

Краткие сообщения

03

Устойчивость стационарного вращения ротора, частично заполненного вязкой флотирующей жидкостью

© Н.В. Дерендяев, И.Н. Солдатов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
603950 Нижний Новгород, Россия
Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,
603024 Нижний Новгород, Россия
e-mail: erfiv@newmail.ru

(Поступило в Редакцию 16 апреля 2010 г.)

Рассматривается задача об устойчивости в малом режиме стационарного вращения ротора с цилиндрической полостью, частично заполненной вязкой несжимаемой флотирующей жидкостью. Найдена результирующая сила, с которой жидкость действует на ротор, совершающий круговую прецессию малого радиуса. Построено D -разбиение на области с различной степенью неустойчивости плоскости параметров вязкоупругих закреплений оси ротора.

При флотации, возникающей, например, при очистке или обогащении минерального сырья, наличие частиц на свободной поверхности влияет на волновые процессы в жидкости, в частности на резонансную частоту волн, что, в свою очередь, изменяет условия устойчивости режима стационарного вращения роторной системы с жидкостью. Для описания волновых движений в жидкости, на свободной поверхности которой плавают весо-мые частицы некоторого вещества, пренебрежимо мало взаимодействующие друг с другом в процессе колебаний, используется модель флотирующей жидкости, иначе называемой жидкостью с инерционной свободной поверхностью. По-видимому, первой работой, где эта модель использовалась, была работа A.S. Petters [1]. Эффекты инерционной свободной поверхности, проявляющиеся при потенциальных движениях жидкости, рассматривались в работах F. Rhodes-Robinson, B.N. Mandal и С.А. Габова и др. (ссылки можно найти в [2]). Заметим, что в таких технических устройствах, как сепараторы и центрифуги, движение жидкости нельзя считать потенциальным.

Пусть вязкая несжимаемая жидкость находится в цилиндрической полости радиуса a ротора, угловая скорость Ω которого поддерживается постоянной. Влиянием силы тяжести пренебрегаем $\Omega^2 a/g \gg 1$. Движение жидкости описывается уравнениями Навье-Стокса. Введем равномерно вращающуюся с угловой скоростью ω цилиндрическую систему координат. В невозмущенном состоянии жидкость располагается в цилиндрическом слое толщиной $(a - b)$, в котором поле скоростей и давление определяются выражениями

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \equiv (\Omega - \omega)r\mathbf{e}_\varphi, \quad p = p_0 \equiv \frac{\rho\Omega(r^2 - b^2)}{2} + p_*,$$

где p_* — давление под свободной поверхностью, ρ — плотность жидкости. Возмущенная свободная поверх-

ность описывается уравнением

$$r = b + h(\varphi, z, t).$$

Кинематическое условие на этой поверхности имеет вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} - u + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + w \frac{\partial h}{\partial z} = 0,$$

где u, v, w — соответственно радиальная, азимутальная и осевая компоненты вектора скорости \mathbf{v} . Для того чтобы записать динамическое граничное условие, рассмотрим элемент весо-мой поверхности ΔS и запишем для него второй закон Ньютона во введенной неинерциальной системе координат

$$\rho_s \Delta S \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + 2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] - \omega^2 \mathbf{r} \right) = \boldsymbol{\sigma}_n \Delta S$$

$$\text{при } r = b + h(\varphi, z, t),$$

где ρ_s — поверхностная плотность (т.е. плотность, приходящаяся на единицу площади),

$$\boldsymbol{\sigma}_n = -p\mathbf{n} + 2\mu(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{v} + \mu[\mathbf{n}, \text{rot} \mathbf{v}]$$

— вектор напряжений на площадке с нормалью \mathbf{n} , μ — коэффициент динамической вязкости жидкости. Сократив на ΔS , линеаризуем граничные условия и перенесем их с возмущенной свободной поверхности $r = b + h(\varphi, z, t)$ на $r = b$ — поверхность жидкости при стационарном вращении. В проекциях на оси φ, r цилиндрической системы координат получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} - u + (\Omega - \omega) \frac{\partial h}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\rho_s \left(\frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \right) = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 b \frac{\partial h}{\partial \varphi},$$

$$\rho_s \left(\frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \right) = -\rho \Omega^2 b h - p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (1)$$

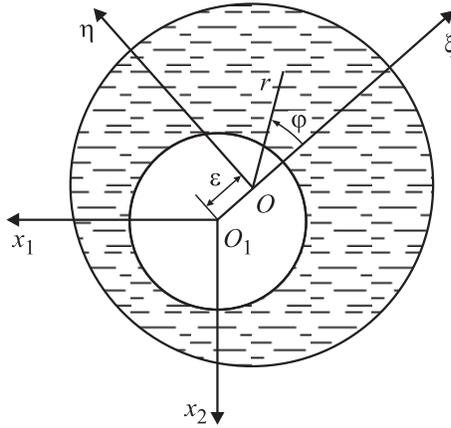


Рис. 1.

Исследуем устойчивость стационарного вращения лавалевского ротора (точки ротора могут перемещаться только в плоскостях, перпендикулярных оси стационарного вращения) с цилиндрической полостью, частично заполненной флотирующей жидкостью. Ось ротора находится в изотропных вязко-упругих опорах. Угловая скорость ротора в возмущенном движении поддерживается постоянной и равной Ω .

Уравнения движения ротора в неподвижной системе координат $O_1x_1x_2x_3$ с осью O_1x_3 , совпадающей с осью стационарного вращения (рис. 1), в комплексных переменных имеют следующий вид:

$$M\ddot{z} = F + f, \quad (2)$$

$$z = x_1^0 + ix_2^0, \quad F = F_1 + iF_2, \quad i^2 = -1, \quad F_k = -\iint_S \sigma_{kj}n_j ds,$$

$$\sigma_{kj} = -p\delta_{kj} + \mu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right),$$

$$j, k = 1, 2, \quad f = -Kz - H\dot{z},$$

где M — масса ротора, x_1^0, x_2^0 — координаты точки пересечения оси ротора с плоскостью Ox_1x_2 , F_k — компоненты гидродинамической силы, σ_{kj} — компоненты тензора напряжений, f — сила реакции опор оси ротора, K, H — коэффициенты линейной упругости и вязкости закрепленной оси ротора соответственно.

В соответствии с методом исследования устойчивости [3] должна быть рассмотрена задача о движении жидкости, когда ротор совершает круговую прецессию малого радиуса, и найдена сила, с которой жидкость действует на ротор. Далее на основании полученных выражений для силы из линеаризованных уравнений поступательного движения ротора (2) находятся условия, при которых возможна круговая прецессия. Эти условия определяют границы областей с различной степенью неустойчивости в пространстве параметров задачи.

Пусть ротор с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью, совершает круговую прецессию

малого радиуса с частотой ω . Введем неинерциальную систему отсчета $O\xi\eta$ (рис. 1), связанную с линией центров, проходящей через центр прецессии O_1 и центр сечения цилиндра O . В этой системе отсчета введем полярную систему координат с центром в точке O . При круговой прецессии лавалевского ротора в выбранной указанным образом системе координат движение жидкости будет описываться плоским полем скоростей, не зависящим от времени

$$\text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{v}_0] = -2[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}] - \frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} + \omega^2 \mathbf{e}_\xi,$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Линеаризованные граничные условия (1) на свободной инерционной поверхности в безразмерных переменных удобно представить, исключив h , в виде двух уравнений

$$\left(\frac{E}{\delta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - 2R + \frac{1}{2} \frac{\delta}{1-\tau} \right) u + E \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{\delta} \right) \Big|_{r=\delta} = 0,$$

$$\left(\frac{\delta}{1-\tau} \frac{\partial}{\partial \varphi} + 2E \frac{\partial}{\partial r} \right) u + 2Rv - p' \Big|_{r=\delta} = 0, \quad (4)$$

где $r' = r/a$, $p' = p/(\rho\Omega^2 a^2)$, $\delta = b/a$, $\tau = \omega/\Omega$, $R = \frac{\rho_s}{\rho a}$, $E = \frac{\nu}{\Omega a^2}$ — число Экмана, $\nu = \mu/\rho$ — коэффициент кинематической вязкости. Ниже штрихи опускаются.

На твердой стенке должны выполняться условия прилипания

$$\mathbf{v}|_{r=1} = 0. \quad (5)$$

Решение гидродинамической задачи (3)–(5) может быть представлено в виде:

$$u = \left[c_1 + \frac{c_2}{r^2} + \frac{i}{r} Z_1(\chi r) \right] e^{i\varphi},$$

$$v = \left[ic_1 - \frac{ic_2}{r^2} - \chi Z_0(\chi r) + \frac{1}{r} Z_1(\chi r) \right] e^{i\varphi},$$

$$p' = \left[i(1+\tau)c_1 r + i \frac{(3-\tau)}{r} c_2 + \frac{\tau^2}{2} r - 2Z_1(\chi r) \right] e^{i\varphi},$$

где

$$Z_n(\chi r) = c_3 H_n^{(2)}(\chi r) + c_4 H_n^{(1)}(\chi r),$$

$H_n^{(1),(2)}(\chi r)$ — функция Ганкеля n -го порядка,

$$\chi = \sqrt{\frac{|1-\tau|}{2E}} \left(i - \frac{1-\tau}{|1-\tau|} \right).$$

Коэффициенты c_j — находятся из системы, полученной из условий (4), (5):

$$c_1 + c_2 + ic_3 H_1^{(2)}(\chi) + ic_4 H_1^{(1)}(\chi) = 0,$$

$$c_1 - c_2 + ic_3 (\chi H_0^{(2)}(\chi) - H_1^{(2)}(\chi))$$

$$+ ic_4 (\chi H_0^{(1)}(\chi) - H_1^{(1)}(\chi)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& -i\delta E^{-1} \left(\frac{\delta}{2(1-\tau)} - 2R \right) c_1 + \left[4\delta^{-2} \right. \\
& - i\delta^{-1} E^{-1} \left(\frac{\delta}{2(1-\tau)} - 2R \right) \left. \right] c_2 - \left\{ 2i\chi\delta H_0^{(2)}(\chi\delta) \right. \\
& + \left. \left[i(\chi^2\delta^2 - 4)\delta^{-1} - E^{-1} \left(\frac{\delta}{2(1-\tau)} - 2R \right) \right] H_1^{(2)}(\chi\delta) \right\} c_3 \\
& - \left\{ 2i\chi\delta H_0^{(1)}(\chi\delta) + \left[i(\chi^2\delta^2 - 4)\delta^{-1} \right. \right. \\
& - \left. \left. E^{-1} \left(\frac{\delta}{2(1-\tau)} - 2R \right) \right] H_1^{(1)}(\chi\delta) \right\} c_4 = 0, \\
& - \left(\frac{i\tau^2}{1-\tau} + 2iR\delta^{-1} \right) c_1 + \left\{ i \left[\frac{2-4\tau+\tau^2}{1-\tau} - \frac{4(1-\tau)}{\chi^2\delta^2} \right] \right. \\
& + \left. 2iR\delta^{-1} \right\} \delta^{-2} c_2 + \left\{ \left[-\frac{2(1-\tau)}{\chi\delta} + 2R\chi^2 \right] H_0^{(2)}(\chi\delta) \right. \\
& + \left. \left[\frac{2\tau-1}{1-\tau} + \frac{4(1-\tau)}{\chi^2\delta^2} - 2R \right] H_1^{(2)}(\chi\delta) \right\} \delta^{-1} c_3 \\
& + \left\{ \left[-\frac{2(1-\tau)}{\chi\delta} + 2R\chi^2 \right] H_0^{(1)}(\chi\delta) + \left[\frac{2\tau-1}{1-\tau} \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{4(1-\tau)}{\chi^2\delta^2} - 2R \right] H_1^{(1)}(\chi\delta) \right\} \delta^{-1} c_4 = -\frac{1}{2}\tau^2.
\end{aligned}$$

Для устранения плохой обусловленности матрицы при расчетах производились перенормировка коэффициентов $c'_3 = c_3 H_0^{(2)}(\chi)$, $c'_4 = c_4 H_0^{(1)}(\chi\delta)$ и соответствующая перенормировка элементов матрицы.

Безразмерные выражения для компонент силы, с которой жидкость действует на стенки ротора, имеют вид

$$F_\xi = \frac{1}{1-\delta^2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + 4i \frac{1-\tau}{\tau^2} c_2 \right\},$$

$$F_\eta = \frac{4}{1-\delta^2} \frac{1}{\tau^2} \operatorname{Im} \{ -i(1-\tau)c_2 \}.$$

Выражения для компонент силы в исходных переменных получаются после умножения на $\rho r \omega^2 (a^2 - b^2)$. Из выражений движения ротора (2) выводятся условия осуществимости круговой прецессии

$$-\frac{M}{m}\tau^2 + \bar{K} = F_\xi \tau^2, \quad \bar{H}\tau = F_\eta \tau^2,$$

где $\bar{K} = K/(m\Omega^2)$, $\bar{H} = H/(m\Omega)$.

На рис. 2 представлено D -разбиение плоскости параметров \bar{K} , \bar{H} на области с различной степенью неустойчивости $D(n)$ (n — степень неустойчивости) для следующих двух случаев $R = 0.05$ (сплошная кривая со штриховкой) и $R = 0.01$ (штриховая кривая) при $E = 10^{-5}$, $\delta = 0.9$, $M/m = 1.5$. На рис. 3 части тех же D -разбиений вблизи $\bar{K} = 0$, $\bar{H} = 0$ показаны более крупным планом. Стрелка указывает направление возрастания параметра τ . Штриховка D -кривой проведена таким образом,

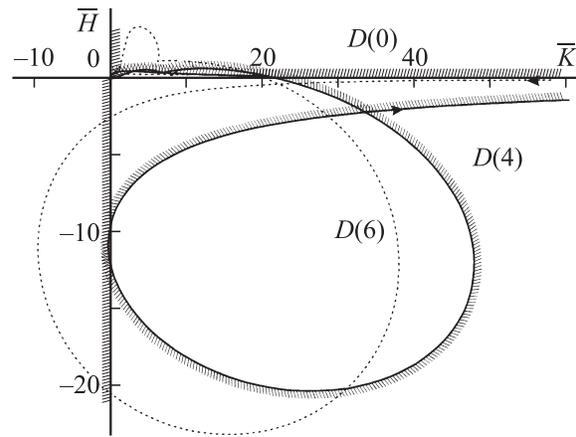


Рис. 2.

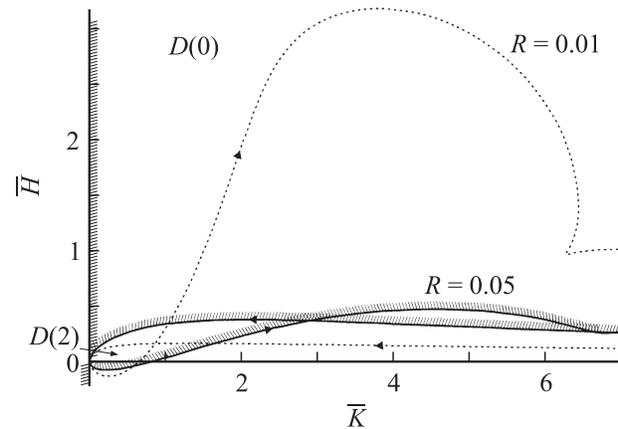


Рис. 3.

что переход в плоскости параметров со штрихованной стороны кривой на нештрихованную соответствует увеличению степени неустойчивости на два. Образование петель или незамкнутых полупетель связано с резонансным возбуждением волн на поверхности жидкости. Выражение для резонансных частот при малых E и R имеет вид

$$\tau_{1,2} \approx \frac{4 \pm \sqrt{2\delta^4 - 4\delta^2 + 10}}{2(\delta^2 + 1)}.$$

С ростом R (увеличением флотирующего вещества на поверхности жидкости) уменьшаются верхняя и нижняя петли (полупетли) и происходит „сдвиг“ вправо фигуры, образованной D -кривой.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (проекты № 09-01-00356 и 09-08-00892).

Список литературы

- [1] *Petters A.S.* // Commun. Pur. Appl. Math. 1950. Vol. 3. N 4. P. 319–354.
- [2] *Габов С.А., Свешников А.Г.* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 3–86.
- [3] *Derendyaev N.V., Vostroukhov A.V., Soldatov I.N.* // J. Appl. Mech.-T. ASME. 2006. Vol. 73. N 4. P. 580–589.