

01;03

Влияние числа Рейнольдса на закономерности турбулентного течения жидкости в плоском канале

© Ю.Г. Чесноков

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет),
198013 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: ygchesnokov@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 12 февраля 2010 г.)

На основе анализа данных, полученных методом прямого численного моделирования течения жидкости в плоском канале различными авторами, изучено влияние числа Рейнольдса на местонахождение и максимальные значения касательного и нормальных напряжений Рейнольдса. Исследованы закономерности течения в вязком подслое. Показано, что наблюдаются определенные отклонения от закона стенки.

Введение

Для широкого класса турбулентных течений выполняется так называемый закон стенки (см., например, [1]). К их числу относятся турбулентные течения в пограничном слое, а также турбулентные течения в трубах и каналах. Согласно закону стенки, средняя скорость жидкости U вблизи гладкой стенки (кривизной поверхности которой можно пренебречь) зависит лишь от расстояния y до стенки, напряжения трения на стенке τ_w и физических характеристик жидкости (плотности ρ и вязкости μ). Другие величины, такие, например, как толщина пограничного слоя, диаметр трубы или средняя по сечению трубы скорость жидкости, не влияют на U . В этом случае из соображений размерности вытекает, что имеет место соотношение

$$\frac{U}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right).$$

Здесь $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ — динамическая скорость, $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости. Фигурирующее в правой части формулы отношение $l_\tau = \nu/u_\tau$ обычно называют динамической длиной. Закон стенки справедлив при значениях y , меньших $\approx 0.2h$, где h — полуширина канала (для случая пограничного слоя при y , меньших 0.2δ , где δ — толщина пограничного слоя).

Обозначим через u и v продольную (в направлении течения) и поперечную (в направлении нормали к стенке) составляющие пульсационной скорости жидкости. Проекцию пульсационной скорости на направление нормали к плоскости течения будем обозначать через w . При помощи черты над величиной будем обозначать операцию осреднения (например, по ансамблю реализаций турбулентного потока). Уравнение Рейнольдса для средней скорости жидкости U содержит касательное напряжение Рейнольдса. Поэтому закон стенки может выполняться только в том случае, когда аналогичное соотношение справедливо и для касательного напряжения Рейнольдса, а именно:

$$-\frac{\overline{uv}}{u_\tau^2} = f_1\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right).$$

Аналогичные формулы должны иметь место и для других одноточечных моментов поля скорости.

Перейдем к безразмерным переменным. В качестве масштабов длины и скорости будем использовать динамическую длину и динамическую скорость. Соответствующие безразмерные переменные обычно называют внутренними и обозначают при помощи надстрочного индекса „плюс“. Будем рассматривать течение жидкости в плоском канале. Если записать уравнение Рейнольдса для скорости U и проинтегрировать его один раз по y , получается следующее уравнение:

$$\frac{dU^+}{dy^+} - \overline{u^+v^+} = 1 - \frac{y^+}{\text{Re}_\tau}. \quad (1)$$

Здесь $\text{Re}_\tau = u_\tau h/\nu$ — число Рейнольдса, рассчитанное по динамической скорости жидкости (иначе говоря, полуширина канала во внутренних переменных h^+). При малых значениях y^+ вторыми слагаемыми и в правой, и в левой части этого уравнения можно пренебречь. Поэтому в так называемом вязком подслое имеет место формула: $U^+ = y^+$. Обычно считают, что это соотношение справедливо при $y^+ < 5$. Для производной dU/dy в области действия закона стенки из соображений размерности можно написать следующее выражение:

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{y} f_2\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right).$$

На достаточно больших расстояниях от стенки силы вязкого трения должны играть малую роль по сравнению с турбулентным перемешиванием. Поэтому вязкость жидкости не должна оказывать влияния на закон изменения скорости и функция $f_2(y^+)$ при больших значениях аргумента должна стремиться к некоторому конечному пределу. В этом случае

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_\tau}{ky},$$

где k — некоторая постоянная (так называемая константа Кармана). Проинтегрировав это уравнение, получим:

$$U^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B.$$

Здесь B — универсальная постоянная. Эти постоянные определяют при помощи экспериментальных данных.

По данным различных исследователей, имеется определенный разброс значений этих постоянных. Типичные значения (см., например, [2]) $k = 0.41$, $B = 5.5$. Та область вблизи стенки, где выполняется данное соотношение, называется логарифмическим пограничным слоем. За нижнюю границу логарифмического пограничного слоя, как правило, принимают $y^+ = 30$. Верхняя граница совпадает с верхней границей области, где справедлив закон стенки. Область, расположенная между логарифмическим пограничным слоем и вязким подслоем, называется буферной областью.

Уже довольно давно высказываются мнения, что перечисленные выше закономерности могут не выполняться, во всяком случае, при сравнительно малых значениях числа Рейнольдса. В работе [3], в которой для обоснования логарифмического закона использовался метод сращиваемых асимптотических разложений, утверждается, что этот закон следует рассматривать как асимптотический. Он выполняется при $Re \rightarrow \infty$, где Re — число Рейнольдса, вычисленное по средней по сечению канала скорости жидкости. В [4] получены поправки к логарифмическому закону, а в [5] при помощи данных, полученных путем прямого численного моделирования, определены дополнительные константы в выражении, обобщающем логарифмический закон. По мнению Баренблатта [6] (см. также [7–9]), нет достаточных оснований считать, что функция f_2 при больших значениях аргумента стремится к определенному пределу. Вполне может быть, что эта функция изменяется по степенному закону (неполная автомодельность по терминологии Баренблатта). В этом случае скорость изменяется вблизи стенки по степенному закону:

$$U^+ = c(y^+)^{\alpha}.$$

Коэффициенты c и α в этой формуле зависят от числа Рейнольдса. На основании экспериментальных данных Никурадзе по течению жидкости в трубах Баренблатт и Простокишин [4] получили следующие выражения для постоянных c и α :

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln Re + \frac{5}{2}, \quad \alpha = \frac{3}{2 \ln Re}.$$

Здесь $Re = U_b d / \nu$ — число Рейнольдса, рассчитанное по средней по сечению скорости жидкости U_b и диаметру трубы d . Разумеется, степенной закон для описания профиля скорости жидкости в трубе использовался и раньше, но Баренблатт показал, что эта формула имеет такой же статус, как и логарифмическая формула.

Этот вопрос вызвал определенную дискуссию (см., например, [10,11]). Предлагались также другие соотношения для профиля скорости [12,13]. О том, какой именно закон изменения скорости в большей мере соответствует действительности, можно судить по поведению так называемых индикаторных функций [12,14]. Если в некоторой области выполняется логарифмический закон, то в этой области функция $\varphi_1(y^+) = y^+ dU^+ / dy^+$ сохраняет постоянное значение ($\varphi_1 = 1/k$). Если в некотором интервале значений y^+ справедлив степенной закон, то тогда

в этом интервале функция $\varphi_2(y^+) = (y^+ / U^+) (dU^+ / dy^+)$ должна быть постоянной ($\varphi_2 = \alpha$), но эта постоянная зависит от числа Рейнольдса. Основываясь на своих экспериментальных данных, авторы работы [14] пришли к выводу, что профиль скоростей является логарифмическим, но константы k и B , а также интервал значений y^+ , для которого это соотношение выполняется, отличаются от указанных выше.

Прямому численному моделированию турбулентных течений в плоском канале посвящен целый ряд работ [15–20]. Имеются также работы, посвященные прямому численному моделированию турбулентных течений в круглой трубе [21–25]. Результаты моделирования можно использовать для изучения различных закономерностей турбулентных течений вблизи стенки (см., например, [5,26–30]). Хотя до настоящего времени возможно прямое численное моделирование лишь при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса (так, для течения в канале Re_{τ} не превосходит 2000), возможно изучить при помощи результатов прямого численного моделирования, полученных различными авторами, влияние числа Рейнольдса на статистические характеристики турбулентности вблизи стенки.

Целью настоящей работы является изучение некоторых отклонений от закона стенки, которые можно выявить при помощи результатов прямого численного моделирования.

Влияние числа Рейнольдса на расположение и значения экстремальных значений напряжений Рейнольдса

Как уже говорилось выше, при малых значениях y^+ в переменных стенки (во внутренних переменных) графики зависимостей различных статистических характеристик турбулентности от расстояния до стенки, построенные при различных значениях числа Рейнольдса, должны укладываться на одну кривую. Для средней скорости жидкости этот закон неплохо выполняется, но для других характеристик, например для среднеквадратичных значений пульсационной составляющей скорости жидкости, наблюдаются заметные различия в ходе соответствующих кривых даже при сравнительно малых значениях y^+ . Построение индикаторных функций показывает, что при тех сравнительно малых значениях числа Рейнольдса, для которых имеются результаты численного моделирования, ни логарифмический закон, ни степенной закон, строго говоря, не выполняются. На графиках имеются участки, где изменение индикаторных функций слабое. На этих участках приближенно можно считать выполняющимся соответствующий закон (в большей мере это относится к степенному). Разумеется, в подобной ситуации константы в формулах, аппроксимирующих профиль скорости, будут зависеть, вообще говоря, от того интервала значений y^+ , на котором производится аппроксимация.

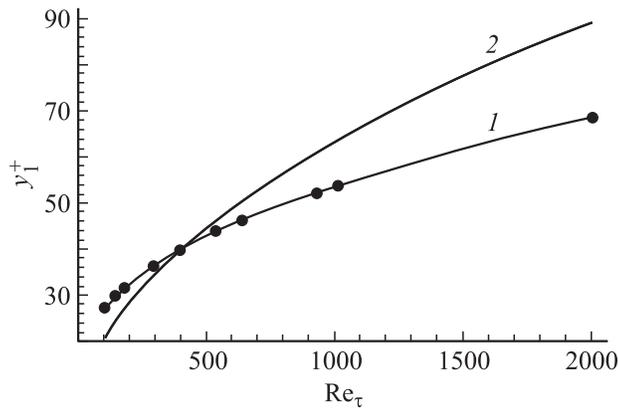


Рис. 1. Зависимость расстояния от стенки до точки, где достигается максимальное значение касательного напряжения Рейнольдса, от Re_τ . Точки построены по результатам прямого численного моделирования, кривая 1 — по формуле (2), 2 — по $y_1^+ = 2\sqrt{Re_\tau}$.

Как отмечается в работе [31], немаловажно расположение той точки, где достигается максимальное значение касательного напряжения Рейнольдса. В этой точке слагаемое $d(\overline{u^+v^+})/dy^+$ в уравнении Рейнольдса для продольной составляющей скорости жидкости обращается в нуль. Поэтому вязкое напряжение в точности компенсирует градиент давления. К этому можно добавить следующее. Обозначим расстояние от стенки канала до той точки, где достигается максимальное значение касательного напряжения Рейнольдса, через y_1^+ . Значение $-\overline{u^+v^+}$ в области $0 < y^+ < y_1^+$ монотонно увеличивается, а dU^+/dy^+ — монотонно уменьшается. Поэтому в указанной области слагаемое в левой части уравнения Рейнольдса, которое описывает перенос количества движения за счет турбулентного перемешивания, меньше второго слагаемого в правой части, представляющего собой равнодействующую сил вязкого трения.

В работе [32] для величины y_1^+ предложено следующее выражение: $y_1^+ = 1.89\sqrt{Re_\tau}$. Позднее в работе [2] показано, что константа перед квадратным корнем в правой части равна двум. Величина y_1^+ может быть определена по данным прямого численного моделирования течения в плоском канале [17–19]. Результаты показаны на рис. 1.

При тех сравнительно малых значениях числа Рейнольдса, которые использовались при расчетах, простая однопараметрическая аппроксимация не описывает удовлетворительно данные расчетов. Дело заключается в следующем. Если зависимость $U^+(y^+)$ известна, то y_1^+ можно найти при помощи (1), продифференцировав это соотношение по y^+ и приравняв к нулю в точке экстремума производную $d(\overline{u^+v^+})/dy^+$. Так, если выполняется логарифмический закон, то получается выражение $y_1^+ = \sqrt{Re_\tau}/k$. Но при сравнительно малых значениях числа Рейнольдса y_1^+ располагается на том участке, где индикаторная функция φ_1 убывает, поэтому значение y_1^+

должно быть пропорционально не квадратному корню из числа Рейнольдса, а числу Рейнольдса в меньшей степени. При больших значениях числа Рейнольдса ситуация должна измениться, так как y_1^+ попадет на тот участок, где индикаторная функция растет. Графики зависимости индикаторной функции φ_1 от y^+ при различных Re_τ имеются, например, в работе [5]. Для диапазона чисел Рейнольдса $110 < Re_\tau < 2000$ можно предположить, например, следующую приближенную формулу:

$$y_1^+ = 1.13\sqrt{Re_\tau} + 18.8 - 30.4/\sqrt{Re_\tau}. \quad (2)$$

При больших значениях числа Рейнольдса максимальное значение касательного напряжения Рейнольдса должно асимптотически стремиться к единице (в переменных стенки). Обозначим эту величину через $-(\overline{u^+v^+})_p$. Для ее расчета в указанном выше диапазоне чисел Рейнольдса можно предложить следующую двухпараметрическую аппроксимацию:

$$-(\overline{u^+v^+})_p = 1 - \frac{2.65}{\sqrt{Re_\tau}} - \frac{14.6}{Re_\tau}. \quad (3)$$

На рис. 2 зависимость величины $(\overline{u^+v^+})_p$ от Re_τ построена по данным прямого численного моделирования [17–19].

Отметим, что в работе [33] утверждается, что при значениях $y^+ > 10$ зависимость касательного напряжения Рейнольдса от расстояния до стенки неплохо описывается при помощи выражения следующего вида:

$$-\overline{u^+v^+} = c \left[1 - \alpha_1 \{ \ln(y^+/y_1^+) \}^2 + \dots + \alpha_n \{ \ln(y^+/y_1^+) \}^n + \dots \right].$$

Здесь $c = -(\overline{u^+v^+})_p$, а константы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не зависят от числа Рейнольдса, по крайней мере, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса. Для построения такого вида приближенных формул необходимо располагать зависимостями для расчета величин y_1^+ и $-(\overline{u^+v^+})_p$.

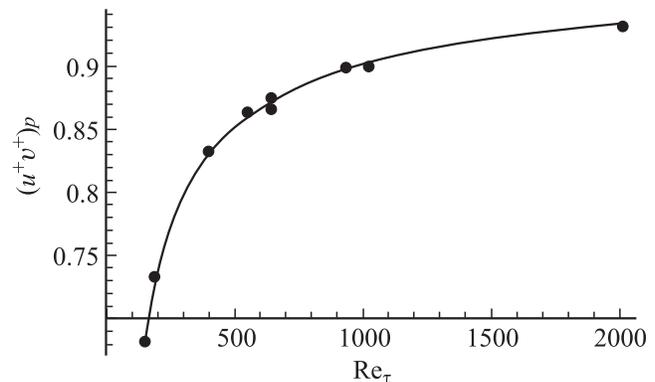


Рис. 2. Зависимость максимального значения касательного напряжения Рейнольдса от Re_τ . Точки построены по результатам прямого численного моделирования, кривая — по формуле (3).

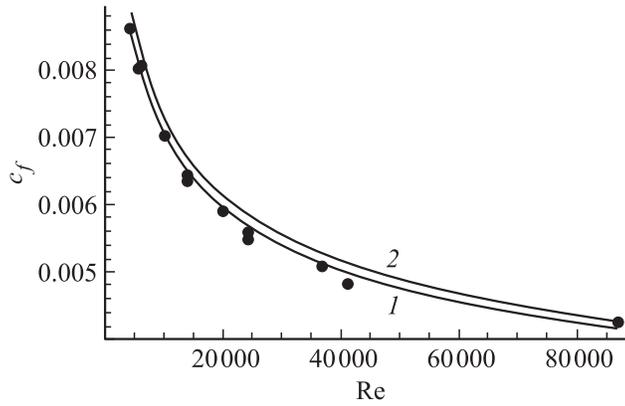


Рис. 3. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса. Точки построены по результатам прямого численного моделирования, кривая 1 — по формуле (4), 2 — по формуле Дина.

Рассмотрим также нормальные напряжения Рейнольдса. Будем обозначать через u'^+ , v'^+ и w'^+ среднеквадратичные значения пульсационных составляющих скорости жидкости, т.е. $u'^+ = \sqrt{(u^+)^2}$ и т.п. Все эти характеристики обращаются в нуль на стенке канала, достигают максимального значения на некотором расстоянии до стенки, а затем убывают вплоть до оси канала. Данные прямого численного моделирования показывают, что величина u'^+ достигает максимума u_p при значениях y^+ , которые практически не зависят от числа Рейнольдса и примерно равны 14–15. Само максимальное значение с ростом числа Рейнольдса увеличивается и приближенно может быть найдено по формуле:

$$u_p = 0.007725\sqrt{\text{Re}_\tau} + 2.605 - \frac{0.7487}{\sqrt{\text{Re}_\tau}}.$$

Те расстояния до стенки канала, где достигаются максимальные значения v'^+ и w'^+ , обозначим через y_2^+ и y_3^+ соответственно, а сами максимальные значения — через v_p и w_p . Данные работ [17–19] показывают, что с ростом Re_τ все эти величины возрастают. Для их расчета можно предложить следующие приближенные формулы:

$$y_2^+ = 1.234\sqrt{\text{Re}_\tau} + 60.7 - \frac{280.3}{\sqrt{\text{Re}_\tau}},$$

$$v_p = 1.139 - \frac{58.62}{\text{Re}_\tau} + \frac{1048}{\text{Re}_\tau^2},$$

$$y_3^+ = 0.2517\sqrt{\text{Re}_\tau} + 34.09 - \frac{14.77}{\sqrt{\text{Re}_\tau}},$$

$$w_p = 1.578 - \frac{120.4}{\text{Re}_\tau} + \frac{5125}{\text{Re}_\tau^2}.$$

В аппроксимационных формулах использовалось число Рейнольдса Re_τ , определенное по динамической ско-

рости и полуширине канала. Гораздо чаще рассматривают число Рейнольдса, определенное по средней по сечению скорости жидкости. Связь между ними можно получить на основе формулы для коэффициента трения. Введем в рассмотрение коэффициент трения c_f по формуле: $c_f = 2(u_\tau/U_b)^2$. Здесь U_b — средняя по сечению канала скорость жидкости. На основе обобщения экспериментальных данных Дин [34] получил следующую формулу для плоских каналов: $c_f = 0.073/\text{Re}^{0.25}$. Здесь $\text{Re} = 2\rho h U_b/\mu$ — число Рейнольдса, определенное по средней по сечению скорости жидкости и ширине канала $2h$. Показатель степени при числе Рейнольдса в этой формуле такой же, как в известной формуле Блазиуса для круглых труб. Как показывает рис. 3, результаты работ [17–19] не вполне согласуются с этой формулой.

Аппроксимация результатов прямого численного моделирования дает следующее выражение:

$$c_f = 0.06731/\text{Re}^{0.2449}. \quad (4)$$

Показатель степени в этой формуле почти такой же, как и показатель степени в формуле для коэффициента сопротивления, которую получили авторы работы [14] на основе их собственных экспериментов. Введем в рассмотрение число Рейнольдса, определенное по полуширине канала и средней по сечению скорости жидкости: $\text{Re}_m = \text{Re}/2$. Зависимость между числами Рейнольдса Re_m и Re_τ , полученная путем аппроксимации результатов численного моделирования, имеет вид:

$$\text{Re}_m = 7.609 \text{Re}_\tau^{1.1395}.$$

Определенный интерес представляет также зависимость между скоростью на оси канала и средней по сечению скоростью. По результатам [17–19] получается следующее соотношение:

$$U_0/U_b = 1.33 \text{Re}^{-0.0156}.$$

Отклонения от закона стенки в вязком подслое

Заметные отклонения от закона стенки наблюдаются на определенном расстоянии от стенки. Чем меньше значение y^+ , тем лучше выполняется указанный закон. Однако даже в непосредственной окрестности стенки имеются четко выраженные нарушения закона стенки. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

В вязком подслое при малых значениях y^+ статистические характеристики турбулентности можно разложить в ряды по степеням y^+ . На стенке (при $y^+ = 0$) в силу условия прилипания пульсационная составляющая скорости жидкости обращается в нуль, т.е. $u = v = w = 0$. На основании уравнения неразрывности можно сделать вывод, что и производная $\partial v/\partial y$ на

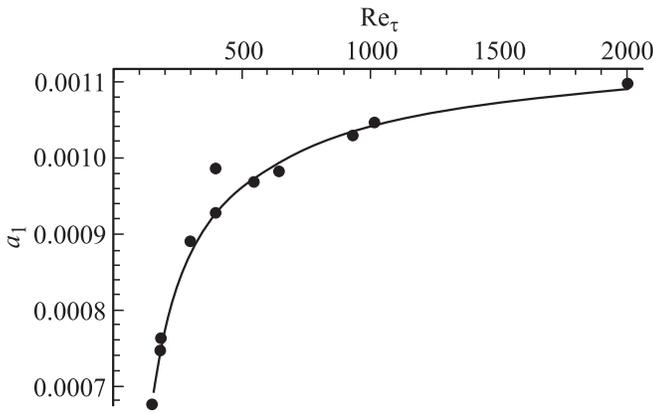


Рис. 4. Зависимость коэффициента a_1 от Re_τ . Кривая построена по формуле (5).

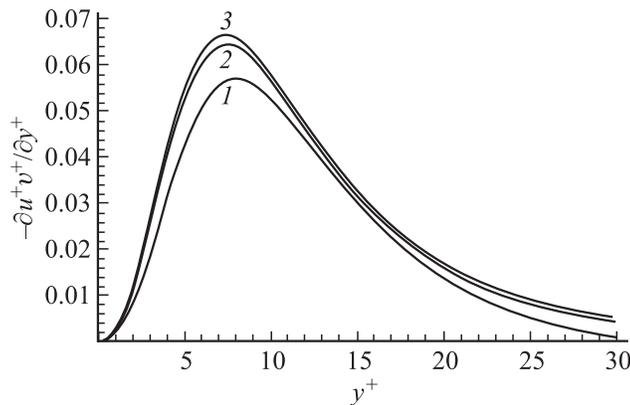


Рис. 5. Зависимости величины $-\overline{du^+v^+}/\partial y^+$ от расстояния до стенки y^+ . Кривая 1 построена при $Re_\tau = 186$, 2 — 547, 3 — 2004.

стенке должна быть равна нулю. Поэтому указанные разложения должны иметь следующий вид:

$$-\overline{u^+v^+} = a_1y^3 + b_1y^4 + \dots,$$

$$u'^+ = a_2y^+ + b_2y^{+2} + \dots,$$

$$v'^+ = a_3y^{+2} + b_3y^{+3} + \dots, \quad w'_+ = a_4y^+ + b_4y^{+2} + \dots$$

Если закон стенки справедлив, то коэффициенты в указанных разложениях не должны зависеть от числа Рейнольдса. Так, например, Монин и Яглом [1] указывают следующие приближенные оценки, основанные на экспериментальных данных Лауфера, Клебанова и Таунсенда: $a_1 \approx 0.0006$, $a_2 \approx 0.3$, $a_3 \approx 0.01$, $a_4 \approx 0.04$. Однако в работе [26] показано, что при малых числах Рейнольдса наблюдается заметная зависимость этих коэффициентов от числа Рейнольдса. В этой работе сопоставлялись результаты расчетов при двух значениях числа Рейнольдса: 180 и 400. Аналогичные разложения можно написать и для других статистических характеристик турбулентности. Так, например, для разложения среднеквадратичных значений проекций пульсационной

составляющей вихря ω'_x , ω'_y и ω'_z скорости будем иметь формулы:

$$\omega'_x = a_5 + b_5y^+ + \dots, \quad \omega'_y = a_6y^+ + b_6y^{+2} + \dots,$$

$$\omega'_z = a_7 + b_7y^+ + \dots,$$

коэффициент a_1 при увеличении числа Рейнольдса увеличивается (см. рис. 4). В рассматриваемом диапазоне значений числа Рейнольдса его можно приближенно вычислить по формуле:

$$a_1 = 0.001175 - \frac{0.00331}{\sqrt{Re_\tau}} - \frac{0.03307}{Re_\tau}. \quad (5)$$

Зависимости от числа Рейнольдса коэффициентов a_2 – a_4 и a_6 можно аппроксимировать следующим образом:

$$a_2 = 0.4629 - \frac{1.470}{\sqrt{Re_\tau}} + \frac{2.003}{Re_\tau},$$

$$a_3 = 0.01664 - \frac{0.1048}{\sqrt{Re_\tau}} + \frac{0.04012}{Re_\tau},$$

$$a_4 = 0.3186 - \frac{0.9731}{\sqrt{Re_\tau}} - \frac{7.827}{Re_\tau}, \quad a_6 = 0.03126 - \frac{0.706}{Re_\tau}.$$

Обозначим через $-\varepsilon_w^+$ скорость диссипации кинетической энергии пульсационного движения на стенке (при $y^+ = 0$). Зависимость $-\varepsilon_w^+$ от Re_τ для рассматриваемого диапазона чисел Рейнольдса может быть приближенно описана при помощи следующей формулы:

$$-\varepsilon_w^+ = 0.3059 - \frac{1.751}{\sqrt{Re_\tau}}.$$

Рассмотрим слагаемое в уравнении Рейнольдса $-\overline{du^+v^+}/\partial y^+$, которое описывает перенос импульса за счет турбулентного перемешивания. В пределах вязкого подслоя и буферной зоны наблюдаются заметные различия в ходе кривых, изображающих зависимость этой величины от координаты y^+ , при различных значениях Re_τ (рис. 5).

Приближенная формула для касательного напряжения Рейнольдса

Полученные результаты можно использовать для построения приближенных выражений, позволяющих рассчитывать статистические характеристики турбулентности. Например, для расчета касательного напряжения Рейнольдса можно использовать следующее выражение:

$$\overline{u^+v^+} = \frac{(a_1y^3 + d_1y^4)(1 - y^+/Re_\tau)}{1 + c_1y^+ + c_2y^{+2} + c_3y^{+3} + c_4y^{+4}}. \quad (6)$$

Здесь коэффициент a_1 вычисляется по формуле (5). Такой выбор этого коэффициента позволяет обеспечить

правильное асимптотическое поведение величины $\overline{u^+v^+}$ при малых значениях y^+ . Множитель $1 - y^+/\text{Re}_\tau$ в числителе введен с той целью, чтобы обеспечить выполнение условия обращения в нуль касательного напряжения на оси канала. Остальные коэффициенты (d_1, c_1, c_2, c_3, c_4) определялись следующим образом. При каждом значении Re_τ коэффициенты определялись так, чтобы максимальное значение $\overline{u^+v^+}$ достигалось при значении y^+ , которое вычисляется по формуле (2), и принимало значение, которое вычисляется по формуле (3). Три других условия представляют собой условия совпадения значений $\overline{u^+v^+}$, вычисляемых по этой формуле, с результатами прямого численного моделирования в трех промежуточных точках из интервала от нуля до y_1^+ . Затем полученные результаты аппроксимировались в виде зависимостей этих коэффициентов от Re_τ . В результате были получены следующие выражения:

$$d_1 = 0.2578 - \frac{24.28}{\text{Re}_\tau},$$

$$c_1 = 0.115 - \frac{15.63}{\text{Re}_\tau}, \quad c_2 = 0.02884 - \frac{1.697}{\text{Re}_\tau},$$

$$c_3 = 0.001086 - \frac{0.009346}{\sqrt{\text{Re}_\tau}}, \quad c_4 = 1 + \frac{1.213}{\sqrt{\text{Re}_\tau}}.$$

Формула (6) позволяет вычислить $\overline{u^+v^+}$ вблизи стенки вплоть до значений y^+ , несколько превышающих y_1^+ . Ранее предлагались и другие эмпирические формулы для этой величины. Например, в работе Пэнтон [35] для расчета $\overline{u^+v^+}$ в пристеночной области предложена следующая формула:

$$\overline{u^+v^+} = \frac{2}{\pi} \arctg\left(\frac{2ky^+}{\pi}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{C^+}\right)\right]^2.$$

На этой основе получено [36] также равномерно пригодное составное асимптотическое выражение для касательного напряжения Рейнольдса, справедливое при всех y^+ .

Упомянем также работу Львова с соавторами [37], в которой предложена модель турбулентного течения в трубах и каналах, пригодная при конечных (не обязательно бесконечно больших) значениях числа Рейнольдса. В статье [38], где рассматривается турбулентный пограничный слой без градиента давления, предложено для расчета градиента скорости dU^+/dy^+ использовать формулу, представляющую собой сумму двух дробных выражений. Одно из них — отношение полинома второй степени к полиному третьей степени, второе — отношение полинома второй степени к полиному пятой степени. Коэффициенты выбирались так, чтобы обеспечить правильное асимптотическое поведение этого выражения при малых y^+ .

Полученные в работах [35–37] соотношения довольно хорошо описывают зависимость касательного напряжения Рейнольдса от расстояния до стенки. Основное отличие предложенной здесь формулы заключается в

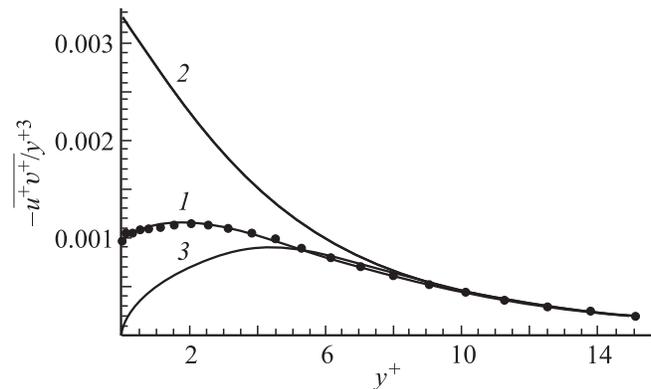


Рис. 6. Зависимость величины $\overline{u^+v^+}/y^+3$ от расстояния до стенки. Точки построены по результатам [19] ($\text{Re}_\tau = 934$), кривая 1 построена по формуле (6), 2 и 3 — по результатам работ [35] и [37] соответственно.

том, что она несколько лучше описывает указанную зависимость при малых значениях y^+ . Это обстоятельство иллюстрирует рис. 6.

Заключение

Турбулентные течения в плоском канале при сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса проявляют ряд отклонений от закона стенки. Это обстоятельство должно приниматься во внимание при моделировании таких течений, а также других турбулентных течений вблизи твердой поверхности.

Список литературы

- [1] Монин А.С., Яглом А.С. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 640 с.
- [2] Sreenivasan K.R. // *Frontier in Experimental Fluid Mechanics* / Ed. by M. Gad-el-Hak. Berlin: Springer, 1989. P. 159–209.
- [3] Yajnik K. // *J. Fluid Mech.* 1970. Vol. 42. P. 411–417.
- [4] Afzal N., Yajnik K. // *J. Fluid Mech.* 1973. Vol. 61. P. 23–31.
- [5] Jiménez J., Moser R.D. // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2007. Vol. 365. P. 715–732.
- [6] Barenblatt G.I. // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 248. P. 513–520.
- [7] Barenblatt G.I., Prostokishin V.M. // *J. Fluid Mech.* 1993. Vol. 248. P. 521–529.
- [8] Barenblatt G.I., Chorin A.J., Prostokishin V.M. // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1997. Vol. 94a. P. 773–776.
- [9] Barenblatt G.I., Chorin A.J., Prostokishin V.M. // *Appl. Mech. Rev.* 1997. Vol. 50. N 7. P. 413–429.
- [10] Buschman M.H., Gad-el-Hak M. // *AIAA J.* 2003. Vol. 41. N 4. P. 565–572.
- [11] George W.K. // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2007. Vol. 365. P. 789–806.
- [12] Wosnik M., Castillo L., George W.K. // *J. Fluid Mech.* 2000. Vol. 421. P. 115–145.
- [13] Buschman M.N., Gad-el-Hak M. // *AIAA J.* 2003. Vol. 41. N 1. P. 40–48.

- [14] *Zanoun E.S., Durst F., Nagib H.* // *Phys. Fluids*. 2003. Vol. 15. N 10. P. 3079–3089.
- [15] *Kim J., Moin P., Moser R.* // *J. Fluid Mech.* 1987. Vol. 177. P. 133–166.
- [16] *Moser R.D., Kim J., Mansour N.N.* // *Phys. Fluids*. 1999. Vol. 11. N 4. P. 943–945.
- [17] *Iwamoto K., Suzuki Y., Kasagi N.* // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 2002. Vol. 23. P. 678–689.
- [18] *Abe H., Kawamura H., Matsuo Y.* // *Int. J. Heat and Fluid Flow*. 2004. Vol. 25. P. 404–419.
- [19] *Hoyas S., Jiménez J.* // *Phys. Fluids*. 2006. Vol. 18. P. 011 702.
- [20] *Hoyas S., Jiménez J.* // *Phys. Fluids*. 2008. Vol. 20. P. 101 511.
- [21] *Eggels J.G.M., Unger F., Weiss M.H., Westerwell J., Adrian R.J., Friedrich R., Nieuwstadt F.T.M.* // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 268. P. 175–209.
- [22] *Orlandi P., Fatica M.* // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 343. P. 43–72.
- [23] *Fukagata K., Kasagi N.* // *J. Comput. Phys.* 2002. Vol. 181. P. 478–498.
- [24] *Wagner C., Huttl T.J., Friedrich R.* // *Comput. Fluids*. 2001. Vol. 30. P. 581–590.
- [25] *Wu X., Moin P.* // *J. Fluid Mech.* 2008. Vol. 608. P. 81–112.
- [26] *Antonia R.A., Teitel M., Kim J., Browne L.W.B.* // *J. Fluid Mech.* 1992. Vol. 236. P. 579–605.
- [27] *Antonia R.A., Kim J.* // *J. Fluid Mech.* 1994. Vol. 276. P. 61–80.
- [28] *Bradshaw P., Huang G.P.* // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1995. Vol. 451. N 1941. P. 165–188.
- [29] *Laadhari F.* // *Phys. Fluids*. 2002. Vol. 14. N 10. P. L65–L68.
- [30] *Laadhari F.* // *Phys. Fluids*. 2007. Vol. 19. P. 038 101.
- [31] *Sreenivasan K.R., Sahay A.* // *Self-Sustaining Mechanisms of Wall Turbulence*. Southampton: Computational Mechanics Publication, 1997. P. 253–272.
- [32] *Long R.R., Chen T.-C.* // *J. Fluid Mech.* 1972. Vol. 105. P. 19–59.
- [33] *Sreenivasan K.R., Bershadskii A.* // *J. Fluid Mech.* 2006. Vol. 554. P. 477–498.
- [34] *Dean R.B.* // *Trans. ASME. J. Fluid Engineering*. 1978. Vol. 100. N 2. P. 215–223.
- [35] *Panton R.L.* // *Appl. Mech. Rev.* 2005. Vol. 58. P. 1–36.
- [36] *Panton R.L.* // *Phil. Trans. R. Soc.* 2007. Vol. 365. P. 733–754.
- [37] *L'vov V.S., Procaccia I., Rudenko O.* // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100. P. 054 504.
- [38] *Monkewitz P.A., Chauhan K.A., Nagib H.M.* // *Phys. Fluids* 2007. Vol. 19. P. 115 101.