

01;07

## О роли рассеяния и краев поглощения при волноводной коллимации рентгеновского излучения

© Л.И. Огнев

Институт ядерного синтеза Российский научный центр „Курчатовский институт“,  
123182 Москва, Россия  
e-mail: ognev@nfi.kiae.ru

(Поступило в Редакцию 9 ноября 2009 г. В окончательной редакции 4 февраля 2010 г.)

На основе статистической теории рассеяния рентгеновского пучка в узком шероховатом коллиматоре исследована роль некогерентного рассеяния в ослаблении прошедшего излучения. Получены приближенные выражения для коэффициентов затухания волноводных мод, причем затухание за счет рассеяния пропорционально произведению среднеквадратичной амплитуды шероховатостей на длину корреляции. Предсказан эффект значительного снижения рассеяния вблизи краев поглощения за счет дисперсии, что можно наблюдать также и по уменьшению интенсивности обратно рассеянного пучка. Влияние шероховатостей приводит не только к уменьшению пропускания излучения дифракционными фильтрами, но и к ухудшению селективности фильтрации излучения. Аналитические выражения для коэффициентов затухания волноводных мод позволяют обобщить полученные результаты на коллиматоре с различными свойствами поверхностей.

### Введение

В ранних работах по расчету каналирования рентгеновского излучения в диэлектрических каналах использовалось приближение геометрической оптики [1], что было оправдано в случаях, когда число возбуждаемых волноводных мод было велико. Число волноводных мод в плоском незаполненном канале шириной  $d$  можно оценить из соотношения  $(d/\pi\lambda)\sqrt{\text{Re}(1-\varepsilon)}$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения, а  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость стенок канала. Убывание интенсивности излучения при отражении от стенок за счет поглощения оценивалось по формулам Френеля, а в результате рассеяния — по затуханию когерентной части пучка. Как показали расчеты, некогерентное рассеяние существенно влияет на пропускание рентгеновского излучения через кварцевые капилляры. Еще более значительно влияние рассеяния при прохождении через каналы с сильно шероховатыми поверхностями, как в случае трековых мембран [2]. В приближении геометрической оптики влияние шероховатостей на ослабление когерентной части рентгеновского пучка рассматривалось в работе [3]. Влияние межслойных шероховатостей на отражение пучка от многослойных структур рассматривалось в работе [4].

В настоящей работе влияние некогерентного рассеяния на шероховатостях рассматривалось на основе статистической теории волноводного распространения рентгеновского излучения в диэлектрических каналах в рамках параболического приближения квазиоптики.

Для узких каналов, а также при невысоких энергиях излучения, особенно в каналах из легких материалов, требуется волновое описание распространения излучения в канале. Как показано в работе [5], затухание пучка за счет взаимодействия со стенками канала будет иметь место даже при входе излучения вдоль оси канала. Захваченное излучение в канале можно представить в

виде набора волноводных мод  $\varphi_l(x)$  с распределением напряженности электрического поля по поперечной координате  $x$ , зависящим как от номера моды  $l$ , так и от оптических свойств стенок канала. Минимальное затухание будет иметь основная (нулевая) мода.

### Метод расчета затухания волноводных мод

В рамках метода параболического уравнения, учитывающего рассеяния на малые углы, медленно изменяющаяся амплитуда электрического вектора  $A(x, z)$  находится из уравнения

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \Delta_{\perp} A + \frac{k^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0} A, \quad (1)$$

$$A(x, z = 0) = A_0(x),$$

где  $z$  и  $x$  являются координатами вдоль и поперек канала,

$$k = \sqrt{\varepsilon_0} \frac{\omega}{c},$$

$\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_1$  — диэлектрическая проницаемость среды в канале и материала „стенок“. Диэлектрическая проницаемость переходного слоя на случайных границах шероховатого канала  $\varepsilon = \xi(z)$  может быть представлена в виде

$$\varepsilon(x, z) = \varepsilon_1 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)H(x - \xi(x)).$$

$H(x)$  — ступенчатая функция,  $H(x) = 0$  при  $x < 0$  и  $H(x) = 1$  при  $x \geq 0$ .

Предлагаемый метод может быть обобщен на трехмерный случай. На основе данного перехода методом прямого численного моделирования поверхности канала была рассмотрена задача формирования выходного

пучка в сильно шероховатом рентгеновском коллиматоре [5], влияние периодических неоднородностей на динамику модового состава пучка [6], а также построена статистическая теория затухания волновых рентгеновских мод в шероховатом канале в условиях полного внешнего отражения [5]. Излагаемые в настоящей работе результаты основываются на выводах статистической теории.

Предполагая малое изменение  $A(x, z)$  на длине корреляции шероховатостей  $l_{\text{corr}}$ , уравнение (1) можно статистически усреднить [5] по реализациям случайной величины  $x = \xi(z)$ :

$$2ik \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial z} = \Delta_{\perp} \langle A \rangle + k^2 \chi(x, z) \langle A \rangle - ik^2 W(x, z) \langle A \rangle, \quad (2)$$

$$\langle A(x, z = 0) \rangle = A_0(x),$$

где

$$\chi(x, z) = \frac{\langle \varepsilon(x, z) \rangle - \varepsilon_0}{\varepsilon_0},$$

$$W(x, z) = -\frac{k(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2}{4\pi\varepsilon_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \int_{-\infty}^{x/\sigma} \exp(-\xi^2) d\xi \times \int_{\frac{x/\sigma - R(z')\xi}{(1-R^2(z'))^{1/2}}} \exp(-\eta^2) d\eta, \quad (3)$$

$R(z)$  — коэффициент автокорреляции,  $\sigma$  — дисперсия распределения  $\xi(z)$ .

Амплитуда волны может быть представлена в виде разложения по модам или собственным функциям  $\varphi_l(x)$

$$A(x, z) = \sum_l C_l(z) \varphi_l(x) \exp(ik_{lz}z - \beta_l z), \quad (4)$$

где коэффициенты затухания мод  $\beta_l$  могут быть найдены как интегралы перекрытия

$$\beta = -\frac{k}{2} \int \varphi_l^*(x) [\text{Im}(\chi(x)) + W(x)] \varphi_l(x) dx.$$

Собственные функции  $\varphi_l(x)$  являются решениями уравнения

$$\Delta_{\perp} \varphi_l(x) = k[2k_{lz} - k\text{Re}(\chi(x))] \varphi_l(x). \quad (5)$$

Пренебрегая шириной переходного слоя на стенках канала, для записи решения уравнения (5) будем считать, что  $\chi(x)$  изменяется скачком. В этом случае внутри канала решения ищутся в виде

$$\varphi_l(x) = C_l \sin(\kappa_{0l}x + \delta_l), \quad (6)$$

где  $\kappa_{0l}^2 = -k(2k_{lz})$ ,

$$\delta_l = \arcsin \left\{ \frac{\kappa_{0l}}{k \sqrt{\text{Re}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0)}} \right\} + \pi m,$$

$m$  — целые числа.

Значения  $\kappa_{0l}$  находятся из трансцендентного уравнения

$$-\frac{\kappa_{0l}d - \pi m}{2} = \arcsin \left\{ \frac{\kappa_{0l}}{k \sqrt{\text{Re}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0)}} \right\}. \quad (7)$$

Учитывая тонкость переходного слоя для параметра  $\chi(x)$  по сравнению с глубиной экспоненциального проникновения излучения в вещество стенок канала, получаем для коэффициента затухания за счет поглощения

$$(\beta_l)_{\text{abs}} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0) - \kappa_{0l}^2/k^2}} \times \frac{\kappa_{0l} \text{Im}(\varepsilon_1/\varepsilon_0) \sin^2 \delta_l}{2 \cos(2\delta_l + \kappa_{0l}d/2) \sin(\kappa_{0l}d/2) - \kappa_{0l}d}. \quad (8)$$

Аналогично, считая узким распределение потенциала рассеяния  $W(x, z)$  по сравнению с расстоянием, на котором меняется мода  $\varphi_l(x)$  и, полагая вблизи стенки  $\varphi_l(x) \approx \sin \delta_l$ , получаем

$$(\beta_l)_{\text{incoh}} = \frac{\sigma \sqrt{\pi} k^2 (\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2 \sin^2 \delta_l}{8 \int_0^{d/2} \sin^2(\delta_l + \kappa_{0l}x) dx} \times \int_0^{\infty} \frac{dz'}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 d\eta \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \left[ \Phi\left(\frac{-\eta R(z')}{\sqrt{1 - R^2(z')}}\right) - \frac{1}{2} \right], \quad (9)$$

где  $\Phi(\eta)$  — интеграл ошибок. Поскольку интеграл по  $dz'$  не зависит от  $\sigma$ , его можно вычислить отдельно для различных видов автокорреляционной функции  $R(z')$ . Для экспоненциальной автокорреляционной функции  $R(z) = \exp(-z/l_{\text{corr}})$  величина интеграла почти линейно зависит от длины корреляции, выраженной в микронах,  $\approx Cl_{\text{corr}}$ , где  $C = 0.07$  [7].

Поскольку величина  $\kappa_{0l}d/2$  близка к  $\pi/2$  (или  $\pi$ ), то синус и косинус в выражениях (8) и (9) для  $\beta_{\text{abs}}$  и  $\beta_{\text{incoh}}$  можно разложить по малому параметру и получить приближенные выражения для коэффициентов ослабления пучка.

Полагая в этих формулах  $k_{lz} = \pi(l+1)/d$ , коэффициент некогерентного затухания при рассеянии на шероховатостях с амплитудой  $\sigma$  можно приближенно записать [7] как

$$(\beta_{\text{incoh}}) \approx \frac{\pi^2}{d^3} (l+1)^2 \sigma \sqrt{\pi} \text{Re}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0) Cl_{\text{corr}}. \quad (10)$$

Поглощение на стенках приводит к ослаблению излучения для  $l$  моды с коэффициентом

$$(\beta_{\text{abs}})_l \approx \frac{\pi^2}{d^3} (l+1)^2 \frac{\text{Im}(\varepsilon_1/\varepsilon_0)}{[\text{Re}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0)]^{1/2}} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2}. \quad (11)$$

Приближенные формулы хорошо согласуются с результатами численных расчетов [5].

Можно также отметить, что выражение для коэффициента поглощения  $\beta_{\text{abs}}$  имеет ту же зависимость от параметров среды, что и линейная аппроксимация коэффициента отражения от гладкой поглощающей поверхности в приближении геометрической оптики [3]. Выражение (11) с учетом удвоения коэффициента аналогично феноменологическому выражению для затухания интенсивности пучка в канале за счет поглощения на стенках, полученному в [8]. В случае некоррелированных шероховатостей можно подложить  $l_{\text{corr}} \approx \sigma$  и ослабление пучка при некогерентном рассеянии становится квадратично зависимым от квадрата высоты шероховатостей  $\sigma^2$  аналогично критерию Рэля [9]. Однако в отличие от приближения геометрической оптики и подходов, основанных на теории возмущений [10], оно не обращается в нуль для основной моды, возбуждаемой при входе пучка вдоль оси канала.

Выделив в формулах (10) и (11) ширину канала  $d$  и модовые множители  $(l+1)^2$ , эти выражения можно переписать в виде обобщенных сечений рассеяния и поглощения

$$B_{\text{incoh}} = \frac{(\beta_{\text{incoh}})d^3}{(l+1)^2\pi^2} \approx \sigma\sqrt{\pi} \left[ \text{Re}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right) \right] Cl_{\text{corr}}, \quad (12)$$

$$B_{\text{abs}} = \frac{(\beta_{\text{abs}})d^3}{(l+1)^2\pi^2} \approx \frac{\text{Im}(\varepsilon_1/\varepsilon_0)}{[\text{Re}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0)]^2} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2}. \quad (13)$$

Отсюда можно определить отношение вкладов некогерентного рассеяния и поглощения в ослабление пучка в рентгеновском волноводном канале

$$\frac{B_{\text{incoh}}}{B_{\text{abs}}} \approx \sigma\sqrt{\pi} \frac{[\text{Re}(1 - \varepsilon_1/\varepsilon_0)]^{5/2}}{\text{Im}(\varepsilon_1/\varepsilon_0)} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 Cl_{\text{corr}}. \quad (14)$$

## Обсуждение результатов

Результаты расчетов вкладов некогерентного рассеяния и поглощения на стенках каналов в ослаблении пучка в диапазоне энергий излучения 0.3–10 keV представлены на рис. 1 для кварца и майлара. Оптические константы материалов взяты из [11].

Зависимость отношения коэффициентов некогерентного рассеяния и поглощения пучка  $B_{\text{incoh}}/B_{\text{abs}}$  от энергии излучения показана на рис. 2 для каналов из никеля (кривая 1), кварца (2) и майлара (3). Амплитуда шероховатостей для расчетов выбрана равной 5 nm, длина корреляции  $1 \mu\text{m}$  для обоих рисунков. Как следует из формул (10) и (12), величина коэффициента ослабления пучка за счет рассеяния пропорциональна произведению среднеквадратичной амплитуды шероховатостей и их корреляционной длины  $\sigma l_{\text{corr}}$ .

Из представленных результатов следует, что общей тенденцией является возрастание относительной роли некогерентного рассеяния при увеличении энергии излучения, причем эта тенденция проявляется в большей степени в легком материале (майлар). Это связано, по-видимому, с более быстрым убыванием поглощения в

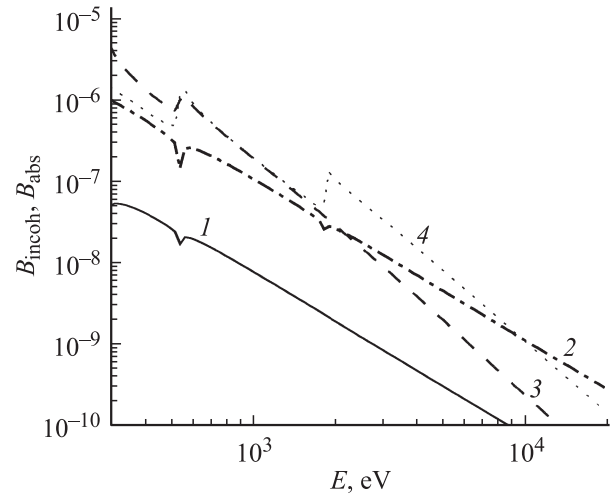


Рис. 1. Зависимость нормированных коэффициентов некогерентного рассеяния  $B_{\text{incoh}}$  (кривые 1 и 2) и поглощения  $B_{\text{abs}}$  (кривые 3 и 4) в каналах из майлара (1 и 3) и кварца (2 и 4).

веществе по сравнению с его преломляющей способностью при возрастании энергии излучения.

Влияние  $K$ - и  $L$ -краев поглощения в никеле на рассеяние вследствие дисперсии и ослабление пучка показано на рис. 3. Из рисунка видно, что вблизи края поглощения происходит существенное снижение интенсивности некогерентного рассеяния. Наиболее сильно это проявляется для  $L$ -края. Этот эффект можно наблюдать как по снижению фона обратного рассеяния рентгеновского излучения, так и по уменьшению ореола в угловом распределении прошедшего излучения при просачивании сквозь стенки каналов из легкого материала (майлар, кварц). В случае сильного поглощения (никель)

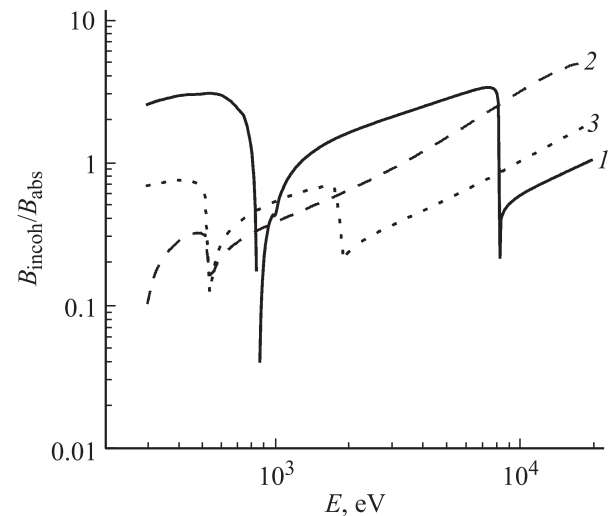
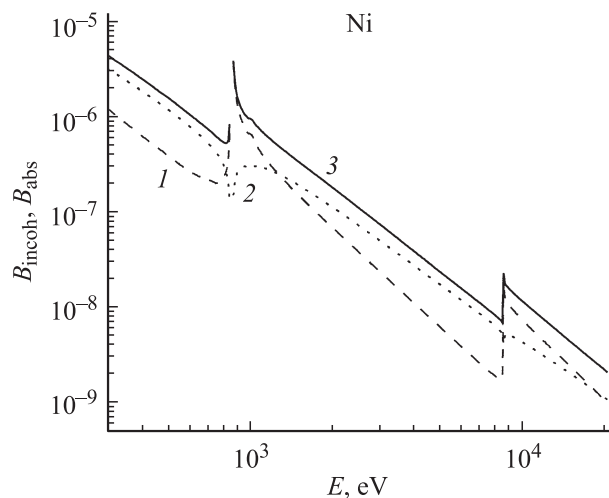


Рис. 2. Зависимость отношения вкладов некогерентного рассеяния и поглощения в ослабление рентгеновского пучка от энергии излучения для каналов из никеля (кривая 1), майлара (2) и кварца (3). Амплитуда шероховатостей равна 5 nm, корреляционная длина  $1 \mu\text{m}$ .



**Рис. 3.** Ослабление пучка в канале Ni вблизи края поглощения за счет поглощения на стенках  $B_{\text{abs}}$  (1), некогерентного рассеяния  $B_{\text{inc}}$  (2) и общего затухания излучения  $B_{\text{abs}} + B_{\text{incoh}}$  (3) в зависимости от энергии излучения. Амплитуда шероховатостей поверхности  $\sigma = 5 \text{ nm}$ ,  $l_{\text{corr}} = 1 \mu\text{m}$ .

оптимальную длину канала  $L$  для наблюдения эффекта уменьшения ореола следует выбирать из соотношения

$$\frac{d^3}{8\pi^2 B_{\text{incoh}}} < L < \frac{d^3}{2\pi^2 B_{\text{incoh}}},$$

где  $d$  — ширина плоского канала. Это соответствует расстоянию убывания интенсивности первой моды рентгеновского излучения. В случае двумерного канала оптимальная длина уменьшается приблизительно в 2 раза.

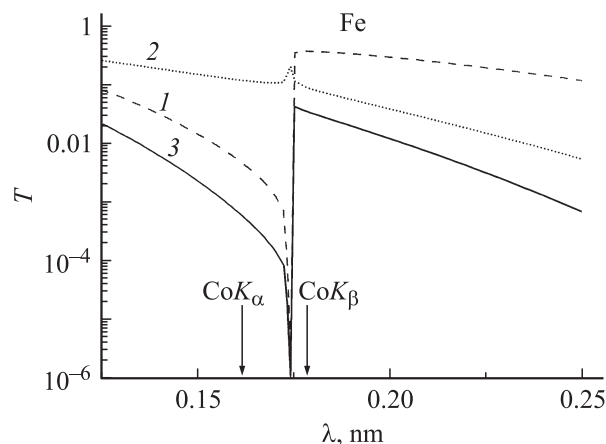
Полученные формулы (10) и (11) могут быть применены для расчетов пропускания излучения через плоскостные фильтры, так называемые „бесщелевые коллиматоры“, образованные двумя плотно прижатыми поверхностями. На рис. 4 показана зависимость пропускания железного бесщелевого коллиматора  $T$  от длины волны рентгеновского излучения. Ширина зазора равна  $d = 100 \text{ nm}$  и длина пластин  $20 \text{ mm}$ . Кривая 1 соответствует пропусканию основной моды в случае гладких стенок, кривая 2 (пунктирная) соответствует ослаблению пучка за счет некогерентного рассеяния. Суммарный эффект ослабления пучка показан сплошной кривой 3. Вертикальные линии показывают положение линий рентгеновской трубки с кобальтовым анодом  $\text{Co}K_{\alpha}$  и  $\text{Co}K_{\beta}$ .

Эффективность фильтрации излучения линии  $\text{Co}K_{\beta}$  показана на рис. 5. Кривые 1 и 2 соответствуют пропусканию линий  $\text{Co}K_{\alpha}$  и  $\text{Co}K_{\beta}$  через железный фильтр с шириной зазора  $d = 100 \text{ nm}$  и длиной пластин  $20 \text{ mm}$ . Корреляционная длина взята равной  $l_{\text{corr}} = 100 \text{ nm}$ . Отношение пропускания коллиматором линий  $\text{Co}K_{\alpha}$  и  $\text{Co}K_{\beta}$  показано кривой 3.

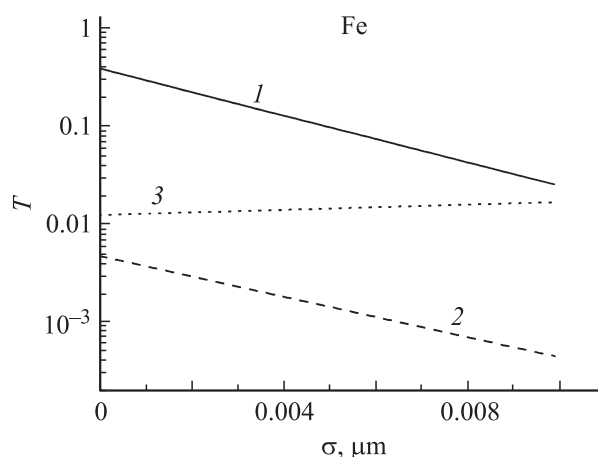
Из рис. 4 и 5 видно, что наличие шероховатостей не только приводит к уменьшению пропускания излучения

через коллиматор, но и ухудшает селекцию рентгеновских линий.

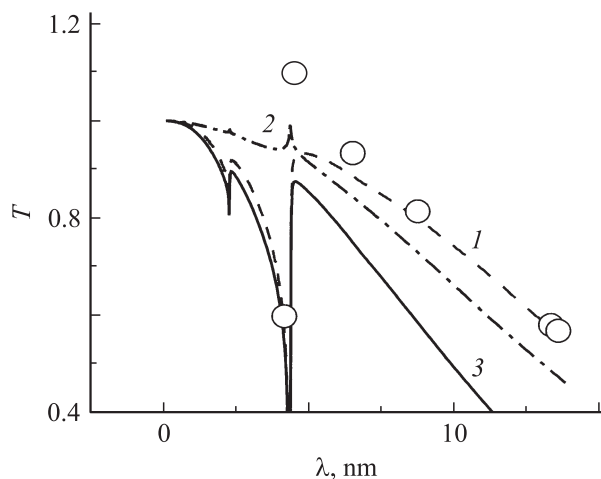
Оценка прохождения излучения через трековые каналы в мембранах из майлара толщиной  $L = 22.5 \mu\text{m}$  и диаметром  $D = 200 \text{ nm}$  приводится на рис. 6. Учет геометрического фактора двумерности канала в расчетах пропускания основной моды  $T_2$  производился возведением в квадрат пропускания одномерного канала  $T_2 = (T_1)^2$ . Полученная таким образом оценка  $T_2$  при учете только поглощения для гладких стенок трековых каналов приведена кривой 1. Кривая 2 соответствует ослаблению за счет некогерентного рассеяния для амплитуды шероховатостей  $\sigma = 10 \text{ nm}$  при корреляции-



**Рис. 4.** Пропускание основной моды излучения  $T$  через бесщелевой коллиматор из железных пластин с шириной зазора  $100 \text{ nm}$  и длиной пластин  $2 \text{ cm}$  в зависимости от длины волны. Пропускание без учета рассеяния — 1, при некогерентном рассеянии без поглощения — 2, суммарный эффект — 3. Среднеквадратичная высота шероховатостей  $\sigma = 30 \text{ nm}$ , длина корреляции  $l_{\text{corr}} = 30 \text{ nm}$ .



**Рис. 5.** Пропускание  $T$  через железный бесщелевой коллиматор излучения кобальта  $\text{Co}K_{\alpha}$  ( $\lambda = 0.1787 \text{ nm}$ , кривая 1) и  $\text{Co}K_{\beta}$  ( $\lambda = 0.161748 \text{ nm}$ , 2) в зависимости от высоты шероховатостей  $\sigma$ . Корреляционная длина равна  $l_{\text{corr}} = 100 \text{ nm}$ . Отношение пропускания линий  $\text{Co}K_{\alpha}$  и  $\text{Co}K_{\beta}$  от амплитуды шероховатостей показано кривой 3.



**Рис. 6.** Зависимость пропускания  $T$  от длины волны излучения при ослаблении рентгеновского пучка за счет поглощения (1), некогерентного рассеяния (2) в трековых каналах из майлара и суммарный эффект ослабления (3). Амплитуда шероховатостей равна 10 nm, корреляционная длина 0.1  $\mu\text{m}$ . Кружками показаны результаты расчетов пропускания для гладких каналов в приближении параболического уравнения [11]. Диаметр канала равен 200 nm, длина  $L = 22.5 \mu\text{m}$ .

онной длине  $l_{\text{сорт}} = 100 \text{ nm}$ . Суммарный эффект поглощения и некогерентного рассеяния показан сплошной кривой 3. Кружками приводятся результаты расчетов в квазиоптическом приближении при численном решении параболического уравнения для гладких круглых каналов [12]. Результаты расчетов пропускания излучения по ослаблению основной волноводной моды согласуются как с расчетами в квазиоптическом приближении [2,12], так и с оценками в приближении геометрической оптики для гладких каналов [12]. Учет влияния шероховатостей на прохождение излучения через узкие каналы и эффективность спектральной селекции в таких каналах выполнен впервые.

## Выводы

Несмотря на то что в случае малых энергий излучения вклад рассеяния в ослабление пучка уменьшается, рассеяние на шероховатостях остается важным фактором, влияющим на распространение рентгеновского излучения через узкие каналы. Вблизи краев поглощения рентгеновского излучения происходит существенное снижение некогерентного рассеяния, которое может приводить к уменьшению ореола в угловом распределении прошедшего излучения через рентгеновский волновод. Оптимальная длина канала для наблюдения эффекта примерно соответствует длине затухания интенсивности первой волноводной моды.

Влияние шероховатостей приводит не только к уменьшению пропускания излучения дифракционными фильтрами, но и к ухудшению селективности фильтрации

излучения. Благодаря полученным аналитическим выражениям для коэффициентов затухания волноводных мод результаты могут быть обобщены на коллиматоры с различными характеристиками поверхностей.

Работа проведена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям РФ в рамках реализации ФЦП „Научные и педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2012.

## Список литературы

- [1] Vincze L., Janssens K., Adams F., Rindby A. // X-ray Spectrometry. 1995. Vol. 24. P. 27.
- [2] Митрофанов А.В., Апель П.Ю. // Изв. РАН. Сер. физ. 2009. Т.73. № 1. С. 61.
- [3] Виноградов А.В., Ковалев В.Ф., Кожевников И.В., Пустовалов В.В. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 2. С. 244.
- [4] Бушуев В.А., Рошупкина О.Д. // Изв. РАН. Сер. физ. 2007. Т. 71. № 1. С. 61.
- [5] Боброва Т.А., Огнев Л.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 6. С. 52.
- [6] Боброва Т.А., Огнев Л.И. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 23. С. 1.
- [7] Огнев Л.И. Оптимизация компактного коллиматора Соллера. Препринт ИАЭ-6501/14. М., 2007.
- [8] Pelliccia D., Bukreeva I., Ilie M., Jark W., Cedola A., Scarinci F., Lagomarsino S. // Spectrochimica Acta. Part B. 2007. Vol. 62. P. 615.
- [9] Блохин А.М. Физика рентгеновских лучей. М.: Гос. изд. техн.-теор. литер., 1957. 518 с.
- [10] Виноградов А.В., Зорев Н.Н., Кожевников И.В., Сагитов С.И., Турьянский А.Г. // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 8. С. 203.
- [11] Hehke B.L., Gullikson E.M., Davis J.C. // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1993. Vol. 54. N 2. P. 181.
- [12] Митрофанов А.В., Попов А.В. // Тр. XIII Междунар. симп. „Нанопизика и наноэлектроника“. Нижний Новгород, 2009. С. 204.