

01;05

Расчет нестационарных термоупругих деформаций в твердотельных объектах в рамках квазистатического приближения

© К.Л. Муратиков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: klm.holo@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 30 марта 2010 г. В окончательной редакции 28 июня 2010 г.)

Разработан общий подход к решению задач нестационарной термоупругости для твердотельных объектов в квазистатическом приближении, основанный на использовании известных в теории упругости функций Грина. В рамках трехмерной модели получены аналитические выражения для термоупругих деформаций объекта, ограниченного с одной стороны плоскостью, при воздействии на него нестационарных тепловых потоков. Получены аналитические выражения для компонент вектора термоупругих деформаций при его облучении нестационарным лазерным излучением. Специально проанализирован случай деформаций поверхности объекта. Рассмотрены характеристики сигналов при регистрации таких деформаций интерферометрическим методом или по изменению направления распространения пучка зондирующего лазера при его отражении от поверхности.

Широкий круг вопросов развития современной техники связан с изучением и оптимизацией теплофизических процессов. Непрерывное повышение тепловых эксплуатационных нагрузок в приборах часто сопровождается выделением значительного количества тепла в малых объемах материала. Процессы подобного рода приводят к появлению в эксплуатируемых объектах критических деформаций и напряжений, которые могут способствовать их быстрой деградации. В связи с этим вопросы оптимизации теплофизических процессов в современных конструкциях и приборах различного рода играют все более важную роль [1,2].

С другой стороны, в ряде современных методик локализованные теплофизические и термоупругие процессы специально используются для решения разнообразных диагностических задач. В частности, методики, использующие нестационарные теплофизические процессы, продемонстрировали эффективность в области неразрушающего контроля [3,4]. Необходимость рассмотрения вопросов подобного рода также непрерывно стимулирует разработку новых подходов к решению задач термоупругости. При этом на практике достаточно часто реализуются условия, соответствующие квазистатическому приближению, при котором размеры объекта и длина возбуждаемых в нем тепловых волн оказываются существенно меньше длин акустических волн [5,6].

В связи с этим основной целью настоящей работы является разработка относительно простого и общего подхода к решению широкого круга задач термоупругости, применимого в рамках квазистатического приближения. Суть предлагаемого подхода состоит в обобщении известного метода решения квазистатических задач теории упругости (см., например, [7]) на случай задач термоупругости. Некоторые предварительные результаты в этой области были приведены в работе [8]. В данной работе проведен более детальный анализ результатов, полученных в рамках такого подхода.

В общем случае для анализа нестационарных термоупругих деформаций необходимо использовать уравнение движения для твердых тел

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

где ρ — плотность материала, u_i — компоненты вектора деформации; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, действующих в объекте.

В рамках квазистатического приближения в уравнении (1) можно пренебречь действием сил инерции. При этом компоненты тензора напряжений в задачах термоупругости задаются в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + [\lambda u_{kk} - \gamma(T - T_0)]\delta_{ik}, \quad (2)$$

где λ и μ — коэффициенты Ламэ, γ — коэффициент термоупругой связи, u_{ij} — компоненты тензора деформации, T — распределение температуры, создаваемое в объекте некоторыми тепловыми источниками; T_0 — температура окружающей среды.

В работе [7] описан способ решения задач упругости в квазистатическом приближении для тел, ограниченных с одной стороны плоскостью, при известном распределении на ней поверхностных сил. Компоненты вектора деформаций при таком подходе могут быть определены методом функций Грина с помощью соотношения

$$u_i(x, y, z) = \int dx' \int dy' G_{ik}(x - x', y - y', z) P_k(x', y'), \quad (3)$$

где $P_i(x, y)$ — распределение поверхностных сил, а компоненты тензорной функции Грина G_{ik} можно считать известными для ряда граничных условий [7].

В работе [5] в квазистатическом приближении с использованием подхода, описанного в [7], была определена функция Грина для объекта с закрепленной при $z = 0$

границей, занимающего полубесконечное пространство. В этой работе были проанализированы термоупругие деформации объекта, возникающие при воздействии на его поверхность локализованного источника тепла. В рамках настоящей работы основное внимание уделяется рассмотрению аналогичной задачи для объекта со свободной границей. При этом граничное условие имеет вид

$$\sigma_{ik}n_k|_{z=0} = P_i, \quad (4)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности объекта.

При обобщении подхода, предложенного в [7], на задачи термоупругости прежде всего следует отметить, что в задачах упругости фактически рассматривается случай, в котором в тензоре напряжений $\gamma = 0$. Покажем, как рассматриваемый подход может быть просто обобщен на задачи термоупругости, в которых $\gamma \neq 0$. Уравнение движения (1) в задаче термоупругости становится неоднородным из-за появления слагаемого, пропорционального градиенту температуры. Чтобы сделать это уравнение однородным, можно представить вектор деформации \mathbf{u}_i в виде

$$u_i = f_i + U_i, \quad (5)$$

где f_i — некоторое частное решение уравнения движения, соответствующее вкладу градиентов температуры.

Таким образом, в результате представления (5) вектор U_i будет удовлетворять уже однородному уравнению движения. В соответствии с [9] такое частное решение в квазистатическом приближении может быть выбрано в форме

$$f_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\gamma}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int d^3r' \frac{\Delta T(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (x_i - x'_i), \quad (6)$$

где введено обозначение $\Delta T = T - T_0$.

Нетрудно найти граничные условия для компонент вектора деформации U_i . Если вектор нормали \mathbf{n} направлен в отрицательном направлении по отношению к оси z , граничное условие (4) может быть представлено следующими выражениями:

$$2\mu U_{xz}|_{z=0} = -P_x - \mu \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \Big|_{z=0} = -P_x^{(\text{eff})},$$

$$2\mu U_{yz}|_{z=0} = -P_y - \mu \left(\frac{\partial f_y}{\partial z} + \frac{\partial f_z}{\partial y} \right) \Big|_{z=0} = -P_y^{(\text{eff})},$$

$$(\lambda U_{ll} + 2\mu U_{zz})|_{z=0} = -P_z - \left(\lambda \operatorname{div} f + 2\mu \frac{\partial f_z}{\partial z} - \gamma(T - T_0) \right) \Big|_{z=0} = -P_z^{(\text{eff})}. \quad (7)$$

В выражениях (7) введено распределение эффективной поверхностной силы $\mathbf{P}^{(\text{eff})}$. Сравнение граничных условий (7) с граничными условиями теории упругости показывает, что для компонент вектора деформации \mathbf{U} они имеют ту же форму, что и в теории упругости, но с заменой силы \mathbf{P} на эффективную силу $\mathbf{P}^{(\text{eff})}$. При этом вектор деформации \mathbf{U} удовлетворяет однородному

уравнению движения. Таким образом, полученные результаты показывают, что в квазистатическом приближении искомое решение задачи термоупругости можно представить в следующей форме:

$$u_i(x, y, z, t) = f_i(x, y, z, t) + \int dx' \int dy' G_{ik}(x - x', y - y', z) P_k^{(\text{eff})}(x', y', t). \quad (8)$$

Выражение (8) позволяет решить достаточно широкий класс задач термоупругости, так как характер зависимости температуры от координат и времени при его выводе не конкретизировался. Не конкретизировался также и тип источника тепла, действующего в объекте. Вместе с тем следует отметить, что непосредственное применение выражения (8) к решению задачи подобного рода из-за наличия двойного интегрирования по координатам x и y может приводить к необходимости вычисления довольно сложных интегралов. Поэтому в ряде задач удобно разложить входящие в него функции в интегралы Фурье по переменным x , y и перейти к анализу фурье-образов соответствующих величин. Для рассматриваемого в рамках данной статьи вопроса удобно также считать, что температура зависит от t по гармоническому закону с частотой ω . Тогда $\Delta T(x, y, z, t) = \Delta T(x, y, z, \omega) e^{i\omega t}$ и после выполнения указанных преобразований можно воспользоваться соотношениями типа

$$\Delta T(x, y, z, t) = \frac{e^{i\omega t}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \times \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_x x + ik_y y} \tilde{\Delta T}(k_x, k_y, z, \omega). \quad (9)$$

В силу линейности поставленной задачи все остальные рассматриваемые величины также будут изменяться во времени по гармоническому закону с частотой ω . После выполнения указанных преобразований, например, выражение (8) для фурье-образов компонент вектора деформации приобретает вид

$$\tilde{u}_i(k_x, k_y, z, \omega) = \tilde{f}_i(k_x, k_y, z, \omega) + \tilde{G}_{ik}(k_x, k_y, z) \tilde{P}_k^{(\text{eff})}(k_x, k_y, \omega). \quad (10)$$

Таким образом, знание тензорной функции Грина G_{ik} с учетом полученных выражений (7) для компонент поверхностных сил фактически позволяет решить поставленную задачу.

В рамках данной работы основное внимание уделим рассмотрению процессов в объектах со свободной границей, на которой справедливо условие (7). В книге [7] приведены выражения для отдельных компонент функции Грина G_{ik} . Поскольку для расчета компонент вектора деформации необходимо использовать все компоненты тензорной функции Грина, то приведем полностью

выражения для них в явном виде

$$G_{xx} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{2(1-\nu)r+z}{r(r+z)} + \frac{[2r(\nu r+z)+z^2]x^2}{r^3(r+z)^2} \right\},$$

$$G_{xy} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \frac{[2r(\nu r+z)+z^2]xy}{r^3(r+z)^2},$$

$$G_{zx} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{xz}{r^3} + \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)} \right\},$$

$$G_{xz} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{xz}{r^3} - \frac{(1-2\nu)x}{r(r+z)} \right\},$$

$$G_{zz} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{2(1-\nu)}{r} + \frac{z^2}{r^3} \right\}, \quad (11)$$

где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Компоненты функции Грина G_{yy} и G_{yz} получаются из G_{xx} и G_{xz} заменой x на y . Таким образом, выражения (8) и (11) полностью позволяют решить задачу об определении вектора термоупругих деформаций в координатном пространстве.

В рамках данной работы сосредоточим основное внимание на рассмотрении термоупругих деформаций поверхности тела, т.е. деформаций при $z=0$. Не останавливаясь на деталях вычислений, для фурье-образов компонент функций Грина при $z=0$ с помощью равенств (11) получим следующие выражения:

$$\tilde{G}_{xx} = \frac{2(1+\nu)}{Ek_{\perp}} \left[1 - \nu + \nu \frac{k_y^2}{k_{\perp}^2} \right],$$

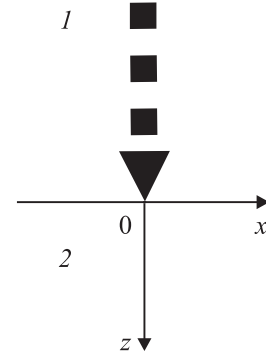
$$\tilde{G}_{xy} = -\frac{2\nu(1+\nu)}{Ek_{\perp}} \frac{k_x k_y}{k_{\perp}^3}, \quad \tilde{G}_{xz} = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{iEk_{\perp}} \frac{k_x}{k_{\perp}^2},$$

$$\tilde{G}_{zx} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{iEk_{\perp}} \frac{k_x}{k_{\perp}^2}, \quad \tilde{G}_{zz} = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{iE} \frac{1}{k_{\perp}}, \quad (12)$$

где

$$k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Знание f_i и $\mathbf{P}^{(\text{eff})}$, определяемых равенствами (6) и (7), а также компонент функции Грина позволяет найти термоупругие деформации поверхности при $z=0$. Следует отметить, что в для f_i входит интегрирование по z' , которое в соответствии с выражением (6) остается даже при определении компонент вектора деформации при $z=0$. Поэтому в выражениях для них будут присутствовать интегралы по z' , включающие температуру ΔT . В наиболее простой форме компоненты вектора деформации поверхности могут быть выражены с использованием указанного преобразования Фурье. Подстановка выражений (12), а также фурье-образов для f_i и $\mathbf{P}^{(\text{eff})}$ в равенства (10) позволяет непосредственно связать фурье-образы компонент вектора термоупругих деформаций поверхности объекта с фурье-образом



Геометрия расположения образца и возбуждающего лазерного излучения: 1 — возбуждающее лазерное излучение, 2 — образец.

распределения температуры в нем. Для них получим следующие соотношения:

$$\tilde{u}_x(k_x, k_y, 0, \omega) = -2 \frac{\gamma(1-\nu)}{\lambda + 2\mu} \frac{ik_x}{k_{\perp}} \times \int_0^{\infty} dz' e^{-k_{\perp} z'} \Delta \tilde{T}(k_x, k_y, z', \omega),$$

$$\tilde{u}_z(k_x, k_y, 0, \omega) = -2 \frac{\gamma(1-\nu)}{\lambda + 2\mu} \times \int_0^{\infty} dz' e^{-k_{\perp} z'} \Delta \tilde{T}(k_x, k_y, z', \omega). \quad (13)$$

Фурье-образ компоненты вектора деформации \tilde{u}_y получается из компоненты \tilde{u}_x заменой в равенстве (13) перед квадратной скобкой k_x на k_y . Равенства (13) позволяют определить все компоненты вектора деформации при известном распределении поля температуры внутри объекта и на его поверхности.

В качестве примера применим полученные результаты к задаче определения термоупругих деформаций, генерируемых в твердотельном объекте нестационарным лазерным излучением, падающим на его поверхность (см. рисунок). Будем считать, что на поверхность объекта не действуют какие-либо дополнительные силы, кроме сил, образующихся в результате теплового расширения материала при поглощении энергии лазерного излучения. Тогда можно считать, что все $P_i = 0$ и деформации в объекте возникают только благодаря появлению в нем температурного поля, обусловленного поглощением лазерного излучения.

Рассмотрим случай, когда пространственно-временное распределение плотности мощности лазерного излучения по поверхности объекта $w(x, y, t)$ определяется законом

$$w_L(x, y, t) = \frac{W_L}{\pi a^2} \frac{1 + \cos \omega t}{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{a^2}}, \quad (14)$$

где W_L — мощность лазерного излучения, a — радиус лазерного пучка на поверхности изучаемого объекта.

Выражение (14) соответствует случаю воздействия на объект лазерного излучения, сфокусированного на поверхность объекта в пятно радиусом a и изменяющегося во времени по гармоническому закону. В силу линейности рассматриваемой задачи для получения решения с законом изменения лазерного излучения во времени достаточно знать распределение температуры, соответствующее временной зависимости $e^{i\omega t}$. Фурье-образ этого распределения может быть представлен в следующей форме [10]:

$$\Delta\tilde{T}(k_x, k_y, z, \omega) = \frac{W_L}{4K_s} e^{-a^2 k_\perp^2 / 4} \frac{e^{-\xi z}}{h + \xi}, \quad (15)$$

где $h = H/K_s$, H — коэффициент, характеризующий теплообмен образца с окружающей средой, K_s — теплопроводность материала образца,

$$\xi = \sqrt{k_\perp^2 + \frac{2i}{\lambda_T^2}}, \quad \lambda_T = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}}$$

— длина тепловой волны в образце, κ — его теплопроводность.

Используя соотношение (15) и выполнив интегрирование по z в выражениях (13) для x и z компонент фурье-образов вектора деформации поверхности получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(k_x, k_y, 0, \omega) &= -2 \frac{\gamma(1-\nu)}{\lambda + 2\mu} \frac{ik_x}{k_\perp} \frac{\Delta\tilde{T}(k_x, k_y, 0, \omega)}{k_\perp + \xi}, \\ \tilde{u}_z(k_x, k_y, 0, \omega) &= -2 \frac{\gamma(1-\nu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\Delta\tilde{T}(k_x, k_y, 0, \omega)}{k_\perp + \xi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (16) справедливы только при конкретном виде распределения температуры в объекте, фурье-образ которого определяется равенством (15). Для определения компонент $u_x(x, y, 0, \omega)$ и $u_z(x, y, 0, \omega)$ вектора деформации необходимо сделать обратное преобразование Фурье от правой части равенства (16). При этом воспользуемся известными соотношениями $\gamma = E\alpha$ (α — коэффициент теплового расширения) и

$$\lambda + 2\mu = E \frac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} [7].$$

Тогда для них получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, 0, \omega) &= -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi} \frac{x}{r} \\ &\times \int_0^\infty dk_\perp k_\perp \frac{\Delta\tilde{T}(k_x, k_y, 0, \omega)}{k_\perp + \xi} J_1(k_\perp r), \\ u_z(x, y, 0, \omega) &= -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi} \\ &\times \int_0^\infty dk_\perp k_\perp \frac{\Delta\tilde{T}(k_x, k_y, 0, \omega)}{k_\perp + \xi} J_0(k_\perp r), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

— расстояние от центра лазерного пучка на поверхности объекта до точки наблюдения, $J_0(k_\perp r)$ и $J_1(k_\perp r)$ — функция Бесселя нулевого и первого порядков.

В соответствии с выражениями (17) термоупругие деформации объекта в квазистатическом приближении не зависят от модуля Юнга материала, а определяются только его коэффициентом теплового расширения, коэффициентом Пуассона и теплофизическими параметрами. Рассматриваемая задача возбуждения деформаций с помощью лазерного излучения обладает цилиндрической симметрией. Поэтому возбуждаемые им деформации могут характеризоваться компонентами u_r и u_z вектора деформаций. Из равенства (17), а также из аналогичного ему равенства для u_y компоненту u_r получим в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_r(x, y, 0, \omega) &= \frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi} \\ &\times \int_0^\infty dk_\perp k_\perp \frac{\Delta\tilde{T}(k_x, k_y, 0, \omega)}{k_\perp + \xi} J_1(k_\perp r). \end{aligned} \quad (18)$$

Для определения компонент u_x , u_z и u_r необходимо вычислить интегралы в выражениях (17), (18). Их рассмотрение показывает, что при $h \gg \frac{1}{\lambda_T}$ и $a \leq \lambda_T$ замена в них $k_\perp + \xi$ на $2k_\perp$ слабо влияет на величины рассматриваемых деформаций. Следует отметить, что первое из этих условий хорошо соответствует квазистатическому приближению, так как оно справедливо при низких частотах. Второе условие выполняется для лазерного излучения, сильно сфокусированного на поверхность образца. Оно обычно выполняется, например, в фотоакустической микроскопии [11]. С учетом сделанного замечания, например, для вычисления u_z можно использовать упрощенное равенство

$$\begin{aligned} u_z(r, 0, \omega) &\cong -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi} \\ &\times \int_0^\infty dk_\perp \Delta\tilde{T}(k_\perp, 0, \omega) J_0(k_\perp r). \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом выражений (15) и (17) для компоненты вектора деформации поверхности образца u_z в явном виде получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} u_z(r, 0, \omega) &= -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi} \frac{W_L}{K_s} \\ &\times \int_0^\infty dk_\perp \frac{e^{-a^2 k_\perp^2 / 4}}{h + \sqrt{k_\perp^2 + \frac{2i}{\lambda_T^2}}} J_0(k_\perp r). \end{aligned} \quad (20)$$

В общем случае интегралы, входящие в выражения (17), (18) и (20), не могут быть вычислены аналитически. Однако в случае достаточно интенсивного

теплообмена с окружающей средой, когда $ha \gg 1$, в выражении (20) можно пренебречь k_{\perp}^2 под знаком корня. Такая возможность связана с тем, что из-за наличия экспоненциального убывающего множителя в фурье-образе температуры в соотношении (15) существенные значения k_{\perp} при интегрировании в равенствах типа (17)–(20) лежат в диапазоне $k_{\perp} \leq a$. Поэтому при $ha \gg 1$ пренебрежение k_{\perp} в знаменателе подынтегрального выражения в равенстве (20) практически не влияет на величину интеграла. В этих условиях с использованием соотношения [12] получаем

$$\int_0^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} J_{\nu}(\beta x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) I_{\nu/2}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right), \quad (21)$$

интеграл в (14) вычисляется аналитически и компонента вектора деформации u_z на поверхности образца может быть представлена в следующей форме:

$$u_z(r, 0, \omega) = -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{8\sqrt{\pi}} \frac{W_L}{K_s} \times \frac{e^{-r^2/(2a^2)}}{a\left(h + \sqrt{\frac{2i}{\lambda_T^2}}\right)} I_0\left(\frac{r^2}{2a^2}\right), \quad (22)$$

где $I_0\left(\frac{r^2}{2a^2}\right)$ — функции Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Анализ этого вопроса для компонент u_x , u_y и u_r показывает, что при перечисленных условиях для них также справедливы рассмотренные упрощения подынтегральных выражений в равенствах (17) и (18). Тогда, например, для компоненты u_x получим следующий результат:

$$u_x(x, y, 0, \omega) = \frac{\alpha(1-2\nu)^2(1+\nu)}{4\pi(1-\nu)\left(h + \sqrt{\frac{2i}{\lambda_T^2}}\right)} \frac{W_L}{K_s} \frac{x}{r} \times \int_0^{\infty} dk_{\perp} e^{-a^2 k_{\perp}^2/4} J_1(k_{\perp} r). \quad (23)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad I_{\nu}(x) = i^{-\nu} J_{\nu}(ix),$$

компоненты вектора деформации поверхности u_x и u_r получим в виде

$$u_x(x, y, 0, \omega) = \frac{\alpha(1-2\nu)^2(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)\left(h + \sqrt{\frac{2i}{\lambda_T^2}}\right)} \frac{W_L}{K_s} \frac{x}{r^2} \times e^{-r^2/2a^2} \operatorname{sh}\left(\frac{r^2}{2a^2}\right),$$

$$u_r(r, 0, \omega) = \frac{\alpha(1-2\nu)^2(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)\left(h + \sqrt{\frac{2i}{\lambda_T^2}}\right)} \frac{W_L}{K_s} \frac{1}{r} \times e^{-r^2/2a^2} \operatorname{sh}\left(\frac{r^2}{2a^2}\right). \quad (24)$$

Выражения (22) и (24) позволяют оценить величину термоупругих деформаций, генерируемых в твердотельных объектах лазерным излучением. Что касается радиальной компоненты вектора деформации u_r , то в соответствии с равенством (24) в центре пучка она равна нулю (а также компоненты u_x и u_y). На расстоянии от центра пучка, определяемом из уравнения

$$e^{a^2/r^2} = 1 + 2 \frac{a^2}{r^2},$$

она достигает максимума, а затем на больших расстояниях убывает как $\frac{1}{r}$. Приведенное уравнение для максимального значения u_r имеет решение при $\frac{a^2}{r^2} \approx 1.24$, которое соответствует расстоянию от центра пучка $r \approx 1.1a$.

Рассмотрим более подробно поведение компоненты вектора деформации поверхности u_z . В соответствии с равенством (22) максимальные деформации поверхности образца u_z реализуются непосредственно в центре возбуждающего лазерного пучка. При этом ее величина определяется выражением

$$u_z(0, 0, \omega) = -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{8\sqrt{\pi}} \frac{W_L}{K_s} \frac{1}{a\left(h + \sqrt{\frac{2i}{\lambda_T^2}}\right)}. \quad (25)$$

В соответствии с условиями, использованными при выводе выражений (22), (24), (25), они справедливы для объектов из материалов с невысокой теплопроводностью, низких частотах возбуждения при достаточно сильном теплообмене с окружающей средой. Так, например, при возбуждении деформаций в образцах из стекла, при мощности возбуждающего лазерного излучения 100 mW, частоте его модуляции 0.1 Hz, радиусе пучка 1 mm и коэффициенте теплообмена $10^3 \frac{W}{m^2 K}$ амплитуда деформации u_z в его центре будет составлять примерно 30 nm. Отметим, что подобные значения надежно регистрируются средствами современной интерферометрии [13]. При рассмотрении теплофизических процессов в объектах, находящихся в контакте с воздушной средой при нормальных условиях, для коэффициента теплообмена обычно принимается значение H , лежащее в диапазоне от 7.6 до $15 \frac{W}{m^2 K}$ [14,15]. В этом случае величина деформаций u_z будет существенно больше. Однако для ее оценки требуется использование точных соотношений типа выражений (17).

При удалении от центра возбуждения амплитуда u_z монотонно убывает. На малых расстояниях от центра при $r \ll a$ она убывает по закону

$$u_z \propto 1 - \frac{r^2}{2a^2},$$

а на больших, при $r \gg a$, как $\frac{1}{r}$. Что касается поведения u_r , то $u_r = 0$ при $r = 0$, в соответствии с равенством (24). По мере увеличения расстояния от центра пучка при $r \ll a$ амплитуда $u_r \propto r$, а на больших расстояниях при $r \gg a$ она убывает как $\frac{1}{r}$. Результаты (24)

и (25) можно использовать для сравнения максимальных значений деформаций u_z и u_r . С их помощью, поскольку максимальное значение u_r достигается при $r \approx 1.1a$, получим

$$u_r^{(\max)} \approx 0.18 \frac{1-2\nu}{1-\nu} u_z^{(\max)}.$$

В соответствии с приведенным равенством деформации в радиальном направлении оказываются существенно меньше деформаций в направлении падения лазерного пучка.

При рассмотрении теплофизических процессов в объектах, находящихся в контакте с воздушной средой при нормальных условиях, для коэффициента теплообмена обычно принимается значение H , находящееся в диапазоне от 7.6 до $15 \frac{W}{m^2K}$ [14,15]. Анализ выражений (14) и (15) показывает, что в этом случае можно считать $h = 0$ вплоть до частот возбуждения порядка 1 МГц для объектов из практически любых материалов.

Наряду с интерферометрическим для детектирования термоупругих деформаций, генерируемых лазерным излучением, часто используется фотодеформационный метод [16]. Он основан на регистрации изменений направления распространения зондирующего лазерного излучения при его отражении от деформированного участка поверхности образца. При этом величина фотодеформационного сигнала может быть определена из соотношения типа

$$\theta = \frac{\partial u_z(r, 0, \omega)}{\partial r} = \frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{8\sqrt{\pi}} \frac{W_L}{K_s} \frac{r}{a^3} \times \frac{e^{-r^2/(2a^2)}}{h + \sqrt{\frac{2i}{\lambda_7}}} \left[I_0\left(\frac{r^2}{2a^2}\right) - I_1\left(\frac{r^2}{2a^2}\right) \right]. \quad (26)$$

В соответствии с выражением (26) фотодеформационный сигнал $\theta \propto r$ на небольших расстояниях от центра возбуждающего лазерного пучка при $r \ll a$, а на больших расстояниях при $r \gg a$ убывает как $\frac{1}{r^2}$. Можно найти расстояние r , на котором фотодеформационный сигнал достигает максимального значения. В соответствии с (26) это расстояние определяется уравнением

$$(1-4x)I_0(x) + (1+4x)I_1(x) = 0,$$

где $x = \frac{r^2}{2a^2}$. Это уравнение имеет корень при $x \approx 0.35$, что дает значение $r \approx 0.84a$. В соответствии с выражением (26) при тех же параметрах возбуждающего лазерного излучения, которые были использованы при оценке u_z , для амплитуды фотодеформационного сигнала для стали получим значение на уровне $\theta \sim 10^{-3}$, а для стекла — $\theta \sim 10^{-2}$. Указанные значения существенно превосходят так называемые „шумы прицеливания“ [17] современных лазеров, включая полупроводниковые. Таким образом, они способны обеспечивать надежную регистрацию деформаций фотодеформационным методом. При этом полученные результаты типа (24)–(26) позволяют выяснить оптимальные условия использования интерферометрического и фотодеформационного методов с точки зрения отношения сигнала к шуму.

В заключение автор выражает благодарность РФФИ за поддержку данной работы.

Список литературы

- [1] Lau J.H. // Microelectronics International. 1991. Vol. 8. N 2. P. 11–15.
- [2] Li Q., Steven G.P., Xie Y.M. // J. Thermal Stresses. 2001. Vol. 24. N 4. P. 347–366.
- [3] Jumel J., Rochais D., Enguehard F., Lepoutre F. // Rev. Sci. Instrum. 2003. Vol. 74. N 1. P. 608–611.
- [4] Muratkov K.L., Glazov A.L. // J. of Thermal Stresses. 2009. Vol. 32. N 4. P. 322–340.
- [5] Муратиков К.Л. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 22. С. 58–64.
- [6] Муратиков К.Л. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 19. С. 59–66.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
- [8] Муратиков К.Л. // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. Вып. 11. С. 90–97.
- [9] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
- [10] Глазов А.Л., Муратиков К.Л. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 11. С. 1284–1291.
- [11] Лямшев Л.М. Радиационная акустика. М.: Наука, 1996. 304 с.
- [12] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физ.-мат. литература, 1963. 1100 с.
- [13] Дарзбек С.А., Желкобаев Ж., Календин В.В., Новиков Ю.А. // Тр. ИОФАН. 2006. Т. 62. С. 14–37.
- [14] Кислицын А.А. Основы теплофизики. Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 2002. 152 с.
- [15] Salazar A., Mendioroz A., Fuente R. // Appl. Phys. Lett. 2009. Vol. 95. P. 12 105-1–12 105-3.
- [16] Balageas D.L., Boscher D.M., Deom A.A., Enguehard F., Noirot L. // Proc. SPIE. 1991. Vol. 1467. P. 278–289.
- [17] Gray J., Thomas P., Zhu X.D. // Rev. Sci. Instrum. 2006. Vol. 77. N 9. P. 3714–3717.