01

О радиусе сходимости ряда Лапласа для внутреннего потенциала гравитирующего тора

© Б.П. Кондратьев

Удмуртский государственный университет,
426034 Ижевск, Россия
e-mail: kond@uni.udm.ru

(Поступило в Редакцию 12 февраля 2010 г.)

Дана поправка к выражению радиуса сходимости ряда Лапласа внутреннего потенциала однородного кругового тора. Выявлена сферическая оболочка, внутри которой вопрос о разложении потеницала тора в степенной ряд должен решаться дополнительно.

Введение

В статье [1] была решена задача о разложении внутренного гравитационного потенциала однородного кругового тора по положительным степеням радиуса-вектора точки r (ряд Лапласа)

$$\varphi(r,\theta) = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} r^{2m} P_{2m}(\cos\theta) \tag{1}$$

и были получены точные аналитические формулы для коэффициентов этого ряда D_{2m} через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$F\left(-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}; 2; k^2\right), \tag{2}$$

зависящую от геометрического параметра тора $q = k = r_0/R_0$. Корректным методом в [1] доказана сходимость ряда (1). Однако в само выражение радиуса сходимости в [1]

$$R = R_0 \exp\left(-\frac{r_0^2}{2R_0^2}\right) \tag{3}$$

вкралась ошибка из-за неточной оценки в асимпторическом пределе больших m значений гипергеометрической функции Гаусса (2). Дело в том, что вопрос об асимптотической оценке функции (2) представляет тонкую и пока не решенную аналитическую задачу. Например, справочники [2] дают подобные оценки только для комплексных значений.

Ниже показано, что при нахождении радиуса сходимости можно избежать указанных математических затруднений, если исходить из интегрального [1, формула (24)] представления коэффициентов ряда

$$D_{2m} = \frac{4}{3}\frac{M_{\text{torus}} G}{\pi}(-1)^m \times \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{R_0^2 - r_0^2 \sin^2\varphi}} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} (R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi)^{-m} + (R_0^2 - r_0^2)\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}(R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi)^{-m-3/2} - \frac{(2m-1)!!}{(2m-2)!!}(R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi)^{-m-1/2}\right] d\varphi. \tag{4}$$

Здесь $M_{\text{torus}} = 2\pi^2 r_0^2 R_0 \rho$ — полная масса тора, G — гравитационная постоянная.

Нахождение радиуса сходимости

Для оценки скорости роста коэффициентов D_{2m} обратимся прямо к формуле (4). Она содержит три интеграла, и для каждого из них легко находим неравенства вида

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi)^{m+1/2}} < \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(R_0^2 - r_0^2)^{m+1/2}} = \frac{\pi}{2(R_0^2 - r_0^2)^{m+1/2}};$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{(R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi)^{m+1/2}} < \frac{\pi}{2(R_0^2 - r_0^2)^{m+1/2}}. \tag{5}$$

Тогда для модуля D_{2m} имеем

$$|D_{2m}| < \frac{4GM_{\text{torus}}}{3\pi}\frac{\pi}{2}\left\{\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}(R_0^2 - r_0^2)^{-m-1/2} + \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}(R_0^2 - r_0^2)^{-m-1/2} + \frac{(2m-1)!!}{(2m-2)!!}(R_0^2 - r_0^2)^{-m-1/2}\right\} = \frac{4}{3}GM_{\text{torus}}\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}(R_0^2 - r_0^2)^{-m-1/2}. \tag{6}$$

Здесь коэффициент $\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}$ растет медленнее некоторой степени m, поэтому порядок роста $|D_{2m}|$ будет показательным с основанием $(R_0^2 - r_0^2)^{-m-1/2}$. Следовательно, искомый радиус сходимости ряда Лапласа для внутреннего потеницла однородного кругового тора относительно x_3, а значит и относительно радиуса-вектора пробной точки r, равен

$$R = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}. \tag{7}$$

Заключение

В силу очевидного неравенства

$$\sqrt{R_0^2 - r_0^2} \le R_0 e^{-\frac{r_0^2}{2R_0^2}}$$

найденное выше корректное выражение для радиуса сходимости (7) при $r_0 > 0$ оказывается меньше прежнего (3). Напомним, что в работе [3] было установлено, что R_0 есть радиус сходимости ряда для внешнего потенциала тора. Поэтому вывод в [1] о существовании зазора, в котором потенциал тора нельзя уже представить в виде ряда Лапласа, остается в силе, но сам зазор имеет пределы

$$\sqrt{R_0^2 - r_0^2} \le r \le R_0. \tag{8}$$

Верхний и нижний пределы зазора (8) имеют простой геометрический смысл: это радиус осевой окружности тора и длина отрезка касательной к нему.

Список литературы

[1] *Кондратьев Б.П., Трубицина Н.Г.* // ЖТФ. 2010. Т. 81. Вып. 1. С. 23–26.

[2] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.

[3] *Кондратьев Б.П., Дубровский А.С., Трубицина Н.Г., Мухаметшина Э.Ш.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 17–21.