

01;03

Асимптотическое исследование нелинейных неосесимметричных волн на поверхности незаряженной диэлектрической струи в продольном электростатическом поле

© А.И. Григорьев, Н.В. Воронина, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 28 сентября 2009 г. В окончательной редакции 25 февраля 2010 г.)

В асимптотической аналитической процедуре второго порядка малости по отношению амплитуды волны к радиусу струи найдено решение задачи о расчете волнового движения конечной амплитуды на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле, коллинеарном оси невозмущенной струи. Нелинейные поправки к профилю струи, потенциалу поля скоростей и электростатическим потенциалам внутри и вне струи имеют резонансный характер. В вырожденном резонансном взаимодействии между волной, определяющей начальную деформацию, и волнами, возбуждающимися за счет нелинейности уравнений гидродинамики, могут участвовать волны с различной симметрией (с различными азимутальными числами).

Введение

Исследование физических закономерностей распада на капли струй жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями феномена [1–4]. В этой связи капиллярный распад струй достаточно подробно исследован экспериментально и теоретически в различных внешних условиях. В практических приложениях чаще всего используется электростатический распад струй (как вынужденный [2], так и спонтанный [3]), когда между струей и неким противоэлектродом создается электрическое поле, а образующиеся капли несут электрический заряд. Наличие электрического поля приводит к заметному усложнению феноменологии распада струи: в экспериментах обнаружено более десятка различных режимов электродиспергирования [3,5].

В проведенных исследованиях выяснилось, что влияние электрического поля на закономерности распада струи существенно различается в зависимости от геометрии поля: радиальное поле приводит к дестабилизации струи [1–3], а продольное — к повышению ее устойчивости [1,6–8]. Закономерности влияния радиального электрического поля на устойчивость волнового движения на поверхности струи весьма детально исследованы теоретически как в линейном, так и в нелинейном подходах [1–4,9–13]. Что касается роли продольного электрического поля в устойчивости волнового движения на поверхности струи, то все проведенные к настоящему времени теоретические исследования выполнены лишь в линейном приближении [1,6–8,14,15]. Устранить указанный пробел и должна настоящая работа.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую струю радиусом R идеальной несжимаемой жидкости с массовой

плотностью ρ , диэлектрической проницаемостью ε_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения σ , движущуюся со скоростью U_0 коллинеарно оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности струи. Примем, что струя находится в среде с очень малой плотностью $\rho_{ex} = 0$ и диэлектрической проницаемостью ε_{ex} . В струе и окружающем ее пространстве имеется продольное электрическое поле напряженностью F_0 , коллинеарное оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности струи.

Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U_0 . В указанной системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $U(\mathbf{r}, t)$ полностью определится капиллярными волнами, бегущими по ее поверхности. В безразмерной записи амплитуда поля скоростей будет величиной того же порядка малости, что и амплитуда волн на поверхности струи, которая принимается много меньшей радиуса.

Будем исследовать закономерности реализации капиллярного волнового движения конечной амплитуды на поверхности струи в описанной физической системе. Расчеты проведем в цилиндрической системе координат r, z, φ , орт \mathbf{n}_z которой совпадает по направлению с U_0 . Тогда уравнение поверхности цилиндрической струи, возмущенной волновым движением, запишется в виде

$$r(z, \varphi, t) = R + \xi(z, \varphi, t), \quad |\xi|/R \leq 1,$$

где $\xi(z, \varphi, t)$ — волновое возмущение цилиндрической поверхности струи, t — время.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи в рамках модели потенциального течения состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской)

$$\nabla U = 0, \quad \Delta \Phi_{in} = 0, \quad \Delta \Phi_{ex} = 0; \quad (1)$$

условий ограниченности:

$$r \rightarrow 0: |\mathbf{U}| < \infty, |\Phi_{\text{in}}| < \infty, \quad r \rightarrow \infty: |\Phi_{\text{ex}}| < \infty; \quad (2)$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи $r = R + \xi$:

кинематического

$$-\partial_t \xi + (\nabla \Psi) \nabla [r - (R + \xi(z, \varphi, t))] = 0; \quad (3)$$

динамического для нормальной компоненты тензора напряжений

$$-P(\mathbf{r}, t) + P_0 + P_\sigma - P_e = 0; \quad (4)$$

граничных условий для электрического поля

$$r = R + \xi: \quad \varepsilon_{\text{in}}(\mathbf{n} \nabla \Phi_{\text{in}}) = \varepsilon_{\text{ex}}(\mathbf{n} \nabla \Phi_{\text{ex}}), \\ (\boldsymbol{\tau}_\varphi \nabla \Phi_{\text{in}}) = (\boldsymbol{\tau}_\varphi \nabla \Phi_{\text{ex}}), \quad (\boldsymbol{\tau}_z \nabla \Phi_{\text{in}}) = (\boldsymbol{\tau}_z \nabla \Phi_{\text{ex}}). \quad (5)$$

В выписанной математической формулировке задачи $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей;

$$P(\mathbf{r}, t) = -\rho \left[\partial_t \Psi + \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 \right] + P_0^{(\text{in})}$$

— гидродинамическое давление; $P_e(\mathbf{r}, t)$ — давление электрического поля; $P_\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma \nabla \mathbf{n}$ — давление сил поверхностного натяжения; P_0 — постоянное давление внешней среды; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — электростатический потенциал; индексы „ex“ и „in“ характеризуют электростатическое поле вне и внутри струи соответственно; $P_0^{(\text{in})}$ — постоянное давление внутри равновесной цилиндрической струи, не возмущенной волновым движением \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}_\varphi$, $\boldsymbol{\tau}_z$ — орты нормали и касательных к свободной поверхности струи (см. Приложение А).

Выписанную краевую задачу следует дополнить условием сохранения объема участка струи, длина которого равна длине волны λ

$$\int_V r dr dz d\varphi dt = \pi R^2 \lambda, \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq R + \xi(z, \varphi, t), \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме того, необходимо задать еще начальные условия, первое из которых представляет собой начальную деформацию невозмущенной цилиндрической поверхности струи:

$$r(z, \varphi, 0) = R + \varepsilon [\xi^{(+)}(0) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(0) \exp(-im\varphi)] \exp(ikz) + 0(\varepsilon^2).$$

Здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Для простоты нижеследующих расчетов ограничимся рассмотрением случая, когда форма поперечного сечения струи определяется одной гармоникой. Второе начальное условие обычно выбирается на финальной стадии решения таким образом, чтобы получающееся решение приняло наиболее простой вид [9–13].

Для упрощения дальнейших расчетов перейдем к безразмерным переменным, полагая $R = \sigma = \rho = 1$ и сохраняя за всеми величинами их прежние обозначения.

2. Метод решения

Решение сформулированной задачи будем искать в асимптотическом виде путем разложения по малому параметру ε , который имеет смысл безразмерной амплитуды волны (отношение амплитуды волны к радиусу струи). Само решение будем искать методом многих временных масштабов, ограничиваясь точностью до второго порядка малости по ε включительно. Искомые функции $\xi(z, \varphi, t)$, $\Psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t)$ представим в виде асимптотических разложений по степеням ε , полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется двумя временными масштабами — основным $T_0 = t$ и более медленным $T_1 = \varepsilon t$:

$$\xi(z, \varphi, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(z, \varphi, T_0) + 0(\varepsilon^3); \\ \Psi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \Psi^{(1)}(r, z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \Psi^{(2)}(r, z, \varphi, T_0) + 0(\varepsilon^3); \\ \Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\text{in}}^{(0)}(z) + \varepsilon \Phi_{\text{in}}^{(1)}(r, z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \Phi_{\text{in}}^{(2)}(r, z, \varphi, T_0) + 0(\varepsilon^3); \\ \Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\text{ex}}^{(0)}(z) + \varepsilon \Phi_{\text{ex}}^{(1)}(r, z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \Phi_{\text{ex}}^{(2)}(r, z, \varphi, T_0) + 0(\varepsilon^3). \quad (7)$$

Учтем, что волны, распространяющиеся по поверхности струи, бегут в положительном направлении оси OZ , и примем, что форма свободной поверхности струи в произвольный момент времени имеет следующий вид:

$$r = 1 + \varepsilon [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) + 0(\varepsilon^2), \quad (8)$$

где $\omega \equiv \omega_m(k)$ — частота волны начального возмущения с волновым числом k и азимутальным числом m ; $\theta \equiv kz - \omega T_0$; $\xi^{(\pm)}(T_1)$ — неизвестные амплитудные комплекснозначные функции, зависящие от медленного времени T_1 .

3. Описание процедуры отыскания решения

Подстановка разложений (7) в уравнения (1)–(6), использование оператора $\partial_t = \partial_{T_0} + \varepsilon \partial_{T_1}$ для вычисления производной по времени и разложение условий (3)–(6) в ряд Тейлора в окрестности невозмущенной цилиндрической поверхности $r = 1$ с последующим выделением и суммированием слагаемых при одинаковых степенях ε с приравниванием их к нулю позволяют получить задачи различных порядков малости.

3.1. Задача нулевого порядка малости

В нулевом приближении по ε имеем состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб жидкости.

Равновесный перепад давлений и электрическое поле внутри и вне невозмущенной струи определяются выражениями

$$P_0^{(in)} - P_0 = 1 - (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})(E_0^2/8\pi);$$

$$\Phi_{in}^{(0)} = \Phi_{ex}^{(0)} = -E_0 z.$$

3.2. Задача первого порядка малости

Математическая формулировка задачи первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\Psi^{(1)} = 0; \quad \Delta\Phi_{in}^{(1)} = 0; \quad \Delta\Phi_{ex}^{(1)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \Psi^{(1)} = \text{const}, \quad \Phi_{in}^{(1)} = \text{const};$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_{ex}^{(1)} = \text{const};$$

$$r = 1: \quad -\partial_{T_0}\xi^{(1)} + \partial_r\Psi^{(1)} = 0;$$

$$-\partial_{T_0}\Psi^{(1)} + \frac{\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}}{4\pi} \partial_z \Phi_{ex}^{(0)} \partial_z \Phi_{ex}^{(1)} + \xi^{(1)} + \partial_{\varphi\varphi}\xi^{(1)} + \partial_{zz}\xi^{(1)} = 0;$$

$$\varepsilon_{in}(\partial_r \Phi_{in}^{(1)} - \partial_z \Phi_{in}^{(0)} \partial_z \xi^{(1)}) = \varepsilon_{ex}(\partial_r \Phi_{ex}^{(1)} - \partial_z \Phi_{ex}^{(0)} \partial_z \xi^{(1)});$$

$$\partial_z \Phi_{in}^{(1)} = \partial_z \Phi_{ex}^{(1)}; \quad \partial_\varphi \Phi_{in}^{(1)} = \partial_\varphi \Phi_{ex}^{(1)};$$

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \xi^{(1)}(\varphi, z, t) d\varphi dt = 0.$$

На основании (7) и (8) для профиля волны в первом порядке малости $\xi^{(1)}(z, \varphi, T_0, T_1)$ получим выражение

$$\xi^{(1)} = [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta). \quad (9)$$

Явный вид функций $\xi^{(\pm)}(T_1)$ может быть определен лишь в следующем порядке малости. Несложно видеть, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (9) удовлетворяет условию неизменности объема (6).

Принимая во внимание, что в первом порядке малости потенциал поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатические потенциалы $\Phi_{in}^{(1)}$ и $\Phi_{ex}^{(1)}$ связаны с функцией $\xi^{(1)}$ кинематическим граничным условием и граничными условиями для электрического поля, будем искать выражения для $\Psi^{(1)}$, $\Phi_{in}^{(1)}$ и $\Phi_{ex}^{(1)}$ методом разделения переменных, представив их в виде

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = I_m(kr) [B^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + B^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta);$$

$$\Phi_{in}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = I_m(kr) [C^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + C^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta);$$

$$\Phi_{ex}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = K_m(kr) [D^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + D^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta), \quad (10)$$

где зависимость функций $\Psi^{(1)}$, $\Phi_{in}^{(1)}$ и $\Phi_{ex}^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа и должна удовлетворять условиям ограниченности. Подставив (9) и (10) в граничные условия и приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим:

$$B^{(\pm)}(T_1) = \frac{-i\omega\xi^{(\pm)}(T_1)}{kI'_m(k)}, \quad C^{(\pm)}(T_1) = \frac{ig\xi^{(\pm)}(T_1)}{I_m(k)};$$

$$D^{(\pm)}(T_1) = \frac{ig\xi^{(\pm)}(T_1)}{K_m(k)};$$

$$g \equiv \frac{-E_0(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})k}{\varepsilon_{in}G_m(k) - \varepsilon_{ex}H_m(k)}; \quad G_m(x) \equiv \frac{xI'_m(x)}{I_m(x)};$$

$$H_m(x) \equiv \frac{xK'_m(x)}{K_m(x)},$$

где $I_m(x)$ и $K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; штрихами обозначены производные функций Бесселя по их аргументу.

В итоге выражения для решений первого порядка малости принимают следующий вид:

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = \frac{-i\omega I_m(kr)}{kI'_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta);$$

$$\Phi_{in}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = ig \frac{I_m(kr)}{I_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta);$$

$$\Phi_{ex}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = ig \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} [\xi^{(+)}(T_1) \exp(im\varphi) + \xi^{(-)}(T_1) \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta). \quad (11)$$

Динамическое граничное условие, после подстановки в него (9) и (11), позволяет отыскать дисперсионное уравнение задачи, связывающее волновое число k и азимутальное число m с частотой колебаний $\omega_m(k)$:

$$\omega_m^2(k) = G_m(k) \left[k^{(2)} + m^2 - 1 + w \frac{k^2(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2}{\varepsilon_{in}G_m(k) - \varepsilon_{ex}H_m(k)} \right];$$

$$w \equiv \frac{E_0^2}{4\pi}. \quad (12)$$

3.3. Задача второго порядка малости

Математическая формулировка задачи второго порядка малости имеет вид

$$\Delta\Psi^{(2)} = 0; \quad \Delta\Phi_{in}^{(2)} = 0; \quad \Delta\Phi_{ex}^{(2)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \Psi^{(2)} = \text{const}; \quad \Phi_{in}^{(2)} = \text{const};$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_{ex}^{(2)} = \text{const};$$

$$\begin{aligned}
 r = 1 : \quad & \partial_r \Psi^{(2)} - \partial_{T_0} \xi^{(2)} = \partial_{T_1} \xi^{(1)} - \xi^{(1)} \partial_{rr} \Psi^{(1)} \\
 & + \partial_{\varphi} \xi^{(1)} \partial_{\varphi} \Psi^{(1)} + \partial_z \xi^{(1)} \partial_z \Psi^{(1)}; \\
 \frac{\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}}{4\pi} \partial_z \Phi_{ex}^{(0)} \partial_z \Phi_{ex}^{(2)} + \xi^{(2)} + \partial_{\varphi\varphi} \xi^{(2)} + \partial_{zz} \xi^{(2)} - \partial_{T_0} \Psi^{(2)} \\
 = & \frac{1}{2} (\partial_{\varphi} \xi^{(1)})^2 + (\xi^{(1)})^2 + 2\xi^{(1)} \partial_{\varphi\varphi} \xi^{(1)} + \partial_{T_1} \Psi^{(1)} \\
 & + \xi^{(1)} \partial_{T_0, r} \Psi^{(1)} + 0.5 [(\partial_r \Psi^{(1)})^2 + (\partial_{\varphi} \Psi^{(1)})^2 + (\partial_z \Psi^{(1)})^2] \\
 & - \frac{\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}}{8\pi} \left\{ (\partial_r \Phi_{ex}^{(1)})^2 + (\partial_{\varphi} \Phi_{ex}^{(1)})^2 + (\partial_z \Phi_{ex}^{(1)})^2 \right. \\
 & + 2\xi^{(1)} \partial_z \Phi_{ex}^{(0)} \partial_{rz} \Phi_{ex}^{(1)} - \left(1 - \frac{\varepsilon_{ex}}{\varepsilon_{in}} \right) [(\partial_r \Phi_{ex}^{(1)})^2 \\
 & + (\partial_z \Phi_{ex}^{(0)})^2 (\partial_z \xi^{(1)})^2 - 2\partial_z \xi^{(1)} \partial_z \Phi_{ex}^{(0)} \partial_r \Phi_{ex}^{(1)}] \left. \right\} - \frac{1}{2} (\partial_z \xi^{(1)})^2; \\
 \varepsilon_{in} \partial_r \Phi_{in}^{(2)} - \varepsilon_{ex} \partial_r \Phi_{ex}^{(2)} - (\varepsilon_{in} \partial_z \Phi_{in}^{(0)} - \varepsilon_{ex} \partial_z \Phi_{ex}^{(0)}) \partial_z \xi^{(2)} \\
 = & - (\varepsilon_{in} \partial_{rr} \Phi_{in}^{(1)} - \varepsilon_{ex} \partial_{rr} \Phi_{ex}^{(1)}) \xi^{(1)} \\
 & + (\varepsilon_{in} \partial_z \Phi_{in}^{(1)} - \varepsilon_{ex} \partial_z \Phi_{ex}^{(1)}) \partial_z \xi^{(1)} \\
 & + (\varepsilon_{in} \partial_{\varphi} \Phi_{in}^{(1)} - \varepsilon_{ex} \partial_{\varphi} \Phi_{ex}^{(1)}) \partial_{\varphi} \xi^{(1)}; \\
 \partial_z \Phi_{in}^{(2)} - \partial_z \Phi_{ex}^{(2)} = & - (\partial_{rz} \Phi_{in}^{(1)} - \partial_{rz} \Phi_{ex}^{(1)}) \xi^{(1)} \\
 & - (\partial_r \Phi_{in}^{(1)} - \partial_r \Phi_{ex}^{(1)}) \partial_z \xi^{(1)} \\
 & + (1/2) (\partial_z \Phi_{in}^{(0)} - \partial_z \Phi_{ex}^{(0)}) (\partial_z \xi^{(1)})^2; \\
 \partial_{\varphi} \Phi_{in}^{(2)} - \partial_{\varphi} \Phi_{ex}^{(2)} = & - \left(\partial_r \frac{\partial_{\varphi} \Phi_{in}^{(1)}}{r} - \partial_r \frac{\partial_{\varphi} \Phi_{ex}^{(1)}}{r} \right) \xi^{(1)} \\
 & - (\partial_r \Phi_{in}^{(1)} - \partial_r \Phi_{ex}^{(1)}) \partial_{\varphi} \xi^{(1)}; \\
 \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} & [\xi^{(2)} + (1/2) (\xi^{(1)})^2] d\varphi dt = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, во втором порядке малости по ε имеем неоднородные уравнения для отыскания поправок второго порядка малости $\xi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$, $\Phi_{in}^{(2)}$ и $\Phi_{ex}^{(2)}$. Правые части этих уравнений играют роль функций неоднородности и выражаются через решения нулевого и первого порядков малости. На основании вида неоднородностей в рамках метода разделения переменных аналитические выражения для поправок второго порядка малости естественно искать в виде

$$\begin{aligned}
 \xi^{(2)}(\mathbf{r}, t) \\
 = & [A_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) + A_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi) + A_{02}] \exp(i2\theta) \\
 & + A_{00} + [A_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) + A_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta) \\
 & + A_{02} \exp(i2m\varphi);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & I_{2m}(2kr) \\
 & \times [B_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) + B_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi)] \exp(i2\theta) \\
 & + I_0(2kr) B_{02} \exp(i2\theta) + r^{2m} B_{20} \exp(i2m\varphi) + B_{00}(t) \\
 & + I_m(kr) [B_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) + B_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta); \\
 \Phi_{in}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & I_{2m}(2kr) \\
 & \times [C_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) + C_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi)] \exp(i2\theta) \\
 & + I_0(2kr) C_{02} \exp(i2\theta) + r^{2m} C_{20} \exp(i2m\varphi) + C_{00}(t) \\
 & + I_m(kr) [C_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) + C_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta); \\
 \Phi_{ex}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = & K_{2m}(2kr) \\
 & \times [D_{22}^{(+)} \exp(i2m\varphi) + D_{22}^{(-)} \exp(-i2m\varphi)] \exp(i2\theta) \\
 & + K_0(2kr) D_{02} \exp(i2\theta) + r^{-2m} D_{20} \exp(i2m\varphi) + \ln r D_{00} \\
 & + K_m(kr) [D_{11}^{(+)} \exp(im\varphi) + D_{11}^{(-)} \exp(-im\varphi)] \exp(i\theta). \tag{13}
 \end{aligned}$$

Зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(2)}$, $\Phi_{in}^{(2)}$ и $\Phi_{ex}^{(2)}$ в (13) от радиальной переменной r , так же как и в задаче первого порядка малости, несложно получить из уравнений Лапласа с учетом условий ограниченности. После подстановки выражений (13) в граничные условия и приравнивая коэффициентов при экспонентах с одинаковыми показателями, получим систему уравнений для отыскания $A_{nl}^{(\pm)}$, $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$, $n, l = \{0; 2\}$. Решив эту систему уравнений, находим зависимость $A_{nl}^{(\pm)}$ от комплексных амплитуд $\xi^{(\pm)}$, а также дифференциальное уравнение для отыскания $\xi^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned}
 \partial_{T_1} \xi^{(\pm)} = 0, \quad A_{00} = & - (|\xi^{(+)}|^2 + |\xi^{(-)}|^2) / 2; \quad A_{11}^{(\pm)} = 0; \\
 A_{22}^{(\pm)} = & a_1 (\xi^{(\pm)})^2; \quad A_{02} = a_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)}; \\
 A_{20} = & a_3 2\xi^{(+)} \overline{\xi^{(-)}}, \tag{14}
 \end{aligned}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Выражения для коэффициентов a_1, a_2 и a_3 приведены в „Приложении В“.

Из уравнения (14) следует, что комплексные амплитуды $\xi^{(\pm)}$, а следовательно и величины $A_{nl}^{(\pm)}$, $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$, не зависят от временного масштаба T_1 . Коэффициенты $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$ для определения поправок второго порядка малости к потенциалу поля скоростей и электростатическим потенциалам внутри и вне струи соответственно можно найти, зная a_i , в виде

$$\begin{aligned}
 B_{22}^{(\pm)} \equiv & ib_1 (\xi^{(\pm)})^2 = \frac{-i}{2kI'_{2m}(2k)} (2\omega a_1 - X_1) (\xi^{(\pm)})^2; \\
 B_{00}(t) = & 2b_0 A_{00} T_0; \\
 B_{02} = & -ib_2 2\xi^{(+)} \xi^{(-)} = \frac{-i}{2kI'_0(2k)} (2\omega a_2 - X_2) 2\xi^{(+)} \xi^{(-)};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{11}^{(\pm)} &= B_{20} = 0; \\
C_{22}^{(\pm)} &\equiv ic_1(\xi^{(\pm)})^2 \\
&= i \frac{M\varepsilon_{\text{ex}}H_{2m}(2k) + 2L_1 - 4kE_0(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})a_1}{2I_{2m}(2k)f_{2m}(2k)} (\xi^{(\pm)})^2; \\
C_{02}^{(\pm)} &\equiv ic_22\xi^{(+)}\xi^{(-)} \\
&= i \frac{M\varepsilon_{\text{ex}}H_0(2k) + 2L_2 - 4kE_0(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})a_2}{I_0(2k)f_0(2k)} \xi^{(+)}\xi^{(-)}; \\
C_{11}^{(\pm)} &= C_{20} = C_{00} = 0; \quad D_{11}^{(\pm)} = D_{20} = D_{00} = 0; \\
D_{22}^{(\pm)} &\equiv id_1(\xi^{(\pm)})^2 \\
&= i \frac{M\varepsilon_{\text{in}}G_{2m}(2k) + 2L_1 - 4kE_0(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})a_1}{2K_{2m}(2k)f_{2m}(2k)} (\xi^{(\pm)})^2; \\
D_{02}^{(\pm)} &\equiv id_22\xi^{(+)}\xi^{(-)} \\
&= i \frac{M\varepsilon_{\text{in}}G_0(2k) + 2L_2 - 4kE_0(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})a_2}{K_0(2k)f_0(2k)} \xi^{(+)}\xi^{(-)}; \\
L_1 &\equiv g[f_m(k) - 2(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})(k^2 + m^2)]; \\
L_2 &\equiv g[f_m(k) - 2(\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ex}})k^2]; \\
M_m(k) &\equiv 2g[G_m(k) - H_m(k)]; \\
f_m(k) &\equiv \varepsilon_{\text{in}}G_m(k) - \varepsilon_{\text{ex}}H_m(k). \quad (15)
\end{aligned}$$

Все вновь введенные обозначения приведены в „Приложении В“.

Окончательно форма свободной поверхности струи в произвольный момент времени с учетом выражений (8), (13) и (14) будет описываться соотношением

$$\begin{aligned}
r(z, \varphi, t) &= 1 + \varepsilon \cos(m\varphi) \cos(kz - \omega t) \\
&+ 0.25\varepsilon^2 \{ -0.5 + [a_1 \cos(2m\varphi) + a_2] \cos(2(kz - \omega t)) \\
&+ a_3 \cos(2m\varphi) \}, \quad (16)
\end{aligned}$$

а выражения для потенциалов электрического поля внутри и вне струи, а также для гидродинамического потенциала, с учетом выражений (15), примут вид

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \frac{\omega I_m(kr)}{kI_m(k)} \cos(m\varphi) \sin(kz - \omega t) + 0.25\varepsilon^2 \{ -b_0 t \\
&+ [b_1 I_{2m}(2kr) \cos(2m\varphi) + b_2 I_0(2kr)] \sin(2(kz - \omega t)) \}; \\
\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) &= -E_0 z \\
&- \varepsilon \frac{gI_m(kr)}{I_m(k)} \cos(m\varphi) \sin(kz - \omega t) - 0.25\varepsilon^2 \\
&\times [c_1 I_{2m}(2kr) \cos(2m\varphi) + c_2 I_0(2kr)] \sin(2(kz - \omega t)); \\
\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) &= -E_0 z \\
&- \varepsilon \frac{gK_m(kr)}{K_m(k)} \cos(m\varphi) \sin(kz - \omega t) - 0.25\varepsilon^2 \\
&\times [d_1 K_{2m}(2kr) \cos(2m\varphi) + d_2 K_0(2kr)] \sin(2(kz - \omega t)). \quad (17)
\end{aligned}$$

Коэффициенты b_j , d_j и c_j выражаются через a_j соотношениями (15).

4. Обсуждение полученных результатов

На рис. 1–3 представлены зависимости амплитудных коэффициентов a_i , определяющих поправку второго порядка малости к профилю волны, от параметра w , характеризующего внешнее электрическое поле, для различных значений азимутального числа m .

Из (16) и выражений для амплитудных коэффициентов a_1 и a_2 (см. „Приложение В“) в нелинейных поправках к форме струи видно, что они имеют резонансный вид: при выполнении соотношения

$$\omega_{2m}^2(2k) = 4\omega_m^2(k) \quad (18)$$

обращается в нуль знаменатель в коэффициенте a_1 , а при выполнении соотношения

$$\omega_0^2(2k) = 4\omega_m^2(k) \quad (19)$$

обращается в нуль знаменатель в коэффициенте a_2 . В теории нелинейных волн эти обстоятельства интер-

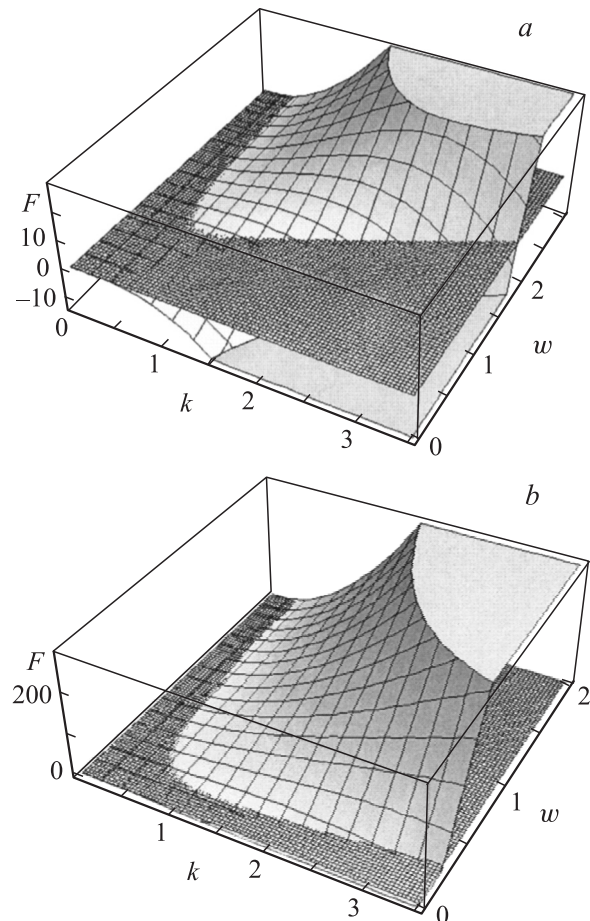


Рис. 1. График зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$ от безразмерного волнового числа k и параметра w , рассчитанный при $m = 0$ и $\varepsilon_{\text{ex}} = 1$, пересеченный плоскостью $F = 0$. На линии пересечения указанных поверхностей реализуется нелинейное резонансное взаимодействие осесимметричных волн с волновыми числами k и $2k$ (коэффициенты a_1 и a_2 становятся бесконечно большими). $a - \varepsilon_{\text{in}} = 5$; $b - 20$.

претируются как наличие нелинейного вырожденного резонансного взаимодействия между волнами первого порядка малости, определяющими начальную деформацию струи, и волнами, возбуждающимися за счет нелинейности уравнений гидродинамики. Резонанс (18) реализуется при произвольном виде волны, определяющей начальную деформацию, и соответствует возбуждению за счет нелинейного взаимодействия волны с вдвое меньшей длиной и вдвое большим азимутальным числом. Резонанс (19) реализуется, когда волна, определяющая начальную деформацию, возбуждает за счет нелинейного взаимодействия осесимметричную ($m = 0$) волну с вдвое меньшей длиной.

На рис. 1 приведен график зависимости

$$F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k),$$

взятой при $m = 0$ (определяющей величину знаменателя в коэффициенте a_1 , а также в коэффициенте a_2 при

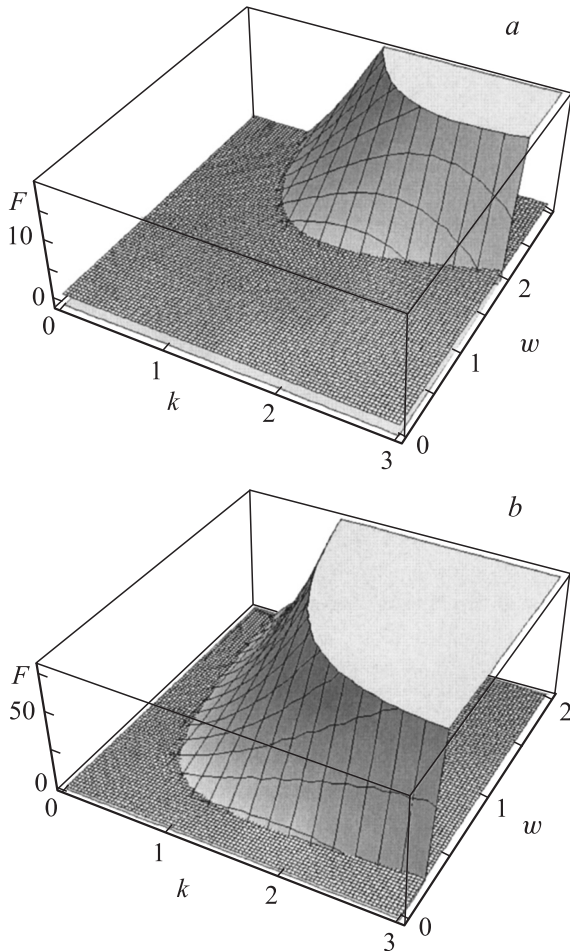


Рис. 2. График зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$ от волнового числа k и параметра w , рассчитанный при $m = 1$ и $\epsilon_{ex} = 1$, пересеченный плоскостью $F = 0$. На линии пересечения указанных поверхностей реализуется нелинейное резонансное взаимодействие неосесимметричных волн: с волновым числом k при $m = 1$ и с волновым числом $2k$ при $m = 2$ (коэффициент a_2 становится бесконечно большим). $a - \epsilon_{in} = 5$; $b - 20$.

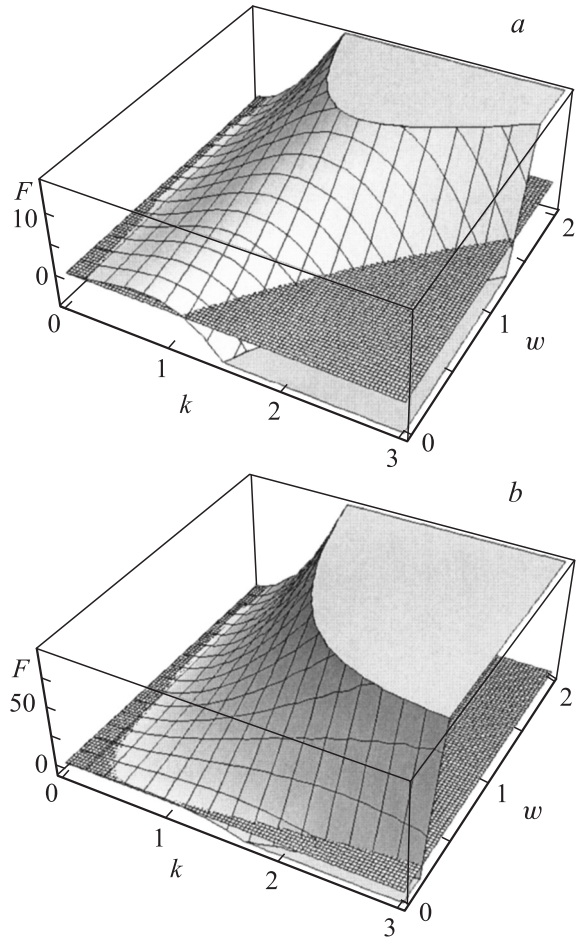


Рис. 3. График зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)$ от волнового числа k и параметра w , рассчитанный при $m = 1$ и $\epsilon_{ex} = 1$, пересеченный плоскостью $F = 0$. На линии пересечения указанных поверхностей реализуется нелинейное резонансное взаимодействие неосесимметричной волны с волновым числом k при $m = 1$ и осесимметричной волны с волновым числом $2k$ при $m = 0$ (коэффициент a_2 становится бесконечно большим). $a - \epsilon_{in} = 5$; $b - 20$.

$m = 0$), от величины волнового числа k и параметра w , пересеченной плоскостью $F = 0$, при двух различных значениях диэлектрической проницаемости жидкости. На кривой

$$f_1(k, w) = 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0,$$

по которой пересекаются эти две поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между двумя осесимметричными модами ($m = 0$) для волн с волновыми числами k и $2k$. Резонансный обмен энергией между двумя осесимметричными волнами разной длины (заданной в начальный момент времени с волновым числом k и волной с вдвое большим волновым числом $2k$, возбуждение которой происходит в результате нелинейного взаимодействия) на стадии дробления струи может привести к образованию „сателлитов“ — капель с размерами, меньшими размеров капель, на которые

разбивается струя при отсутствии возмущающих воздействий [1,2]. Из рис. 1 можно видеть, что указанное взаимодействие имеет место только при $w \neq 0$, причем с увеличением диэлектрической проницаемости струи резонансное взаимодействие может иметь место при меньших значениях w (при меньших значениях напряженности электрического поля).

Резонансный обмен энергией между модами с различной симметрией, согласно расчетам на основе соотношения (18), реализуется аналогично взаимодействию волн с одинаковой симметрией. Так, расчеты по (18) показывают, что резонансная перекачка энергии из заданной в начальный момент времени неосесимметричной моды с $m = 1$ и волновым числом k в неосесимметричную моду с $m = 2$ и с волновым числом $2k$ может реализоваться только при $w \neq 0$. При варьировании диэлектрической проницаемости жидкости струи значение полевого параметра w , при котором реализуется резонансное взаимодействие, также изменяется, как это видно из рис. 2.

Зависимости на рис. 3, просчитанные по соотношению (19), как и на рис. 2, иллюстрируют возможность резонансного обмена между волнами с различной симметрией. Из (19) видно, что возможно резонансное взаимодействие между осесимметричной модой $m = 0$ и заданными в начальный момент времени произвольными неосесимметричными модами с $m \neq 0$. На рис. 3 приведены графики зависимости $F \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)$, рассчитанные при $m = 1$ от величины волнового числа k и параметра w , пересеченные плоскостью $F = 0$. На кривой $f_0(k, w) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) = 0$, по которой пересекаются эти две поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между заданной в начальный момент времени неосесимметричной волной с $m = 1$ и волновым числом k и осесимметричной волной $m = 0$ с волновым числом $2k$. При таком взаимодействии энергия перекачивается из неосесимметричной моды с $m = 1$ к осесимметричной моде с удвоенным волновым числом. Из рис. 3 видно, что такой резонансный обмен энергией может иметь место и при отсутствии на струе электрического заряда (при $w = 0$).

Влияние величины напряженности электрического поля на закономерность реализации резонансного взаимодействия сводится к изменению положений резонансов (к изменению волновых чисел и азимутальных параметров взаимодействующих волн при варьировании w).

Заключение

Найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейном волновом движении на поверхности цилиндрической струи диэлектрической жидкости в коллинеарном оси струи внешнем электростатическом поле. В расчетах второго порядка малости обнаружены вырожденные внутренние нелинейные резонансы, соответствующие обмену энергией как между осесимметричными волнами, заданными в начальный момент времени, и осесимметричными волнами, порождаемыми нелинейностью уравнений гидродинамики, так и между волнами

с различной симметрией. Положения резонансов зависят от диэлектрических проницаемостей жидкости и среды, напряженности электрического поля, отношения плотностей сред и величины межфазного поверхностного натяжения.

Приложение А

Выражения для ортов нормали и касательных \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}_\varphi$, $\boldsymbol{\tau}_z$ к свободной поверхности струи следующие:

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r [1 - (1/2r^2)(\partial_\varphi \xi)^2 - (1/2)(\partial_z \xi)^2] - \mathbf{e}_z (\partial_\varphi \xi) - \mathbf{e}_\varphi (1/r)(\partial_\varphi \xi) + 0(\varepsilon^3);$$

$$\boldsymbol{\tau}_\varphi = \mathbf{e}_r (1/r)(\partial_\varphi \xi) + \mathbf{e}_\varphi [1 - (1/2r^2)(\partial_\varphi \xi)^2] + 0(\varepsilon^3);$$

$$\boldsymbol{\tau}_z = \mathbf{e}_r (\partial_z \xi) + \mathbf{e}_z [1 - (1/2)(\partial_z \xi)^2] - \mathbf{e}_\varphi (1/r)(\partial_\varphi \xi)(\partial_z \xi) + 0(\varepsilon^3).$$

Приложение В

Выражения для коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 следующие:

$$a_1 \equiv P_1/F; \quad F = 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k);$$

$$a_2 \equiv P_2/F_*; \quad F_* = 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k);$$

$$P_1 = Y_1 G_{2m}(2k) + 2\omega X_1$$

$$- \sqrt{w/4\pi k} G_{2m}(2k) (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) (\varepsilon_{in} M G_{2m}(2k) + 2L_1);$$

$$P_2 = Y_2 G_0(2k) + 2\omega X_2$$

$$- \sqrt{w/4\pi k} G_0(2k) (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) (\varepsilon_{in} M G_0(2k) + 2L_2);$$

$$a_3 \equiv Y_3/(1 - 4m^2); \quad b_0 \equiv Y_4 + 0.5;$$

$$X_1 = \omega_m(k) [2(k^2 + m^2) - G_m(k)] / G_m(k);$$

$$X_2 = \omega_m(k) [2k^2 - G_m(k)] / G_m(k);$$

$$Y_1 = 1 + \frac{k^2 - 5m^2}{2} + \frac{\omega^2 [k^2 + m^2 - 3G_m^2(k)]}{2G_m^2(k)}$$

$$- \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} [2kg \sqrt{4\pi w} H_m(k)$$

$$+ (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in}) (k \sqrt{4\pi w} + g H_m(k))^2$$

$$+ g^2 (k^2 + m^2 - H_m^2(k))];$$

$$Y_2 = 1 + \frac{k^2 - 3m^2}{2} + \frac{\omega^2 [k^2 - m^2 - 3G_m^2(k)]}{2G_m^2(k)}$$

$$- \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} [2kg \sqrt{4\pi w} H_m(k)$$

$$+ (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in}) [k \sqrt{4\pi w} + g H_m(k)]^2$$

$$+ g^2 (k^2 - m^2 - H_m^2(k))];$$

$$\begin{aligned}
Y_3 = & 1 - \frac{k^2 + 5m^2}{2} + \frac{\omega^2[k^2 - m^2 - G_m^2(k)]}{2G_m^2(k)} \\
& - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} [2kg\sqrt{4\pi w}H_m(k) \\
& - (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in})(k\sqrt{4\pi w} + gH_m(k))^2 \\
& + g^2(k^2 - m^2 + H_m^2(k))]; \\
Y_4 = & 1 - \frac{k^2 + 3m^2}{2} + \frac{\omega^2[k^2 + m^2 - G_m^2(k)]}{2G_m^2(k)} \\
& - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} [2kg\sqrt{4\pi w}H_m(k) \\
& - (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in})(k\sqrt{4\pi w} + gH_m(k))^2 \\
& + g^2(k^2 + m^2 + H_m^2(k))].
\end{aligned}$$

Работа выполнена в рамках тематического плана университета при поддержке грантов: Рособразования № 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и 09-08-00148.

Список литературы

- [1] Ентов В.М., Ярин А.Л. // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. „Механика жидкости и газа“. 1984. Т. 17. С. 112–197.
- [2] Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Е.В. Аметистов, В.В. Блаженков, А.К. Городов и др. Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
- [3] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [4] Eggers J., Villermaux E. // Rep. Prog. Phys. 2008. N 036 601. P. 79.
- [5] Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. // J. Electrostatics. 1995. Vol. 34. P. 51–59.
- [6] Глонтти Г.А. // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 5. С. 1328–1330.
- [7] Nayyar N.K., Murty G.S. // Proc. Phys. Soc. 1960. Vol. 75. Pt. 3. № 483. P. 369–373.
- [8] Saville D.A. // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 48. N 4. P. 815–827.
- [9] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
- [10] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 31–41.
- [11] Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 46–55.
- [12] Воронина Н.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 6. С. 1–14.
- [13] Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 5. С. 14–29.
- [14] Mestel A.J. // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 312. N 2. P. 311–326.
- [15] Шуттов А.А. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 6. С. 52–67.