01;04

Самосогласованное расширение слоя электронов в поле собственного пространственного заряда на фоне нейтрального газа

© В.А. Федоров

Радиотехнический институт им. акад. А.Л. Минца,
125083 Москва, Россия
e-mail: f_v99@mail.ru

(Поступило в Редакцию 11 декабря 2009 г. В окончательной редакции 27 апреля 2010 г.)

Исследована динамика самосогласованного расширения слоя электронов под действием электрической силы собственного пространственного заряда и силы трения. Расширение слоя электронов происходит на фоне нейтрального газа, благодаря чему возникает сила трения, препятствующая движению электронов. Рассмотрены одномерные движения электронов в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрии. Получены точные аналитические решения нелинейной системы уравнений гидродинамики плазмы для электронов с самосогласованным электрическим полем.

Введение

Задача об одномерном расширении слоя электронов в гидродинамическом приближении является классической для физики плазмы. Данная задача представляет большой интерес при изучении динамики слоев в зондовой теории, теории радиофизических устройств, формировании и транспортировке пучков электронов как в лабораторных условиях, так и в космосе [1,2]. Так как объемный заряд слоя электронов в рассматриваемом случае не скомпенсирован, то действующая электрическая сила зависит от расположения электронов или геометрии слоя. Поэтому решение задачи о динамике слоя электронов, описываемой системой нелинейных уравнений, требует учета самосогласованного электрического поля [1], что является одним из основных препятствий на пути получения ее точных аналитических решений [3]. Заметим, что если удается найти точные аналитические решения аналогичных систем, то они часто могут служить первым приближением для построения численных решений [4].

Задачу об одномерном расширении слоя электронов, происходящем на фоне нейтрального газа, сформулируем следующим образом. Рассмотрим слой электронов, занимающий при $t \le 0$ объем V_0 и находящийся в неограниченном, изотропном, нейтральном газе. Будем считать, что частицы газа неподвижны. Примем, что объем V_0 ограничен непроницаемой поверхностью для электронов. Физически это может означать, например, наличие барьера в виде поля (электрического, электромагнитного и т.д.). В момент времени $t = 0$ поле, удерживающее электроны в объеме V_0, мгновенно убирается, а электронам слоя сообщается начальная скорость. Таким образом, начинается расширение слоя электронов на фоне нейтрального газа (рассматривается также расширение слоя электронов в вакууме). При этом геометрия задачи, в которой проводится ее решение, будет конкретизироваться в каждом отдельном случае. Отметим, что далее, говоря об электронах, будем иметь в виду электроны слоя, даже если слово „слой“ опущено.

Основная система уравнений и ее общее решение

Для исследования динамики слоя электронов с учетом сделанных выше замечаний воспользуемся системой уравнений одножидкостного гидродинамического приближения холодной плазмы для электронов [5]. Пренебрегая тепловыми эффектами и считая, что процесс расширения электронов одномерный, запишем данную систему, представленную в форме Эйлера, в виде

$$\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial R} = \frac{e}{m_e} E - \nu_e v_e, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{R^k} \frac{\partial}{\partial R}(R^k E) = 4\pi e n_e, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi e n_e v_e, \qquad (3)$$

где $k = 0, 1, 2$ соответственно для плоского, цилиндрического и сферического случая; $E(R,t)$ — напряженность электрического поля; $v_e(R,t)$, $n_e(R,t)$ — скорость и концентрация электронов; R — координата точки пространства; e, m_e — заряд и масса электрона; $\nu_e = \mathrm{const}$ — частота столкновений электронов с нейтральными частицами.

Чтобы система уравнений (1)–(3) стала замкнутой, дополним ее начальными и граничными условиями [6], заданными в объеме V_0, ограничивающем слой электронов при $t = 0$

$$v_e(R_*, 0) = v_0\eta(R_*), \quad n_e(R_*, 0) = n_e^0 f_e(R_*), \qquad (4)$$

$$E[R(t), t] = 0, \qquad v_e[R(t), t] = v_0,$$
$$n_e[R(t), t] = n_e^0 f_e(r_0)(r_0/R)^k. \qquad (5)$$

Здесь $r_0 \le R_* \le R_0$, r_0, R_0 — начальные координаты внутренней и внешней границ слоя, $R(t) = r_0 + v_0 t$,

$\upsilon_0 = \text{const} > 0$, $n_e^0 = \text{const}$, $f_e(R_*) > 0$ — непрерывная, а $\eta(R_*) \geq 1$ — монотонно возрастающая функции R_*. Сделаем два замечания относительно условий (4), (5). В (4) не заданы значения $E(R_*, 0)$, связанные с $n_e(R_*, 0)$ уравнением (2), а в (5) — условия на внешней границе слоя, так как они будут определяться из решения системы (1)–(3). Постановка граничных условий в (5) при $k = 0$ предполагает существование виртуального экрана для электронов слоя, расположенного в точке $R = r_0$, за который электроны не могут проникнуть.

Проинтегрировав уравнение (2) по объему V, в пределах от r до R, где координатой R обозначено конечное положение внешней границы объема, имеющей при $t = 0$ координату R_*, с использованием теоремы Гаусса получим

$$E(R,t) = 4\pi e \left[\frac{\Psi(R,t)}{P(k)}\,\frac{1}{R^k}\right]. \tag{6}$$

Здесь $P(k) = 1, 2\pi, 4\pi$ для плоской, цилиндрической и сферической симметрии, $\Psi(R,t) = P(k)\int\limits_r^R n_e(R,t)R^k dR$ — функция, соответствующая массовой переменной Лагранжа [7] и определяющая в данном случае число электронов и их заряд $Q = e\Psi$ в объеме V. Так как число электронов в выделенном объеме V, задаваемом координатами (r_0, R_*) и $[r(t), R(t)]$, где R_*, $R(t)$ — начальное и конечное положение правой границы V, не зависит от времени, то запишем равенство

$$\int\limits_r^R n_e(R,t)R^k dR = \int\limits_0^{R^*} n_e(R_*,0)R_*^k dR_*, \tag{7}$$

выражающее сохранение заряда электронов, или интеграл движения [8].

Принимая во внимание равенство (7), выражение (6) представим следующим образом:

$$E(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\left[\frac{C_k(R_*)}{R^k}\right], \tag{8}$$

где $C_k(R_*) = \omega_0^2 \int\limits_0^{R_*} f_e(R_*)R_*^k dR_*$, $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_e^0/m_e$. Подставив (8) в уравнение 1, получим

$$\frac{\partial \upsilon_e}{\partial t} + \upsilon_e\frac{\partial \upsilon_e}{\partial R} = \frac{C_k(R_*)}{R_k} - \nu_e\upsilon_e. \tag{9}$$

Перейдя к субстанциональной производной в (9), найдем

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{C_k(R_*)}{R^k} - \nu_e\frac{dR}{dt}. \tag{10}$$

Уравнение (9) можно привести к уравнению Абеля второго рода [9]

$$\upsilon_e\frac{\partial \upsilon_e}{\partial R} = \frac{C_k(R_*)}{R^k} - \nu_e\upsilon_e. \tag{11}$$

Решение уравнения (11) при $\nu_e = 0$ имеет вид

$$\upsilon_e(R_*, R) = \sqrt{\upsilon_0^2\eta^2(R_*) + 2C_k(R_*)\int\limits_{R_*}^{R}\frac{R}{R^k}}. \tag{12}$$

Учитывая, что $\upsilon_e = dR/dt$, где R — зависящая от времени координата фиксированной частицы среды, из выражения (12) получим

$$t(R_*, R) = \pm\int\limits_{R_*}^{R}\frac{dR}{\sqrt{\upsilon_0^2\eta^2(R_*) + 2C_k(R_*)\int\limits_{R_*}^{R}\frac{dR}{R^k}}}. \tag{13}$$

Записав уравнение (2) в переменных Лагранжа и используя (8), (13), определим $n_e(R_*, R)$

$$n_e(R_*, R) = \frac{1}{4\pi e}\left(k\frac{E}{R} + \frac{\partial E}{\partial R} - \frac{\partial E}{\partial R_*}\,\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}\right). \tag{14}$$

Подставив выражение (8) в (14), получим

$$n_e(R_*, R) = -n_e^0 f_e(R_*)\frac{R_*^k}{R^k}\,\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}. \tag{15}$$

Таким образом, выражения (8), (9), (13) и (15) есть точные аналитические решения нелинейной системы уравнений (1)–(3) с самосогласованным электрическим полем для $k = 0$, 1, 2.

Частные решения основной системы уравнений и их анализ

1. Если $k = 0$ (плоская симметрия), то формула (8) принимает вид

$$E(R_*) = \frac{m_e}{e}C_0(R_*), \tag{16}$$

где $C_0(R_*) = \omega_0^2\int\limits_{r_0}^{R_*} f_e(R_*)dR_*$. Заметим, что $E(R_*)$ в (16) не зависит от R в силу того, что рассматривается случай плоской симметрии. Зная $E(R_*)$, из (10) и (14) определим

$$\upsilon_e(R_*, t) = \frac{C_0(R_*)}{\nu_e} + \exp(-\nu_e t)\left[\upsilon_0\eta(R_*) - \frac{C_0(R_*)}{\nu_e}\right], \tag{17}$$

$$R(R_*, t) = R_* + \frac{C_0(R_*)}{\nu_e}t + \frac{1 - \exp(-\nu_e t)}{\nu_e} \times\left[\upsilon_0\eta(R_*) - \frac{C_0(R_*)}{\nu_e}\right], \tag{18}$$

$$n_e(R_*, t) = \frac{n_e^0 f_e(R_*)}{1 + \frac{\omega_0^2 f_e(R_*)}{\nu_e}t + \frac{1-\exp(-\nu_e t)}{\nu_e}\left[\upsilon_0\frac{d\eta}{dR_*} - \frac{\omega_0^2 f_e(R_*)}{\nu_e}\right]}. \tag{19}$$

При $\nu_e \to 0$ с точностью до членов нулевого порядка малости по ν_e из (17)–(19) найдем

$$v_e(R_*, t) = v_0\eta(R_*) + C_0(R_*)t, \tag{20}$$

$$R(R_*, t) = R_* + v_0\eta(R_*)t + \frac{C_0(R_*)}{2}t^2, \tag{21}$$

$$n_e(R_*, t) = \frac{n_e^0 f_e(R_*)}{1 + v_0 \frac{d\eta}{dR_*} t + \frac{\omega_0^2 f_e(R_*)}{2} t^2}. \tag{22}$$

Положив $n_e(R_*, 0) = n_e^0$, из выражений (16), (20)–(22) получим

$$E(R_*) = 4\pi e n_e^0(R_* - r_0), \tag{23}$$

$$v_e(R_*, t) = v_0\eta(R_*) + \omega_0^2(R_* - r_0)t, \tag{24}$$

$$R(R_*, t) = R_* + v_0\eta(R_*)t + \frac{\omega_0^2(R_* - r_0)}{2}t^2, \tag{25}$$

$$n_e(R_*, t) = n_e^0 \frac{1}{1 + v_0 \frac{d\eta}{dR_*} t + \frac{\omega_0^2}{2} t^2}. \tag{26}$$

Отметим, что выражения (23)–(26) при $v_0 = 0$, $r_0 = 0$ переходят в выражения работы [10].

2. Если $k = 1$ (цилиндрическая симметрия) и $\nu_e = 0$, то формула (8) принимает вид

$$E(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\left[\frac{C_1(R_*)}{R}\right], \tag{27}$$

$$C_1(R_*) = \omega_0^2 \int\limits_{r_0}^{R_*} f_e(R_*)R_* dR_*,$$

а из (12) и (13) имеем соответственно

$$v_e(R_*, R) = \sqrt{2C_1(R_*)\left[\ln\left(\frac{R}{R_*}\right) + A(R_*)\right]}, \tag{28}$$

$$t(R_*, R) = 2B(R_*)\exp[-A(R_*)] \int\limits_a^b \exp(y^2)dy. \tag{29}$$

Здесь $B(R_*) = R_*/\sqrt{2C_1(R_*)}$, $A(R_*) = v_0^2\eta^2(R_*)/[2C_1(R_*)]$, $a = \sqrt{A(R_*)}$, $b = \sqrt{A(R_*) + \ln(R/R_*)}$.

Учитывая (15) и (19), найдем выражение

$$n_e(R_*, R) = -n_e^0 f_e(R_*) \frac{R_*}{R} \frac{\partial t/\partial R}{\partial t/dR_*}, \tag{30}$$

содержащее следующие переменные:

$$\frac{\partial t}{\partial R} = -\frac{1}{\sqrt{2C_1(R_*)\left[\ln\left(\frac{R}{R_*}\right) + A(R_*)\right]}}, \tag{31}$$

$$\frac{\partial t}{\partial R_*} = 2\exp[-A(R_*)]\left[\frac{dB}{dR_*} - B(R_*)\frac{dA}{dR_*}\right]$$

$$\times \int\limits_a^b \exp(y^2)dy + B(R_*)\left[\frac{R}{R_*\sqrt{\ln(R/R_*) + A(R_*)}}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{dA}{dR_*} - \frac{1}{R_*}\right) - \frac{1}{\sqrt{A(R_*)}}\frac{dA}{dR_*}\right], \tag{32}$$

$$\frac{dA}{dR_*} = \frac{v_0^2\eta(R_*)}{C_1(R_*)}\frac{d\eta}{dR_*} - \frac{v_0^2\eta^2(R_*)\omega_0^2 f_e(R_*)R_*}{2C_1^2(R_*)},$$

$$\frac{dB}{dR_*} = \frac{1}{\sqrt{2C_1(R_*)}}\left[1 - \frac{\omega_0^2 f_e(R_*)R_*^2}{2C_1(R_*)}\right]. \tag{33}$$

Пусть $R/R_* \approx 1$, т.е. $(R - R_*)/R_* \ll 1$, тогда (29) принимает вид

$$t(R_*, R) \approx \frac{v_0\eta(R_*)R_*}{C_1(R_*)}\left[\sqrt{1 + \frac{1}{A(R_*)}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)} - 1\right]. \tag{34}$$

Если дополнительно положить $(R - R_*)/[R_*A(R_*)] \ll 1$, то выражение (34) переходит в

$$t(R_*, R) \approx \frac{R - R_*}{v_0\eta(R_*)}. \tag{35}$$

Из рассмотрения (35) видно, что $t(R_*, R) \to 0$, когда $R \to R_*$. Подставив (35) в (30), найдем

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0 f_e(R_*) \frac{\frac{R_*}{R}}{1 + \frac{R - R_*}{\eta(R_*)}\frac{d\eta}{dR_*}}. \tag{36}$$

При $R \to R_*$ из (36) имеем $n_e(R_*, R) \propto n_e^0 R_*/R$. Отсюда следует, что основной вклад в отклонение от закона $1/R$ при $\eta(R_*) \neq \text{const}$ вносит производная $d\eta/dR_*$, отвечающая за неравномерность распределения $v_e(R_*, 0)$.

Приняв $v_0 = 0$, из (34) и (30) получим

$$t(R_*, R) \approx \sqrt{\frac{2R_*^2}{C_1(R_*)}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}, \tag{37}$$

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0 f_e(R_*) \frac{\frac{R_*}{R}}{1 + \frac{\omega_0^2 f_e(R_*)R_*^2}{C_1(R_*)}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}. \tag{38}$$

В (38) отличие от зависимости вида $1/R$ обусловлено распределением электронов по слою и отсутствием электронов для $R_* < r_0$. Когда $R_* \to r_0$, имеем $v_e(R_* = r_0, t) = 0$, $n_e(R_* = r_0, t) = n_e^0$. С увеличением R скорость убывания $n_0(R_*, R)$ возрастает, а при $R \gg R_*$ из (30)–(33) следует, что $n_e(R_*, R) \propto n_e^0(R_*/R)^2$. Отметим, если толщина слоя электронов $\Delta = R_* - r_0$ равна $\Delta \sim r_0$ (толстый слой), то особенностей в поведении слоя не возникает (см. (34)–(38)). Для тонкого слоя ($\Delta \ll r_0$) рассмотрим два случая: $v_0 \neq 0$ и $v_0 = 0$, так как между ними нет непрерывного перехода. Если $v_0 \neq 0$, то область применения формулы (36) расширяется. Если $v_0 = 0$, то для выражения (38) область применимости при $R \to R_*$ сужается.

3. Пусть $k = 2$ (сферическая симметрия) и $\nu_e = 0$, тогда из (8) имеем:

$$E(R_*, R) = \frac{m_e}{e}\left[\frac{C_2(R_*)}{R^2}\right], \qquad (39)$$

где $C_2(R_*) = \omega_0^2 \int\limits_{r_0}^{R_*} f_0(R_*)R_*^2 dR_*$. Принимая во внимание (39), из (12) получим, что

$$v_e(R_*, R) = \nu_0\eta(R_*) \times \sqrt{1 + \frac{2C_2(R_*)}{v_0^2\eta^2(R_*)R_*}\left(1 - \frac{R_*}{R}\right)}. \qquad (40)$$

В отличие от случаев $k = 0$, 1 в рамках нерелятивистской теории $v_e(R_*, R) \to \infty$ при $R \to \infty$, а асимптотическое поведение $v_e(R_*, R)$ имеет место и без учета релятивистских факторов

$$v_e(R_*, R \to \infty) = \sqrt{v_0^2\eta^2(R_*) + \frac{2C_2(R_*)}{R_*}} \qquad (41)$$

при условии, что $v_e(R_*, R)/c \ll 1$, где c — скорость света.

Обозначив

$$\theta(R_*) = \frac{R_*}{1 + \frac{v_0^2\eta^2(R_*)R_*}{2C_2(R_*)}}, \qquad (42)$$

выражение (13) запишем следующим образом:

$$t(R_*, R) = \frac{\sqrt{\theta^3(R_*)}}{\sqrt{2C_2(R_*)}} \ln\left[\frac{\sqrt{R} + \sqrt{R - \theta(R_*)}}{\sqrt{R_*} + \sqrt{R_* - \theta(R_*)}}\right] + \frac{v_0\eta(R_*)\theta(R_*)R_*}{2C_2(R_*)}\left[\sqrt{\frac{R^2 - \theta(R_*)R}{R_*^2 - \theta(R_*)R_*}} - 1\right]. \qquad (43)$$

Введя функции $\Phi_1(R_*, R)$, $\Phi_2(R_*, R)$

$$\Phi_1(R_*, R) = \ln\left[\frac{\sqrt{R} + \sqrt{R - \theta(R_*)}}{\sqrt{R_*} + \sqrt{R_* - \theta(R_*)}}\right],$$

$$\Phi_2(R_*, R) = \sqrt{\frac{R^2 - \theta(R_*)R}{R_*^2 - \theta(R_*)R_*}} - 1 \qquad (44)$$

и продифференцировав (42), (44) по переменным R_* и R, получим

$$\frac{d\theta}{dR_*} = \frac{4C_2^2(R_*) + 2R_*^4 v_0^2\eta^2(R_*)\omega_0^2 f_e(R_*) - 4C_2(R_*)R_*^2 v_0^2\eta(R_*)(d\eta/dR_*)}{[2C_2(R_*) + R_* v_0^2\eta^2(R_*)]^2}, \qquad (45)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial R_*} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\frac{d\theta}{dR_*}}{\left[\sqrt{R} + \sqrt{R - \theta(R_*)}\right]\sqrt{R - \theta(R_*)}} + \frac{1}{\sqrt{R_*} + \sqrt{R_* - \theta(R_*)}}\left[\frac{1}{\sqrt{R_*}} + \frac{1 - \frac{d\theta}{dR_*}}{\sqrt{R_* - \theta(R_*)}}\right]\right\}, \qquad (46)$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial R_*} = -\frac{R\sqrt{\frac{R_*^2 - \theta(R_*)R_*}{R^2 - \theta(R_*)R}}\frac{d\theta}{dR_*} + \left[2R_* - \theta(R_*) - R_*\frac{d\theta}{dR_*}\right]\sqrt{\frac{R^2 - \theta(R_*)R}{R_*^2 - \theta(R_*)R_*}}}{2[R_*^2 - \theta(R_*)R_*]}, \qquad (47)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial R} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - \theta(R_*)R}},$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial R} = \frac{2R - \theta(R_*)}{2\sqrt{[R^2 - \theta(R_*)R][R_*^2 - \theta(R_*)R_*]}}. \qquad (48)$$

Используя формулы (42)–(48), запишем выражение $n_e(R_*, R)$ в следующей форме:

$$n_e(R_*, R) = -n_e^0 f_e(R_*)\frac{R_*^2}{R^2}\frac{\partial t/\partial R}{\partial t/\partial R_*}, \qquad (49)$$

где

$$\frac{\partial t}{\partial R} = \frac{\sqrt{\theta^3(R_*)}}{\sqrt{2C_2(R_*)}}\frac{1}{2\sqrt{R^2 - \theta(R_*)R}} + \frac{v_0\eta(R_*)\theta(R_*)R_*}{2C_2(R_*)}\frac{2R - \theta(R_*)}{2\sqrt{[R^2 - \theta(R_*)/R][R_*^2 - \theta(R_*)R_*]}}, \qquad (50)$$

$$\frac{\partial t}{\partial R_*} = \frac{\sqrt{\theta^3(R_*)}}{\sqrt{2C_2(R_*)}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial R_*} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\theta(R_*)}{2C_2(R_*)}}\Phi_1(R_*, R)\frac{d\theta}{dR_*} - \sqrt{\left[\frac{\theta(R_*)}{2C_2(R_*)}\right]^3}\Phi_1(R_*, R)\omega_0^2 f_e(R_*)R_*^2 + \frac{v_0\eta(R_*)\theta(R_*)R_*}{2C_2(R_*)}\frac{\partial\Phi_2}{\partial R_*} + \frac{v_0\theta(R_*)R_*}{2C_2(R_*)}\Phi_2(R_*, R)\frac{d\eta}{dR_*} + \frac{v_0\eta(R_*)\theta(R_*)}{2C_2(R_*)}\Phi_2(R_*, R) + \frac{v_0\eta(R_*)R_*}{2C_2(R_*)}\Phi_2(R_*, R)\frac{d\theta}{dR_*} - \frac{v_0\eta(R_*)\theta(R_*)R_*}{2C_2^2(R_*)}\Phi_2(R_*, R)\omega_0^2 f_e(R_*)R_*^2. \qquad (51)$$

Для упрощения формул (42)–(51) примем $f_e(R_*) = 1$ и рассмотрим частные случаи, когда $R \to R_*$ и $R \to \infty$. Вначале положим $v_0 > 0$. Пусть при этом $(R - R_*)/R_* \ll 1$, тогда

$$v_0(R_*, R) \approx v_0\eta(R_*)\left[1 + \frac{C_0(R_*)}{v_0^2\eta^2(R_*)R_*}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)\right]. \qquad (52)$$

Из выражения (52) следует, что

$$t(R_*, R) \approx \frac{R - R_*}{v_0\eta(R_*)}, \qquad (53)$$

причем выражения (35) и (53) совпадают. Продифференцировав (53), согласно (49), получим

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0\frac{\left(\frac{R_*}{R}\right)^2}{1 + \frac{R - R_*}{\eta(R_*)}\frac{d\eta}{dR_*}}. \qquad (54)$$

Из рассмотрения (54) видно, что $n_e(R_*, R) \propto n_e^0(R_*/R)^2$ при $R \to R_*$, а основной вклад в отклонение от закона $1/R^2$ при $\eta(R_*) \neq \mathrm{const}$ дается производной $d\eta/dR_*$, отвечающей за неравномерность распределения начальной скорости.

Пусть $R \to \infty$ и $\eta(R_*) = 1$, тогда имеем

$$v_e(R_*, R \to \infty) = \sqrt{v_0^2 + \frac{2C_2(R_*)}{R_*}}, \quad (55)$$

$$t(R_*, R) = \frac{v_0\theta(R_*)R_*R}{2C_2(R_*)\sqrt{R_*^2 - \theta(R_*)R_*}}. \quad (56)$$

Подставив (56) в (49), получим $n_e(R_*, R) \propto n_e^0(R_*/R)^3$, что совпадает с соотношением работы [10] в случае $v_0 = 0$ и с особенностью в точке $R = 0$. Отметим, что от самой величины $v_0 > 0$ характер слоя электронов не зависит. Полагая $\Delta \ll r_2$ (тонкий слой) и пренебрегая единицей в (42), имеем $\theta(R_*) \approx 2C_2(R_*)/v_0^2 \ll R_*$, а (43) перепишем в следующем виде:

$$t(R_*, R) = \frac{\theta(R_*)}{2v_0}\ln\left(\frac{R}{R_*}\right) + \frac{R_*}{v_0}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right). \quad (57)$$

При $R \to \infty$ характер динамики тонкого слоя не отличается от динамики толстого слоя. Если $(R - R_*)/R_* \ll 1$ $(R \to R_*)$, то, воспользовавшись (57), из (49) найдем

$$n_e(R_*, R) \approx n_e^0 \frac{\left(\frac{R_*}{R}\right)^2}{1 - \frac{\omega_0^2 R_*^2}{v_0^2}\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)}. \quad (58)$$

Примем теперь, что $v_0 = 0$, тогда выражения (40), (43) перейдут в следующие:

$$v_e(R_*, R) = \sqrt{\frac{2C_2(R_*)}{R_*}\left(1 - \frac{R_*}{R}\right)}, \quad (59)$$

$$t(R_*, R) = \frac{R_*\sqrt{R_*}}{\sqrt{2C_2(R_*)}}\ln\left[\frac{\sqrt{R} + \sqrt{R - R_*}}{\sqrt{R_*}}\right]. \quad (60)$$

Подставив (60) в (49), в двух предельных случаях $R \to \infty$ и $R \to R_*$ имеем

$$n_e(R_*, R) \approx \frac{2}{3}\frac{n_e^0}{\ln\left(\frac{R}{R_*}\right)}\left(\frac{R_*}{R}\right)^3\left[\left(\frac{R_*}{r_0}\right)^3 - 1\right], \quad (61)$$

$$n_e(R_*, R) \approx \frac{n_e^0}{1 + 3/\left(\frac{R}{R_*} - 1\right)\left[1 - \left(\frac{r_0}{R_*}\right)^3\right]}. \quad (62)$$

Так как в данном случае особенность в точке $R = 0$ отсутствует, то выражение (61) содержит в знаменателе логарифм, а переход $r_0 \to 0$ невозможен. Если считать, что $r_0 = 0$, то получим $n_e(R_*, R) \approx (R_*/R)^3$ (см. [10]). Таким образом, для начальной конфигурации электронов в виде слоя, имеющего особенность в точке $R = 0$, $n_e(R_*, R)$ падает быстрее при $R \to \infty$, чем в [10], в отношении $\ln(R/R_*)$ с коэффициентом Δ/R_* в случае тонкого слоя. При $R \to R_*$ коэффициент $\alpha = 3/[1 - (r_0/R_*)^3]$ в формулуе (62) отвечает за вклад толщины слоя в вид зависимости $n_e(R_*, R)$ от R. Чем тоньше слой, тем быстрее падает $n_e(R_*, R)$. Для тонкого слоя $\alpha \approx R_*/\Delta$.

Заключение

В заключение приведем условия, когда справедливы упрощающие предположения, принятые при решении задачи.

Использование гидродинамического приближения холодной плазмы для электронов предполагает, что не учитываются их тепловые скорости. Это возможно, когда направленная скорость электронов, приобретенная в электрическом поле, намного превышает их тепловые, т.е. $|v_e(R_*, R)/v_{eT}| \gg 1$, где v_{eT} — тепловая скорость электронов. Данное условие накладывает соответствующие ограничения на параметры электронов и среды (температуру, концентрацию частиц, начальные скорости), в которой рассматривается динамика слоя.

Принятый метод решения не допускает, чтобы определяемые решениями траектории различных элементов объемов электронов пересекались, что может вызвать появление ударных волн, разрывы плотности среды и т.д. Условие непересечения траекторий различных элементов объемов электронов выполнено при $\partial R/\partial R_* > 0$, тогда $n_e(R_*)/(\partial R/\partial R_*) > 0$. Это условие выполняется автоматически, так как $v_e(R_*, 0) = v_0\eta(R_*)$ задается монотонно возрастающей функцией от R_*.

Список литературы

[1] *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 215 с.

[2] Искусственные пучки частиц в космической плазме / Под ред. Б. Гранналя. М.: Мир, 1985. 456 с.

[3] *Гуревич А.В., Парийская Л.В., Питаевский Л.П.* // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 647–654.

[4] *Иванов А.А., Серебренников К.С.* // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 78. С. 154–159.

[5] *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970. 208 с.

[6] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.

[7] *Станюкович К.П.* Неустановившиеся движения сплошной среды. М.: Наука, 1971. 854 с.

[8] *Федоров В.А.* // Тез. докл. XXXII Междунар. конф. по физике плазмы и УТС. Звенигород, 2005. С. 98.

[9] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

[10] *Федоров В.А.* // РЭ. 2002. Т. 47. № 1. С. 103–109.