

01;09

Аналогия между электрическими параметрами неоднородных сред и геометрическими характеристиками фрактальной линии

© В.К. Балханов, Ю.Б. Башкуев

Отдел физических проблем Бурятского научного центра СО РАН,
670047 Улан-Удэ, Россия
E-mail: ballar@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 7 сентября 2010 г.)

Установлена аналогия модуля поверхностного импеданса, частоты и скин-слоя неоднородных сред с длиной фрактальной линии, масштабом измерения и необходимым для измерения длины числом масштабов измерения соответственно. Эта аналогия позволяет независимо от других методов получить частотные характеристики скин-слоя и модуля поверхностного импеданса. Частотные характеристики удовлетворительно описывают осадочные и кристаллические горные породы в широком частотном диапазоне.

Введение

При исследовании физических процессов широко используется метод аналогий. Например, колебание груза на пружине математически эквивалентно электрическому колебательному контуру, состоящему из параллельно соединенных в электрическую цепь индуктивности и емкости. Метод аналогий основан на том, что с точностью до обозначений в обоих случаях имеют дело с одинаковыми уравнениями, которые при соответствующих граничных и начальных условиях имеют одинаковые решения. В работе метод аналогий применим к обоснованию применения фрактальной геометрии к решению физических задач.

Новая геометрия, открытая Б. Мандельбротом [1], описывает многомасштабные и самоподобные объекты, которые называют фрактальными. Такие объекты характеризуются безразмерной величиной — фрактальной размерностью D . Причем величина D , как правило, имеет дробное значение. Известный пример фрактального объекта — одномерное канторовское множество, для которого $D < 1$ [2]. Ранее, в ряде работ авторов, была показана эффективность применения фрактальных методов к объяснению экспериментальных результатов, полученных в ходе натуральных измерений некоторых природных процессов и явлений с участием электромагнитных полей [3–6]. Полезным также является сборник [7].

В упомянутых работах использовались два метода решения радиофизических задач. Первый метод основывается на моделировании физических процессов эквивалентными электрическими схемами, которые строятся иерархическим способом [6,8]. Второй метод исходит из инвариантности уравнений Максвелла относительно геометрического подобия [3]. Разумеется, применение обоих методов приводит к одинаковым результатам. В настоящей работе разовьем еще один метод решения, который позволит получать некоторые фрактальные степенные характеристики, можно сказать, „моментально“.

Теория

Поясним терминологию и обозначение физических и геометрических величин. Поверхностный импеданс δ определяется как отношение тангенциальных компонент переменных электрического и магнитного полей на плоской поверхности (нормированный на импеданс вакуума). Скин-слой H характеризует глубину проникновения внешнего электромагнитного поля в зондируемую подстилающую среду. Масштаб измерения χ — это раствор циркуля, которым обходят фрактальную линию. Чтобы обойти линию один раз, требуется N число раз приложить раствор циркуля. Тогда длина L фрактальной линии будет равна произведению $N\chi$, или

$$L(\chi) = N(\chi)\chi. \quad (1)$$

После многочисленных измерений Мандельброт [1] и Ричардсон [9] для широкого класса условных линий на земной поверхности (береговые линии, границы государств) установили следующий степенной закон:

$$L = A\chi^{1-D}. \quad (2)$$

Здесь A — типичный для фрактальной геометрии неопределенный множитель [2]. Как было указано выше, D — фрактальная размерность линии. Сравнив формулы (1) и (2), находим степенной закон для числа N :

$$N = A\chi^{-D}. \quad (3)$$

Гениальность Мандельброта проявилась в том, что в законе (2), или (3), степенной показатель D описывает размерность новой, доселе неизвестной, фрактальной геометрии.

Для исследования электрических свойств технических материалов и земной среды анализируют частотные характеристики поверхностного импеданса $\delta(\omega)$ и скин-слоя $H(\omega)$, где ω — круговая частота электромагнитного поля. Для однородной проводящей среды модуль

Частотные характеристики модуля поверхностного импеданса $|\delta| \cdot 10^{-3}$ некоторых горных пород в диапазоне 3–300 Hz [11]

f , kHz	Субвулканические образования и габброиды	Метаморфические породы	Гранитоиды	Щелочные гранитоиды
3	1.01 ± 0.17	0.72 ± 0.17	0.54 ± 0.16	0.44 ± 0.10
8	1.65 ± 0.28	1.17 ± 0.27	0.87 ± 0.26	0.70 ± 0.15
14	2.18 ± 0.37	1.55 ± 0.36	1.14 ± 0.34	0.90 ± 0.20
20	2.61 ± 0.44	1.85 ± 0.43	1.35 ± 0.40	1.06 ± 0.24
40	3.70 ± 0.62	2.61 ± 0.61	1.87 ± 0.56	1.42 ± 0.33
80	5.23 ± 0.88	3.68 ± 0.86	2.59 ± 0.76	1.90 ± 0.47
120	6.40 ± 1.08	4.50 ± 1.04	3.12 ± 0.92	2.22 ± 0.58
180	7.84 ± 1.33	5.48 ± 1.27	3.75 ± 1.11	2.62 ± 0.69
300	10.10 ± 1.71	7.03 ± 1.63	4.71 ± 1.42	3.20 ± 0.87
$ \delta $	$\omega^{0.5}$	$\omega^{0.48}$	$\omega^{0.46}$	$\omega^{0.4}$
D	0.5	0.52	0.54	0.6

$|\delta(\omega)|$ и величина $H(\omega)$ связаны следующим соотношением [10]:

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{2}c}{\omega} |\delta(\omega)|, \quad (4)$$

где c — скорость света в вакууме. Поскольку формула (4) не содержит параметров подстилающей среды, примем, что она верна и для неоднородной среды. В этом случае можем записать следующую формулу:

$$|\delta(\omega)| \approx H(\omega) \omega. \quad (5)$$

Если отвлечься от несущественных постоянных множителей, а такое положение является типичным для фрактальной геометрии, то можно сравнить формулы (1) и (5). Действительно, во фрактальной геометрии измерительной линейкой является набор масштабов измерения χ . При зондировании сред электромагнитным полем измерительной линейкой является набор частот. Следовательно, масштаб χ является вполне аналогичным круговой частоте ω . Сравнив остальные величины в формулах (1) и (5), находим следующие правила соответствия:

$$\omega \leftrightarrow \chi, \quad H(\omega) \leftrightarrow N(\chi), \quad |\delta(\omega)| \leftrightarrow L(\chi). \quad (6)$$

Формулами (6) установлены правила аналогии между геометрическими величинами фрактальной геометрии и величинами, характеризующие взаимодействие электромагнитного поля с неоднородной средой. Сравнив формулы (6) с законами (2) и (3), находим частотные характеристики скин-слоя:

$$H(\omega) = B \omega^{-D} \quad (7)$$

и модуля поверхностного импеданса:

$$|\delta(\omega)| = U \omega^{1-D}. \quad (8)$$

Здесь B и U — типичные при фрактальном описании множители.

Сравнение с экспериментом

Степенной характеристике в широком частотном диапазоне удовлетворяют многие кристаллические и осадочные горные породы. В качестве примера укажем на некоторые горные кристаллические породы [11], для которых закон (8) выполняется в частотном диапазоне 3–300 Hz (см. таблицу). На рис. 1 показано, что в частотном диапазоне 0.18–10 MHz закон (8) выполняется для некоторых осадочных пород [12].

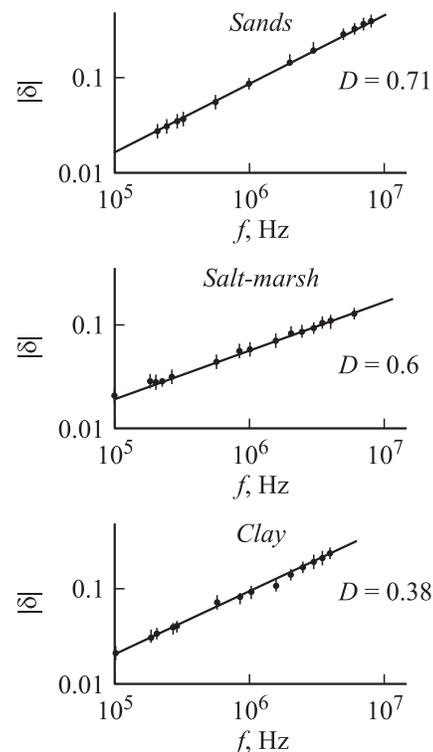


Рис. 1. Фрактальная интерпретация результатов измерения модуля поверхностного импеданса для некоторых различных осадочных комплексов горных пород в диапазоне 0.18–10 MHz. Вертикальные штрихи — погрешности измерений [12].

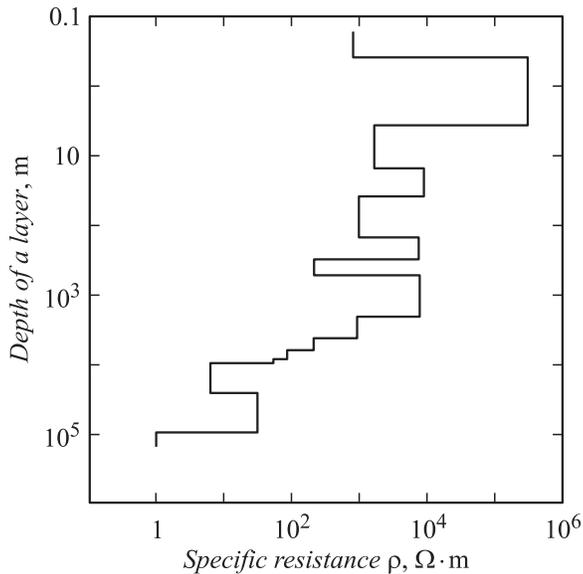


Рис. 2. Геоэлектрический разрез пункта измерения „Озерный“.

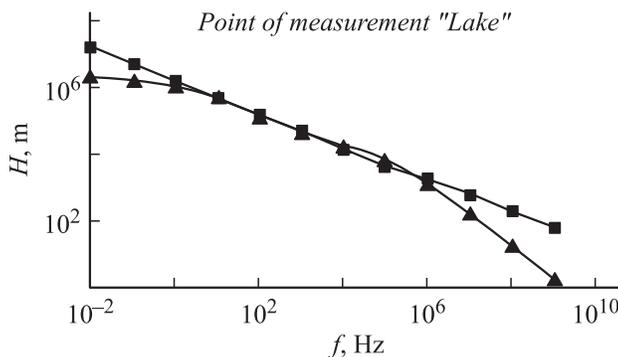


Рис. 3. Частотная зависимость глубины скин-слоя в диапазоне от 10^{-2} до 10^9 Hz; ■ — вычисление фрактальным методом, ▲ — вычисление для слоистой среды.

Подробно рассмотрим пункт измерения „Озерный“ [5]. Для него в исследовании [13] на глубину до 100 km был восстановлен 15-слойный геоэлектрический разрез (рис. 2). Рассматриваемый пример интересен тем, что для данного пункта измерения можно вычислить частотную характеристику не только для модуля поверхностного импеданса, но и для скин-слоя.

Метод вычисления заключается в следующем. Сначала задается частота электромагнитной волны с единичным уровнем электрического поля, падающей вертикально на многослойную геоэлектрическую среду. Затем для первого слоя по формуле $\exp(-kz)$ вычисляется амплитуда прошедшей волны; здесь z — вертикальная в глубь разреза координата, $k = \sqrt{\mu_0\omega/2\rho}$, ρ — удельное электрическое сопротивление первого слоя, $\omega = 2\pi f$, μ_0 — магнитная постоянная, f — частота. Аналогично рассматриваются второй и нижеследующие слои. Расчет прекращается, когда амплитуда поля становится меньше

падающего в e раз. Изложенный метод расчета повторяется для другой частоты и т.д. Результат расчета в диапазоне частот от 10^{-2} до 10^9 Hz представлен на рис. 3.

Из рис. 3 следует, что $\ln H$ и $\ln f$ удовлетворительно описываются линейной зависимостью между собой, т.е.

$$H(\bar{m}) = 13\,800 f \text{ (Hz)}^{-0.48 \pm 0.01}. \quad (9)$$

По известной частотной зависимости скин-слоя теперь можно рассчитать модуль поверхностного импеданса. Метод расчета заключается в следующем. Рассмотрим частоту 1 kHz. Согласно формуле (9), на этой частоте скин-слой H равен 500 m. Такая глубина охватывает полностью верхние семь слоев и частично восьмой. Для полученной 8-слойной среды на частоте 1 kHz рассчитываем модуль поверхностного импеданса $|\delta|$, который оказывается равным 0.007. Далее частота меняется, и расчет модуля поверхностного импеданса повторяется.

Результаты расчета в диапазоне от 1 Hz до 1 MHz представлены на рис. 4, где также проведено сравнение с формулой (8), причем установлено

$$|\delta| = 1.6 \cdot 10^{-4} f^{0.53 \pm 0.01}.$$

Из сравнений формул (9) и (10) с характеристиками (7) и (8) следует, что фрактальная размерность, вычисленная по частотной характеристике скин-слоя, равна

$$D(\text{скин-слой, 11 декад}) = 0.48 \pm 0.01$$

и фрактальная размерность, вычисленная по частотной характеристике модуля поверхностного импеданса, равна

$$D(\text{импеданс, 6 декад}) = 0.47 \pm 0.01.$$

Значения удовлетворительно согласуются друг с другом. Такое согласие, в частности, оправдывает наше предположение о переходе от формулы (4) к формуле (5).

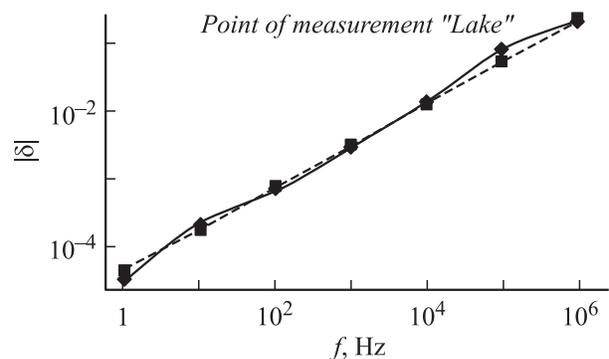


Рис. 4. Сравнение вычисленного модуля поверхностного импеданса для слоистой среды (сплошная кривая) и фрактальным методом (штриховая линия).

Заключение

Установлена аналогия между некоторыми электродинамическими величинами и величинами, характеризующими фрактальную линию. Эта аналогия позволяет элегантным способом получить степенные частотные характеристики скин-слоя и модуля поверхностного импеданса. Показано, что полученные частотные характеристики в широком частотном диапазоне удовлетворительно описывают многие кристаллические и осадочные горные породы на глубину до 100 km.

Работа частично поддержана РФФИ (грантами №№ 08-01-98006, 08-02-98007) и интеграционным проектом № 56 СО РАН.

Список литературы

- [1] *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Изд-во Института компьютерных исследований, 2002. 656 с.
- [2] *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 262 с.
- [3] *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. Вып. 3. С. 1–5.
- [4] *Балханов В.К., Адвокатов В.Р., Башкуев Ю.Б.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 146–148.
- [5] *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Ангархаева Л.Х.* // Электромагнитные волны и электронные системы. 2009. № 4. С. 45–48.
- [6] *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* // Электромагнитные волны и электронные системы, 2006. № 6. С. 39–45.
- [7] Фракталы в физике. Тр. VI междунар. симп. по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9–12 июля, 1985). М.: Мир, 1988. 672 с.
- [8] *Лиу С., Каплан Т., Грэй П.* // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 543–552.
- [9] *Richardson L.F.* // General Systems Yearbook. 1961. Vol. 6. Vol. 6. P. 139–187.
- [10] *Балханов В.К., Башкуев Ю.Б.* Основы теории метода поверхностного импеданса. Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. С. 100.
- [11] *Башкуев Ю.Б., Хаптанов В.Б., Цыдыпов Ч.Ц., Буянова Д.Г.* Естественное электромагнитное поле Забайкалья. М.: Наука, 1989. 112 с.
- [12] *Башкуев Ю.Б.* Электрические свойства природных слоистых сред. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1996. 196 с.
- [13] *Фадеев В.М., Поспеев В.И.* // Ускорение НТП при геофизических исследованиях в Восточной Сибири. Иркутск, ВС НИИГГиМС. 1989. С. 73–75.