением на границе раздела несмешивающихся вязких жидкостей, рассматривалась в [7]. Выяснилось, что глубина проникновения волновых течений в обе жидкости меньше длины волны, бегущей по границе раздела, и зависит от величины коэффициентов вязкостей жидкостей. Вихревое движение концентрируется в малых окрестностях поверхности раздела по обе ее стороны, в слоях толщиной порядка десятых (в зависимости от вязкости жидкости) долей длины волны. В малой окрестности поверхности раздела как величины перпендикулярных к границе раздела компонент полей скоростей волнового течения жидкости, так и величины роторов полей скоростей, меняют свои знаки.

В работах [8,9] рассмотрены особенности реализации волнового движения в тонких плоских слоях жидкости (толщиной  $h \leq 100$  nm), когда становится существенным влияние поля флуктуационных сил [10–12]. Наиболее интересным результатом расчетов линейного приближения является то обстоятельство, что в дисперсионном уравнении компоненты, порожденные действием гравитационных и флуктуационных сил, одинаковым образом зависят от волнового числа и входят в него в виде суммы. В нелинейных асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде по сравнению с толщиной слоя амплитуде волны было получено, что волновые движения жидкости, появляющиеся в результате нелинейного взаимодействия как поправки к волнам, заданным в начальный момент времени, выталкиваются полем флуктуационных сил на периферию области их влияния. Этот эффект имеет место как при наличии

внешнего электрического поля у свободной поверхности жидкости, так и в его отсутствии. Знак же и величина нелинейных поправок к амплитуде волны зависят от электрического поля у свободной поверхности жидкости: при наличии электрического поля нелинейные эффекты приводят к увеличению кривизны вершин волн, а в отсутствие поля к снижению их кривизны.

В настоящей работе предлагается обратить внимание на то обстоятельство, что твердое дно, создавая в жидкости поле флуктуационных сил, модифицирует свойства жидкости в прилегающем к дну тонком слое толщиной  $\sim 100$  nm [10,13], приводя к появлению границы стратификации по вязкости и плотности толщиной порядка  $\sim 10$  nm, проходящей по границе действия короткодействующих флуктуационных сил [10–12]. Механическая деформация такой границы будет приводить к возникновению волнового движения в жидкости. Исследованию особенностей возникающего волнового движения и посвящена настоящая работа.

## 1. Формулировка физической модели

Согласно существующим представлениям, молекулы жидкости, находящиеся вблизи твердой стенки, ограничены в подвижности и испытывают упорядочивающее действие со стороны стенки, а дипольные молекулы еще и ориентирующее действие [10,13]. Так, экспериментальные исследования [10,13] показывают, что в тонких слоях воды толщиной  $\sim 100$  nm влияние твердой стенки приводит к увеличению ее вязкости (примерно в полтора-два раза), плотности (примерно на два процента) и снижению статической диэлектрической проницаемости (примерно в три раза). Причиной указанного изменения физических свойств, наиболее вероятно, является изменение структуры воды (изменение системы водородных связей), которая вблизи твердой стенки становится более упорядоченной. К таким же результатам приводят и численные модельные эксперименты.

Хорошо известен факт ориентирующего действия на молекулы воды ее свободной поверхности: в приповерхностном слое молекулы воды имеют преимущественную ориентацию, при которой отрицательный заряд диполя выступает на поверхность [11,14], диполи выстраиваются параллельно, что дает системе выигрыш в потенциальной энергии свободной поверхности. В итоге на поверхности жидкости образуется мономолекулярный двойной электрический слой, оказывающий ориентирующее действие на ближайшие, ниже расположенные молекулы воды. Отрицательно заряженные ионы из объема воды притягиваются к положительным заряженным концам диполей молекул воды в окрестности свободной поверхности. Поскольку и молекулы, и ионы участвуют в тепловом движении, то вблизи свободной поверхности воды формируется размытый тепловым движением диффузный двойной электрический слой толщиной  $\sim 10$  nm. Этот процесс в силу принципа Ле-Шателье приводит

к понижению потенциальной энергии, приходящейся на единицу площади свободной поверхности воды, и, следовательно, снижает величину коэффициента поверхностного натяжения воды. При разрушении диффузного двойного электрического слоя в результате какого-либо кратковременного силового воздействия локальное значение коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  (поверхностной плотности потенциальной энергии) увеличивается с  $\approx 7$  N/m до  $\approx 9$  N/m. Возникающие касательные напряжения приводят к появлению приповерхностных электрогидродинамических токов, под влиянием которых по прошествии некоторого характерного времени релаксации (изменяющегося для разных жидкостей от  $\sim 0.01$  s до  $\sim 1000$  s [15–17]) величина  $\sigma$  восстанавливается. Это называется феноменом динамического поверхностного натяжения, или феноменом релаксации поверхностного натяжения [4,15–18].

Как показано в [4], учет феномена динамического поверхностного натяжения при расчете спектра волновых движений приводит к удвоению количества реализующихся волновых движений, так, словно приповерхностный диффузный двойной электрический слой жидкости образует отдельную фазу с относительно четко очерченной нижней границей, обладающей отличным от нуля коэффициентом межфазного натяжения.

Вернемся теперь к модифицированному тонкому слою жидкости у твердой стенки, молекулы которого упорядочены и имеют преимущественную ориентацию вследствие взаимодействия со стенкой. Плотность и вязкость жидкости в пристеночном слое превышают таковые в объеме жидкости вдали от стенки [10,13,19]. Те же механизмы, которые обуславливают формирование диффузионного двойного электрического слоя у свободной поверхности жидкости, будут действовать и в пристеночном слое. Таким образом, есть основания полагать, что пристеночный слой жидкости отделен от основного ее объема некоторой границей с отличным от нуля коэффициентом межфазного натяжения [10,13]. Особенностью жидкости в пристеночном слое является то, что она находится в поле флуктуационных сил, порождаемых стенкой. Поэтому возможное волновое движение в пристеночном слое жидкости, возбуждаемое межфазной границей, будет реализовываться при определяющем влиянии флуктуационных сил.

Сказанное означает, что со стороны твердого дна на каждую жидкую частицу в слое действуют флуктуационные силы, сильно зависящие от расстояния. Для качественных оценок примем, что они обратно пропорциональны расстоянию в третьей степени между данной жидкой частицей и твердым дном, что для слоя жидкости толщиной  $d$  можно записать в виде [10–13]:

$$F \sim \frac{1}{z^3}. \quad (1)$$

Таким образом, давление флуктуационных сил на возмущенную капиллярным волновым движением (порождаемым, например, тепловым движением молекул [20])

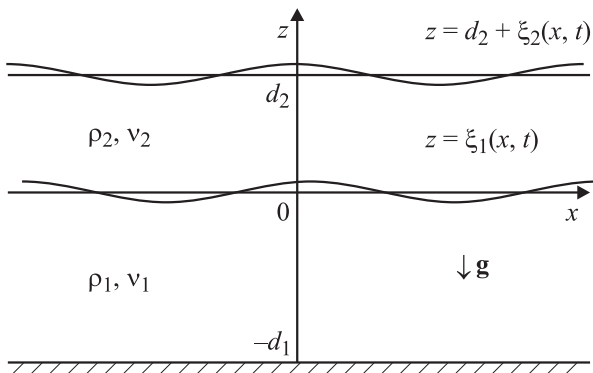
границу раздела сред  $z = \xi(x, t)$  определится как [8–13]:

$$p_f = \frac{A}{6\pi(d + \xi)^3}. \quad (2)$$

В реальности показатель степени в (1) зависит от расстояния и с его увеличением изменяется от трех до четырех [10–13]. В (2) коэффициент пропорциональности  $A$ , имеющий размерность энергии, для слоя жидкости, находящегося на поверхности твердого тела, примем для нижеследующих качественных оценок равным  $10^{-20}$  J. (Согласно [10], стр. 117, значение константы  $A$  для воды, контактирующей с кварцем, равно  $1.12 \cdot 10^{-20}$  J, а для воды, контактирующей со слюдой —  $1.53 \cdot 10^{-20}$  J). При записи (1) предполагается, что неограниченный по площади плоский слой жидкости, лежащий на твердом дне, имеет конечную толщину  $d$  и задан в декартовых координатах геометрическим местом точек —  $d < z < 0$ ).

## 2. Математическая модель

Пусть вязкие, несжимаемые жидкости с плотностью  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , где  $\rho_1 \geq \rho_2$ , и вязкостью  $\nu_1, \nu_2$  заполняют в поле сил тяжести части пространства  $-d_1 \leq z \leq 0$  и  $0 < z \leq d_2$  соответственно (см. рисунок). Нижний слой жидкости толщиной  $d_1$  лежит на твердом дне, а верхний, толщиной  $d_2$ , граничит с вакуумом. Все рассмотрение проведем в декартовой системе координат, ось  $z$  которой направлена против направления ускорения поля силы тяжести  $\mathbf{e}_z \parallel -\mathbf{g}$ , а ось  $x$  — по направлению движения плоской капиллярно-гравитационной волны  $\sim \exp(st + ikx)$  (здесь  $\mathbf{e}_z$  — орт оси  $z$ ;  $s$  — комплексная частота;  $k$  — волновое число;  $t$  — время;  $i$  — мнимая единица). Примем, что плоскость  $z = 0$  совпадает с невозмущенной границей раздела сред, характеризуемой коэффициентом межфазного натяжения  $\sigma_1$ , а плоскость  $z = d_2$  — со свободной поверхностью верхнего слоя жидкости, характеризуемой коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma_2$ . В начальный момент времени  $t = 0$  равновесная в поле сил тяжести поверхность границы раздела жидкостей и свободная поверхность верхнего слоя жидкости деформируются



Схематическое изображение анализируемой системы.

бегущими плоскими волнами:  $\xi_1(x, t) = \xi_1 \exp(st - ikx)$  и  $\xi_2(x, t) = \xi_2 \exp(st - ikx)$  соответственно. Амплитуда  $\xi_1$  много меньше толщины слоя  $d_1$  и длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ , а амплитуда  $\xi_2$  много меньше длины волны  $\lambda = 2\pi/k$ . Амплитуды  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеют один порядок малости. Поля скоростей течений жидкости в нижней и верхней средах, связанные с бегущей волной, обозначим:  $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$  соответственно. В безразмерных переменных (например таких, где  $\rho_1 = \sigma_1 = g + \gamma = 1$ ,  $\gamma \equiv A/2\pi\rho_1 d^4$  — флуктуационный параметр) поля скоростей  $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ , порождаемых деформациями поверхности раздела, имеют тот же порядок малости, что и безразмерные амплитуды деформаций  $\xi_j$ . За всеми переменными оставляем прежние обозначения. В качестве малого параметра задачи выберем  $\varepsilon \equiv \xi_1/\lambda$ . Зададимся целью исследовать закономерности реализации волнового течения жидкостей в описанной системе.

Математическая формулировка задачи, описывающая движения жидкостей в размерном виде, записывается как

$$d_2 + \xi_2 > z > \xi_1 : \quad \frac{d\mathbf{U}^{(2)}}{dt} = -\nabla \left( \frac{1}{\rho_2} P_1(\mathbf{r}, t) + gz \right) + \nu_2 \Delta \mathbf{U}^{(2)}; \quad \text{div } \mathbf{U}^{(2)} = 0;$$

$$-d_1 \leq z \leq \xi_1 : \quad \frac{d\mathbf{U}^{(1)}}{dt} = -\nabla \left( \frac{1}{\rho_1} P_1(\mathbf{r}, t) + gz - \frac{A}{6\pi(d_1 + z)^3} \right) + \nu_1 \Delta \mathbf{U}^{(1)}; \quad \text{div } \mathbf{U}^{(1)} = 0;$$

$$z = \xi_1 : \quad \frac{dF_1}{dt} = 0; \quad F_1(x, z, t) \equiv z - \xi_1(x, t); \\ U_z^{(1)} = U_z^{(2)}; \quad U_x^{(1)} = U_x^{(2)};$$

$$\rho_1 \nu_1 \left( \boldsymbol{\tau}_1 \bullet (\mathbf{n}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{n}_1 \bullet (\boldsymbol{\tau}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(1)} \right) = \rho_2 \nu_2 \left( \boldsymbol{\tau}_1 \bullet (\mathbf{n}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(2)} + \mathbf{n}_1 \bullet (\boldsymbol{\tau}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(2)} \right);$$

$$-(P_1 - P_2) + 2(\rho_1 \nu_1 \mathbf{n}_1 \bullet (\mathbf{n}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(1)} - \rho_2 \nu_2 \mathbf{n}_1 \bullet (\mathbf{n}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(2)}) + P_{\sigma_1}(\xi_1) = 0;$$

$$z = d_2 + \xi_2 : \quad \frac{dF_2}{dt} = 0, \quad F_2(x, z, t) \equiv z - d_2 - \xi_2(x, t),$$

$$\mathbf{n}_2 \bullet (\boldsymbol{\tau}_2 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(2)} + \boldsymbol{\tau}_2 \bullet (\mathbf{n}_2 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(2)} = 0,$$

$$-P_2 + 2\nu_2 \mathbf{n}_2 \bullet (\mathbf{n}_2 \bullet \nabla) \mathbf{U}^{(2)} + P_{\sigma_2}(\xi_2) = 0,$$

$$z = -d_1 : \quad \mathbf{U}^{(1)} = 0;$$

$$t = 0 : \quad \xi_1(x, t) = \xi_1 \exp(-ikx); \quad \xi_2(x, t) = \xi_2 \exp(-ikx);$$

где  $\boldsymbol{\tau}_j$  и  $\mathbf{n}_j$  (где  $j = 1, 2$ ) — орты касательной и нормали к границе раздела сред и к свободной поверхности верхнего слоя жидкости;  $P_1(\mathbf{r}, t)$  и  $P_2(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамическое давление в первой и второй средах;  $P_{\sigma_1}(\xi_1)$  и  $P_{\sigma_2}(\xi_2)$  — давление на границу раздела сред и на свободную поверхность верхнего слоя жидкости капиллярных сил.

Поскольку сформулированная эволюционная задача характеризуется производными по времени второго порядка (производные по времени входят в уравнение Навье-Стокса и в кинематическое граничное условие), то для каждой из поверхностей раздела должно быть задано два начальных условия, а не одно. Поэтому кроме формы деформации поверхностей раздела сред в начальный момент времени нужно задать и профили поля скоростей при  $t = 0$ . В нижеследующих построениях в качестве второго начального условия будет использовано требование обращения в нуль начальной фазы волновой деформации. Это позволит получить в проводимом качественном исследовании менее громоздкие финальные выражения для искомым полей скоростей волнового течения жидкостей выше и ниже границы их раздела.

### 3. Упрощение задачи

Сформулированная задача вполне решается, но ее дисперсионное уравнение в силу наличия двух поверхностей раздела и твердого дна будет весьма громоздким и малопривлекательным для исследования отдельных волновых движений. Поскольку в проводимом анализе нас в первую очередь интересуют свойства волновых движений, порождаемых границей стратификации (придонным слоем, подверженным действию флуктуационных сил), то целесообразно упростить задачу таким образом, чтобы сделать эти волновые движения единственными. Необходимое упрощение проведем путем совершения двух предельных переходов:  $d_2 \rightarrow \infty$ ,  $\rho_2 \rightarrow 0$ ,  $\nu_2 \rightarrow 0$  (рисунок). В итоге останется задача о расчете волнового движения в тонком слое вязкой жидкости на твердой подложке при существенном влиянии сил флуктуационной природы

$$-d_1 \leq z \leq \xi_1 : \quad \frac{d\mathbf{U}^1}{dt} = -\nabla \left( \frac{1}{\rho_1} P_1 + gz - \frac{A}{6\pi(d_1 + z)^3} \right) + \nu_1 \Delta \mathbf{U}^1; \quad \text{div } \mathbf{U}^1 = 0;$$

$$z = \xi_1 : \quad \frac{dF_1}{dt} = 0; \quad F_1(x, z, t) \equiv z - \xi_1(x, t);$$

$$\mathbf{n}_1 \bullet (\boldsymbol{\tau}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^1 + \boldsymbol{\tau}_1 \bullet (\mathbf{n}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^1 = 0;$$

$$-P_1 + 2\nu_1 \bullet \mathbf{n}_1 \bullet (\mathbf{n}_1 \bullet \nabla) \mathbf{U}^1 + P_{\sigma_1} = 0;$$

$$z = -d_1 : \quad \mathbf{U}^1 = 0;$$

$$t = 0 : \quad \xi_1(x, t) = \xi_1 \exp(-ikx).$$

Отметим, что давление гравитационных и флуктуационных сил в сформулированную задачу входит в виде суммы. Перейдем к безразмерным переменным, в которых  $\rho_1 = \sigma_1 = g + \gamma = 1$ . Несложно видеть, что при  $d_1 \leq 10^{-5}$  см величина флуктуационного параметра  $\gamma$  будет на несколько порядков превышать величину ускорения поля силы тяжести  $g$ , влиянием которого на течение жидкости в тонких слоях можно пренебречь,

а все ниже сказанное будет относиться к любым пристеночным слоям жидкости независимо от их ориентации по отношению к  $\mathbf{g}$ .

Решение задачи классическими методами [21] (см. также [3–9]) позволяет найти ее решение в виде

$$\xi_1(x, t) = \xi_1 \exp(st - ikx) + k.c.;$$

$$\varphi(x, z, t) = \xi_1 [B_1 \text{sh}(kz) + B_2 \text{ch}(kz)] \times \exp(st - ikx) + k.c.;$$

$$\psi(x, z, t) = \xi_1 [B_3 \text{sh}(qz) + B_4 \text{ch}(qz)] \times \exp(st - ikx) + k.c.;$$

$$B_1 = \frac{(s + 2\nu_1 k^2)}{k};$$

$$B_2 =$$

$$\frac{(s + 2\nu_1 k^2) [(k \text{sh}(kd_1) \text{sh}(qd_1) - q \text{ch}(kd_1) \text{ch}(qd_1)) + 2\nu_1 k^2 q]}{k [k \text{ch}(kd_1) \text{sh}(qd_1) - q \text{sh}(kd_1) \text{ch}(qd_1)]};$$

$$B_3 =$$

$$i \frac{(s + 2\nu_1 k^2) - 2\nu_1 k [k \text{ch}(kd_1) \text{ch}(qd_1) - q \text{sh}(kd_1) \text{sh}(qd_1)]}{(k \text{ch}(kd_1) \text{sh}(qd_1) - q \text{sh}(kd_1) \text{ch}(qd_1))};$$

$$B_4 = -2i\nu_1 k,$$

где  $\varphi(x, z, t)$  и  $\psi(x, z, t)$  — потенциал и функция тока течения вязкой жидкости [21], а частота удовлетворяет дисперсионному уравнению:

$$4qk^2(k^2 + q^2) + (k^2 + q^2)^2 [k \text{sh}(kd_1) \text{sh}(qd_1) - q \text{ch}(kd_1) \text{ch}(qd_1)] + 4qk^3 [q \text{sh}(kd_1) \text{sh}(qd_1) - k \text{ch}(kd_1) \text{ch}(qd_1)] - \omega_0^2(k) \nu_1^{-2} [q \text{sh}(kd_1) \text{ch}(qd_1) - k \text{ch}(kd_1) \text{sh}(qd_1)] = 0;$$

$$\omega_0^2(k) \equiv k + k^3; \quad q \equiv \sqrt{k^2 + (s/\nu_1)}.$$

Аббревиатура „*k.c.*“ означает „слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным“.

При  $\nu_1 \ll 1$ , когда  $q \gg k$ , дисперсионное уравнение в линейном приближении по безразмерной вязкости  $\nu_1$  может быть переписано в существенно более простом виде относительно комплексной частоты  $s$ :

$$s^2 + 4\nu_1 k^2 s + \omega_0^2(k) \text{th}(kd_1) = 0,$$

а его решения легко выписываются

$$s^{(1,2)} = -\eta \pm i\omega \equiv -2\nu_1 k^2 \pm i \sqrt{\omega_0^2(k) \text{th}(kd_1) - (2\nu_1 k^2)^2}, \quad (3)$$

$\omega$  — частота волны в слое вязкой жидкости конечной толщины.

## 4. Анализ

Целесообразно проанализировать три случая, различающихся по соотношениям длин волн и толщины слоя жидкости.

1)  $kd \ll 1$ ,  $k^2 \gg 1$ ,  $v_1 \ll 1$ . В такой ситуации  $\eta = 2v_1k^2$ ,  $\omega \approx \sqrt{d_1 - 4v_1^2k^2}$ . Квадрат фазовой скорости волн определится выражением

$$V_f^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \approx k^2(d_1 - 4v_1^2). \quad (4)$$

Полученный закон дисперсии характерен для капиллярных волн на мелкой воде (когда  $\text{th}(kd_1) \sim kd_1$ ). Поскольку  $d_1 \approx 10^{-5}$  см, то для волн должно выполняться условие  $10^2 \text{ см}^{-1} < k < 10^4 \text{ см}^{-1}$ , а  $10^{-1} \text{ см} > \lambda > 10^{-3} \text{ см}$ . Поскольку квадрат скорости всегда положителен, то, согласно (4), в указанных условиях волновое движение может существовать только в жидкостях, для которых  $v_1 < 0.5\sqrt{d_1}$ . Учитывая, что при принятом обезразмеривании характерный масштаб измерения вязкости  $\sim 1 \text{ см}^2/\text{с}$ , а характерный масштаб измерения длины  $\sim 0.01 \text{ см}$ , ограничения на вязкость жидкости будут достаточно слабыми.

Из выражений для декремента затухания  $\eta$  и частоты  $\omega$  видно, что они одинаковым образом зависят от волнового числа и имеют примерно одинаковые величины. Следовательно, амплитуда волны будет затухать в  $e$  раз в течение одного периода, т.е. волны будут сильно затухающими.

2)  $kd \ll 1$ ,  $k^2 \ll 1$ ,  $v_1 \ll 1$ . В такой ситуации  $\eta = 2v_1k^2$ ,  $\omega \approx \sqrt{d_1}k$ .

$$V_f^2 = \frac{(k + k^3)kd_1 - 4v_1^2k^4}{k^2} \approx d_1.$$

Если теперь  $d \gg 4v_1^2k^2$ , то  $V_f \approx \sqrt{d_1}$ , т.е. фазовая скорость не зависит от волнового числа, а этот закон дисперсии характерен для гравитационных волн на мелкой воде [8,9,22,23]. Видно также, что частота много больше декремента затухания, который оказывается весьма малым, а сами волны будут слабозатухающими. Таким образом, на границе стратификации жидкости в поле флуктуационных сил возможно существование солитонов или волновых пакетов, составленных из волн с длиной, существенно превышающей толщину слоя жидкости:  $\lambda \gg 2\pi d_1$ , или точнее, в размерном виде  $\lambda > 2\pi\sqrt{\sigma_1/\rho_1(g + \gamma)}$ , имеющих характерные линейные размеры  $\sim d_1$ .

3)  $\text{th}(kd_1) \approx 1$  или  $kd_1 > 2$ ,  $v_1 \ll 1$ . В размерном виде при  $d \approx 10^{-5}$  см получим оценки:  $k > 2 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ ,  $\lambda < 3 \cdot 10^{-5} \text{ см}$ . В такой ситуации  $\eta = 2v_1k^2$ ,  $\omega \approx \sqrt{k^3 - 4v_1^2k^4}$ , а для фазовых скоростей получим

$$V_f^2 = \frac{(k + k^3) - 4v_1^2k^4}{k^2} \approx k - 4v_1^2k^2.$$

Это означает, что для маловязких жидкостей в диапазоне значений безразмерных волновых чисел

$0.25v_1^{-2} \gg k > 2d^{-1}$  (при коэффициенте безразмерной кинематической вязкости  $v_1 < 10^{-3}$ ) в тонком придонном слое толщиной  $d \approx 10^{-5}$  см, несмотря на действие флуктуационных сил, будут существовать волны длиной  $\lambda < 3 \cdot 10^{-5}$  см и с законом дисперсии  $V_f \approx \sqrt{k}$ , характерным для чисто капиллярных волн на глубокой жидкости. Из сравнения величин декремента затухания и частоты видно, что для большинства жидкостей волны обсуждаемого типа будут быстро затухающими.

Если вернуться к исходной задаче, сформулированной в п. 2, то все результаты, полученные на упрощенной модели, в качественном смысле останутся справедливыми, поскольку наличие внешней для границы стратификации среды приводит лишь к количественным изменениям характеристик течений жидкости [3,4,7].

## Заключение

В пристенных слоях маловязких жидкостей, стратифицированных ориентирующим влиянием твердых стенок и флуктуационных сил, возможно существование как слабо затухающих уединенных волн, так и сильно затухающих периодических волн с законами дисперсии, характерными в области больших длин волн:  $\lambda \gg d$  (т.е. при  $d \approx 10^{-5}$  см в диапазоне  $10^{-1} \text{ см} > \lambda > 10^{-3} \text{ см}$ ) для капиллярных волн на глубокой жидкости, а в области коротких длин волн  $\lambda \leq 3d$  (при  $d \approx 10^{-5}$  см в диапазоне  $\lambda < 3 \cdot 10^{-5}$  см) — для мелкой жидкости.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета и при поддержке грантов Рособразования № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

## Список литературы

- [1] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
- [2] Бояджиев Х., Бешков В. Массоперенос в движущихся пленках жидкости. М.: Мир, 1988. 137 с.
- [3] Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 21–30.
- [4] Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 31–46.
- [5] Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 288 с.
- [6] Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 51–57.
- [7] Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 36–42.
- [8] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 6. С. 36–41.
- [9] Климов А.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 10. С. 14–21.
- [10] Дерягин Б.В. Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 205 с.
- [11] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкости. М.: Наука, 1975. 592 с.

- [12] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
- [13] *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 400 с.
- [14] *Френкель Я.И.* Теория явлений атмосферного электричества. М.: URSS, 1975. 152 с.
- [15] *Kochurova N.N., Rusanov A.I.* // J. Coll. Int. Sci. 1981. Vol. 81. N 2. P. 297–303.
- [16] *Пастухов Б.А., Пасынков С.Б., Хлытов В.В.* и др. // Расплавы. 1987. Т. 1. № 3. С. 63–67.
- [17] *Vonfillon F.* // J. Coll. Int. Sci. 1994. Vol. 164. N 2. P. 497–504.
- [18] *Быковский Ю.А., Манькин Э.А., Полуэктов П.П.* и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 10. С. 2212–2213.
- [19] *Алтоиз Б.А., Кириян С.В., Шатагина Е.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 37–40.
- [20] *Френкель Я.И.* // ЖТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [21] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [22] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 10. С. 27–31.
- [23] *Саночкин Ю.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 24–29.