

## О левитации диамагнитных тел в магнитном поле

© Ю.М. Урман, Н.А. Бугрова, Н.И. Лапин

Нижегородский государственный педагогический университет,  
603950 Нижний Новгород, Россия  
e-mail: urman37@mail.ru

(Поступило в Редакцию 28 января 2009 г. В окончательной редакции 4 февраля 2010 г.)

Рассматриваются различные методики расчета силовых характеристик подвеса, обеспечивающих левитацию диамагнитных тел различной природы и формы. Методика расчета основана на вычислении энергии взаимодействия тела при смещении относительно центра подвеса с вывешивающим полем произвольной конфигурации. Обсуждается метод квазиоднородного приближения, проводится его сравнение со способом вычисления силовых характеристик по общей формуле вычисления магнитной энергии. Находятся необходимые и достаточные условия консервативной устойчивости состояния равновесия, определяется область устойчивости. Показывается, что область устойчивости зависит от размеров тела. Проводятся конкретные вычисления силовых характеристик подвеса диамагнитного шара. Получены зависимости сил и жесткостей от напряженности магнитного поля, позволяющие рассмотреть вопрос об устойчивом удержании диамагнитного шара в поле системы круговых токов.

### Введение

Диамагнетизм был открыт Майклом Фарадеем в 1846 г. Диамагнетизмом обладает большинство веществ, окружающих нас: вода, дерево, пластик, сыр, уксус, графит и т.д., а также живые существа [1,2]. Основная особенность диамагнитных тел состоит в том, что их магнитная проницаемость меньше единицы и поэтому в магнитном поле они перемещаются в направлении уменьшения напряженности магнитного поля, т.е. выталкиваются из поля. Это свойство диамагнетиков позволяет создать свободный подвес диамагнитных тел в постоянном магнитном поле, т.е. скомпенсировать магнитную и гравитационную силы так, что диамагнитное тело может устойчиво висеть в поле тяжести без контакта. Интересно, что на возможность левитации диамагнитных тел в магнитном поле указал Уильям Томсон (Лорд Кельвин) [3]. Однако ссылаясь на левитацию как на проблему „Гроба Магомета“, он высказал сомнение, что левитация никогда не станет возможной, так как существуют большие трудности создания достаточно сильного магнита и получения достаточно легкого диамагнитного вещества, потому что магнитные силы чрезмерно слабы.

Обычно считают, что проблема свободного подвеса тел восходит к работе С. Ирншоу, доказавшему теорему, согласно которой статическая система, состоящая из тел, притягивающих или отталкивающих друг друга с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними, является неустойчивой. Однако в статье „О природе молекулярных сил, определяющих физическое строение светового эфира“ его не интересовала проблема левитации [4]. Его задача состояла в нахождении природы сил, делающих материю устойчивой. И доказательство сводилось к тому, что материя не может состоять из неподвижных зарядов, связанных

электрическими силами, и должна представлять собой не статистическую, а динамическую систему.

Через сто лет в 1939 г. Браунбек рассмотрел систему, в которой одновременно действуют гравитационное, магнитное и электрическое поля, и доказал, что левитация возможна лишь при наличии тел, изготовленных из материалов с магнитной проницаемостью меньше единицы (диамагнитные и сверхпроводящие тела) [5]. Им же впервые был осуществлен свободный подвес в поле электромагнита ( $B \approx 2-3$  Т) со специальными наконечниками кусочков графита в виде стерженьков размером  $\sim 1$  см и весом до 75 мг.

В 1945 г. В.К. Аркадьев впервые осуществил левитацию сверхпроводящего шара [6]. В дальнейшем подвесом диамагнитных и сверхпроводящих тел в нашей стране в 1980-х гг. в теоретическом аспекте занимались В.М. Позинский [7], Р.В. Линьков и Ю.М. Урман [8-11]. Однако так как в то время не существовало магнитов, создающих постоянные поля значительно большей величины, чем поля, использованные Браунбеком, удавалось вывесить только объекты с магнитной проницаемостью, близкой к магнитной проницаемости графита. В это же время Р.В. Линьков в ряде работ исследовал вопрос о диамагнитной стабилизации постоянного магнита [12,13].

Ситуация изменилась в 1990-х годах, когда были созданы магниты, использующие сверхпроводимость и создающие постоянные поля свыше 20 Т [14-17]. Появилась возможность вывешивать различные материалы, обладающие слабым диамагнетизмом, такие как дерево, пластик, вода, протеин, алмаз, ДНК и многие другие подобные вещества, а также живые существа. Хотя магнитная восприимчивость большинства тел очень мала, для мощных магнитов даже слабых сил достаточно для левитации диамагнитных материалов. Поэтому во всем мире возник интерес к проведению всевозможных экспериментов по свободному подвесу диамагнитных

тел и его использованию в различных областях науки и техники. Левитация предметов в магнитном поле важна для множества практических приложений. Она открывает новые возможности для управления биологическими областями, для сепарации нанотрубок, полимеров, обладающих различной плотностью, выращивания белковых кристаллов  $\sim 1$  см, для синтеза новых материалов и многого другого. Наиболее отличительная черта и преимущество диамагнитной левитации по сравнению с другими известными (или возможными) схемами, включая сверхпроводящую левитацию, есть то, что для однородного материала существуют магнитные поля с определенным профилем квадрата магнитной индукции, когда гравитация скомпенсирована фактически на уровне отдельных атомов и молекул. Это позволяет симулировать состояние невесомости в очень хорошем приближении прямо на Земле, что позволит заменить дорогостоящие эксперименты в космосе более дешевыми.

Эксперименты по вывешиванию слабых диамагнетиков, осуществленные до сих пор, главным образом проводились для подтверждения возможности левитации различных тел и живых существ, а также для наблюдения за их движением или поведением в магнитном поле [18]. Теоретическое исследование динамики диамагнитных тел в поле подвеса почти не проводилось, а если и проводилось, то на уровне простых моделей, основанных на квазиоднородном приближении, что не позволяет учесть форму вывешиваемого тела. Так как интерес к различным применениям диамагнитного подвеса колоссально возрос и с каждым годом будет расти все больше (в настоящее время созданы электромагниты, генерирующие магнитные поля с индукцией  $B \approx 26.8$  Т, и в перспективе разработка магнитов, создающих поля с индукцией  $B \approx 30-50$  Т), появилась настоятельная необходимость в теоретическом осмыслении динамики различных слабых диамагнитных тел в магнитном поле.

На наш взгляд, основные задачи, которые требуют разрешения, следующие.

1. Нахождение оптимальной конфигурации магнитного поля, обеспечивающего максимальную область устойчивости диамагнитного тела в подвесе.

2. Определение необходимых условий устойчивости удержания тела в поле подвеса, его перегрузочной способности, возможности симуляции невесомости.

3. Разработка методов расчета силовых характеристик подвеса, обеспечивающих левитацию тел различной природы и формы.

4. Исследование различных типов эволюционных движений тела в подвесе при учете взаимодействия поля подвеса с телом ротора, что позволяет создать теоретическую базу для применения диамагнитного подвеса при разработке новых приборов в науке и технике.

Целью настоящей работы является разработка методики расчета основных параметров различных конфигураций магнитных полей, силовых и моментных характеристик подвеса, обеспечивающих левитацию тел;

определение области устойчивости, построение и изучение аналитических и численных моделей поведения диамагнитных тел в магнитном поле подвеса. В работе приводятся графические зависимости силовых характеристик от напряженности магнитного поля для различных размеров диамагнитного шара. Рассмотрено влияние размеров шара на условия устойчивого удержания его в поле подвеса.

## 1. Квазиоднородное приближение

Рассмотрим тело, находящееся в неоднородном магнитном поле. Полная магнитная энергия тела в неоднородном поле определяется интегралом [19]

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \mathbf{B}_0 dV, \quad (1.1)$$

где интеграл берется по объему тела,  $\mathbf{J}$  — вектор намагниченности, наведенный полем в теле,  $\mathbf{B}_0$  — индукция магнитного поля, которая была до внесения тела.

Полная сила и момент, действующие на тело в магнитном поле (в пустоте), выражаются следующим образом:

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{J} \nabla) \mathbf{B}_0 dV, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{M} = \int [\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0] dV + \int [\mathbf{r} \times (\mathbf{J} \nabla) \mathbf{B}_0] dV. \quad (1.3)$$

Намагниченность  $\mathbf{J}$  в линейных средах пропорциональна полному полю  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}, \quad (1.4)$$

где  $\chi = \mu/\mu_0 - 1$  — магнитная восприимчивость. Для диамагнитных тел  $\chi < 0$  и очень мала. Вследствие малости магнитной восприимчивости можно в первом приближении пренебречь искажением поля, вызываемым наличием тела, и считать, что намагниченность пропорциональна внешнему магнитному полю  $H_0$ , которое было до внесения тела. Согласно вышесказанному, формулы (1.1)–(1.3) приобретут вид:

$$U = -\frac{\chi \mu_0}{2} \int_V H_0^2 dV, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\chi \mu_0}{2} \int \nabla (H_0^2) dV, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\chi \mu_0}{2} \int [\mathbf{r} \times \nabla (H_0^2)] dV. \quad (1.7)$$

Из формулы для момента следует, что в отличие от магнетика диамагнитное тело в первом приближении не испытывает момента сил в однородном поле, так как первый член в (1.3) пропадает. Для появления момента сил необходима неоднородность поля.

В квазиоднородном поле, которое можно считать постоянным на протяжении размеров тела, в первом

приближении величины, стоящие под знаком интеграла, можно вынести за знак интеграла, тогда будем иметь:

$$U = -\frac{\chi\mu_0}{2} H_0^2 V; \quad \mathbf{F} = \frac{\chi\mu_0}{2} \nabla(H_0^2)V;$$

$$\mathbf{M} = \frac{\chi\mu_0}{2} [\mathbf{r}_c \times \nabla H_0^2]V. \quad (1.8)$$

Для момента сил в формуле (1.8) учтено, что для однородного по плотности тела

$$\int \mathbf{r} dV = \mathbf{r}_c V,$$

где  $\mathbf{r}_c$  — вектор центра масс.

Как видно из формул (1.8), в квазиоднородном случае не учитывается форма тела, так как все величины зависят только от объема  $V$ . Кроме того, момент сил относительно центра масс равен нулю, что, очевидно, не выполняется, если учитывается форма тела.

В состоянии левитации сила тяжести компенсируется силой со стороны магнитного поля. Из равенства двух сил находятся координаты состояния равновесия. Устойчивость состояния равновесия определяется согласно теореме Лагранжа [20], следуя которой потенциальная энергия в состоянии равновесия должна иметь изолированный минимум. Требование минимума выполняется при условии положительной определенности матриц вторых производных функции потенциальной энергии в состоянии равновесия. В дальнейшем будем рассматривать взаимодействие диамагнитных тел с осесимметричным полем.

Известно, что для определения величины осесимметричного поля в любой точке достаточно знать его значение на оси. Представив разложение потенциала поля через цилиндрические координаты  $\rho$ ,  $z$  вблизи его оси и учитывая, что потенциал поля удовлетворяет уравнению Лапласа, получим:

$$\varphi_0 = \psi - \frac{1}{4}\rho^2 \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{1}{64}\rho^4 \frac{d^4\psi}{dz^4} + \dots, \quad (1.9)$$

где  $\psi$  — скалярный потенциал поля на оси.

Тогда компоненты напряженности магнитного поля  $H_z$  и  $H_\rho$  равны

$$H_z = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = -\frac{d\psi}{dz} + \frac{1}{4}\rho^2 \frac{d^3\psi}{dz^3} - \frac{1}{64}\rho^4 \frac{d^5\psi}{dz^5} + \dots, \quad (1.10)$$

$$H_\rho = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial\rho} = \frac{1}{2}\rho \frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{1}{16}\rho^3 \frac{d^4\psi}{dz^4} + \dots \quad (1.11)$$

Если представить выражения (1.10) и (1.11) в терминах магнитного поля

$$\frac{d\psi}{dz} = -H_{0z}$$

( $H_{0z}$  — значение  $z$ -компоненты магнитного поля на оси  $z$ ) и его производных на оси, то с точностью до

второго порядка малости по  $\rho$  включительно получим

$$H_z = H_0 - \frac{1}{4}\rho^2 \frac{d^2 H_{0z}}{dz^2} = H_{0z} - \frac{1}{4}\rho^2 H_{0z}'';$$

$$H_\rho = -\frac{1}{2}\rho \frac{dH_{0z}}{dz} = -\frac{1}{2}\rho H_{0z}'. \quad (1.12)$$

Возведя компоненты  $H_z$ ,  $H_\rho$  в квадрат и сложив их, получим:

$$H_0^2 = H_{0z}^2 - \frac{1}{4} [2H_{0z}H_{0z}'' - (H_{0z}')^2] \rho^2. \quad (1.13)$$

При подстановке выражения (1.13) в (1.8) получим значение потенциальной энергии магнитного поля для квазиоднородного случая

$$U = -\frac{\chi\mu_0 V}{2} \left\{ H_{0z}^2 - \frac{1}{4} [2H_{0z}H_{0z}'' - (H_{0z}')^2] \rho^2 \right\}.$$

Состояние равновесия вычисляется из условия равенства нулю суммы сил, действующих на тело. Значение силы запишем в виде

$$\mathbf{F} = \frac{\chi\mu_0}{2} \nabla \left\{ H_{0z}^2 - \frac{1}{4} [2H_{0z}H_{0z}'' - (H_{0z}')^2] \rho^2 \right\} V.$$

Координаты состояния равновесия будут равны  $\rho = 0$ ,  $z = z_0$ . Разложим потенциальную энергию в ряд по степеням  $z$  и  $\rho$  вблизи состояния равновесия. Это разложение имеет вид

$$U = -\frac{\chi\mu_0 V}{2} \left\{ H_{0z}^2 + 2H_{0z}H_{0z}' + (H_{0z}'^2 + H_{0z}H_{0z}'') z^2 - \frac{1}{4} [2H_{0z}H_{0z}'' - (H_{0z}')^2] \rho^2 + \dots \right\}.$$

Условие положительной определенности матриц вторых производных функции потенциальной энергии в состоянии равновесия запишется в виде

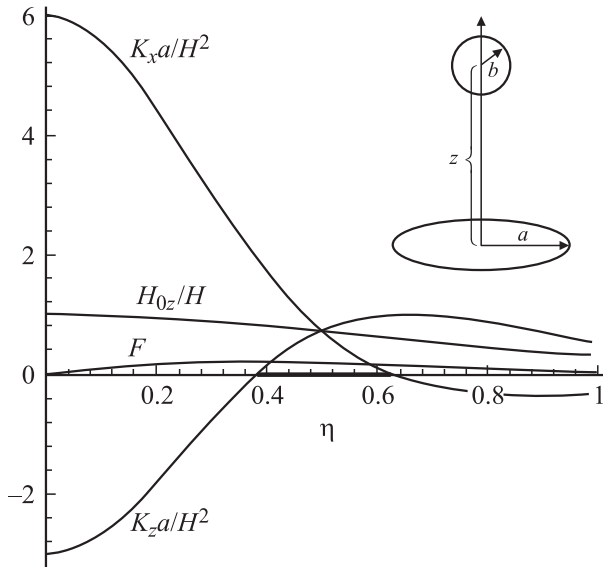
$$K_z = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\chi\mu_0 V [(H_{0z}')^2 + H_{0z}H_{0z}''] > 0,$$

$$K_x = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} = -\frac{\chi\mu_0 V}{4} [(H_{0z}')^2 - 2H_{0z}H_{0z}'] > 0. \quad (1.14)$$

Если условия (1.14) выполняются, то функция энергии магнитного поля для квазиоднородного случая будет определенно-положительна в окрестности состояния равновесия.

Применим эти условия для определения области устойчивости диамагнитного тела в поле витка с током  $I$  и радиусом  $a$ . Магнитное поле, создаваемое таким витком, равно ( $z$  отсчитывается от плоскости витка):

$$H_{0z} = \frac{a^2 I}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{H}{(1 + \eta^2)^{3/2}}, \quad H = \frac{I}{2a}, \quad \eta = \frac{z}{a}, \quad (1.15)$$



**Рис. 1.** Зависимости безразмерной силы, жесткостей и величины магнитного поля от смещения при квазиоднородном приближении.

где  $\eta$  — расстояние от шара до плоскости витка, отнормированного на радиус витка. Отметим, что формула (1.15), определяющая величину поля на оси витка, совпадает с полем толстых соленоидов, у которых радиус соленоида много больше его длины, а также с полем однородно намагниченного диска.

Вычислив  $K_z$  и  $K_x$  по формулам (1.14), получим:

$$\frac{K_z a}{H^2} = \frac{3(7\eta^2 - 1)}{(1 + \eta^2)^5}, \quad \frac{K_x a}{H^2} = \frac{3(2 - 5\eta^2)}{(1 + \eta^2)^5}. \quad (1.16)$$

Область устойчивости, выраженная в исходных координатах, имеет вид  $0.378a < z < 0.632a$ . Вычисленная здесь область устойчивости для диамагнитного тела совпадает с областью устойчивости сверхпроводящего шара малых размеров, найденной в [10].

Зависимость  $K_z a/H^2$ ,  $K_x a/H^2$ ,  $F$ ,  $H_{0z}/H$  от  $\eta$  представлена на рис. 1.

## 2. Влияние формы и размеров диамагнитного тела на область устойчивости

Как уже отмечалось, при квазиоднородном приближении не учитываются форма и размер вывешиваемого тела. Из физических соображений следует, что учет формы и размеров тела должен влиять на состояние равновесия и, кроме того, приводить к моментам сил, которые зависят от формы тела. Еще в статье [5], посвященной экспериментальной проверке возможности левитации кристаллика висмута весом 8 мг и угольной частицы весом 75 мг, Браунбек отмечает, что парящие частицы произвольной формы в большинстве случаев

имели несколько устойчивых положений равновесия и могли часто перескакивать из одного положения в другое. Поэтому в этом разделе будет снято ограничение квазиоднородности и будет использоваться общая формула (1.5) для вычисления энергии магнитного поля.

Пусть некоторое тело произвольной формы находится в магнитном поле. Введем две системы координат.

1) Опорная система координат  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), связанная с источниками магнитного поля,  $O$  — центр этой системы.

2) Система  $Y_i$  с началом в центре масс тела  $O_1$  и параллельная  $X_i$ .

Обозначим через  $\mathbf{r}$  радиус-вектор некоторой точки в системе координат  $X_i$ , а через  $\mathbf{r}'$  — радиус-вектор той же точки в системе координат  $Y_i$ . Пусть  $\mathbf{R}$  — вектор смещения центра масс тела относительно системы координат, связанной с источником поля, тогда  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$ .

Потенциал внешнего поля в окрестности начала координат системы  $X_i$  равен

$$\varphi_0 = \sum_l (a_l \mathfrak{J}_l(\mathbf{r})), \quad (2.1)$$

а в системе координат  $Y_i$  в окрестности точки  $O_1$ :

$$\varphi_0 = \sum_l (c_l \mathfrak{J}_l(\mathbf{r}')), \quad (2.2)$$

где  $\mathfrak{J}_l(\mathbf{r}) = r^l Y_{lm}(\mathbf{e}_r)$  — шаровая функция,  $Y_{lm}(\mathbf{e}_r)$  — сферическая функция (функция направления единичного вектора  $\mathbf{e}_r$ ), определяемая без множителя  $\sqrt{(2l+1)/4\pi}$ . Выражения в круглых скобках в (2.1), (2.2) и в дальнейшем представляют собой скалярные произведения двух неприводимых тензоров, определяемых по правилу [21]:

$$(A_l B_l) = \sum_{l=-m}^{l=m} A_{lm} B_{lm}^* = \sum_{l=-m}^{l=m} (-1)^{-m} A_{lm} B_{lm}.$$

Величины  $c_l$  в (2.1), (2.2) являются функциями от коэффициентов разложения внешнего поля и вектора  $\mathbf{R}$  — смещения тела относительно центра подвеса. Найдем связь между этими величинами. Так как потенциалы (2.1) и (2.2) описывают одну и ту же функцию в разных системах координат, то в некоторой точке  $\mathbf{r}'$ :

$$\sum_l (a_l \mathfrak{J}_l(\mathbf{r}' + \mathbf{R})) = \sum_l (c_l \mathfrak{J}_l(\mathbf{r}')). \quad (2.3)$$

Воспользуемся формулой [9]:

$$\mathfrak{J}_l(\mathbf{r}' + \mathbf{R}) = \sum_{j=Q}^{j=Q} \sqrt{\frac{(2l)!}{(2j)!(2Q)!}} \{ \mathfrak{J}_l(\mathbf{R}) \otimes \mathfrak{J}_Q(\mathbf{r}') \}_l, \quad (2.4)$$

где выражение в фигурных скобках представляет собой тензорное произведение двух неприводимых тензоров индексов „ $J$ “ и „ $Q$ “ [11,20].

Подставив (2.4) в (2.3) и проведя некоторые преобразования, получим:

$$\sum_l \left( \sum_{j=0}^l (-1)^j \sqrt{\frac{(2l+2j+1)!}{(2j)!(2l+1)!}} (\{\mathfrak{J}_j(\mathbf{R}) \otimes a_{l+j}\}_l \mathfrak{J}_l(\mathbf{r}')) \right) = \sum_l (c_l \mathfrak{J}_l(\mathbf{r}')),$$

откуда следует:

$$c_l = \sum_{j=0}^l (-1)^j \sqrt{\frac{(2l+2j+1)!}{(2j)!(2l+1)!}} \{\mathfrak{J}_k(\mathbf{R}) \otimes a_{l+j}\}_l. \quad (2.5)$$

Учитывая, что

$$\nabla(r^l Y_{lm}(\mathbf{e}_r)) = \sqrt{l(2l-1)} r^{l-1} Y_m^{l-1}(\mathbf{e}_r),$$

где

$$Y_{lm}^{l-1}(\mathbf{e}_r) = \{Y_{l-1}(\mathbf{e}_r) \otimes l_1\}_{lm}$$

— шаровой вектор, найдем напряженность магнитного поля в системе  $Y_l$ . Она имеет вид:

$$\mathbf{H}_0 = -\nabla\varphi_0 = -\sum_l \sqrt{l(2l-1)} r^{l-1} (c_l Y_l^{l-1}(\mathbf{e}_r)). \quad (2.6)$$

Выражение для  $H_0^2$  тогда получится в виде:

$$H_0^2 = \sum_{l,l'} \sqrt{l'(2l-1)(2l'-1)} r^{l+l'-2} \times (c_l Y_l^{l-1}(\mathbf{e}_r)) \cdot (c_{l'} Y_{l'}^{l'-1}(\mathbf{e}_r)). \quad (2.7)$$

После ряда преобразований, которые здесь не приводятся, формулу (2.7) можно привести к виду

$$H_0^2 = -\frac{1}{2} \sum_{l,l',L} \sqrt{\frac{(l+l'+L+1)!(l+l'-L)!}{(l+l'+L-1)!(l+l'-L-2)!}} \times C_{l-10'l'-10}^{L0} r^{l+l'-2} (\{c_l \otimes c_{l'}\} Y_L(\mathbf{e}_r)), \quad (2.8)$$

где  $C_{l-10'l'-10}^{L0}$  — коэффициент Клебша–Гордана [21].

Подставив выражение (2.8) в интеграл (1.5), получим потенциальную энергию произвольного по форме и размеру диамагнитного тела в магнитном поле:

$$U = \frac{\chi\mu_0}{4} \sum_{l,l',L} \sqrt{\frac{(l+l'+L+1)!(l+l'-L)!}{(l+l'+L-1)!(l+l'-L-2)!}} \times C_{l-10'l'-10}^{L0} r^{l+l'-2} \left( \{c_l \otimes c_{l'}\} \int r'^{l+l'-2} Y_L(\mathbf{e}_r) dV \right). \quad (2.9)$$

Из выражения (2.9) следует, что вычисление потенциальной энергии в общем случае сводится к вычислению объемного интеграла

$$\int r'^{l+l'-2} Y_L(\mathbf{e}_r) dV$$

при заданной форме тела. Аналитическое вычисление данного интеграла для произвольной формы тела представляет определенные сложности. Однако для некоторых форм, таких как шар, квазিশар и некоторых других, вычисляется довольно просто.

В дальнейшем остановимся только на влиянии размеров тела на область устойчивости. Влияние формы диамагнитного тела на устойчивость состояния равновесия будет рассмотрено в последующих статьях.

В связи с вышесказанным выберем в качестве диамагнитного тела шар радиуса  $b$ . В этом случае

$$\int r^{l+l'-2} Y_L(\mathbf{e}_r) dV = 4\pi \frac{b^{2l+1}}{2l+1} \delta_{L0},$$

$$C_{l-10'l'-10}^{00} = (-1)^{l-1} \frac{1}{\sqrt{2l-1}}$$

и

$$U = -\frac{\chi\mu_0}{2} \sum_{l,m} \frac{l}{2l+1} b^{2l+1} c_{l,m} c'_{lm}, \quad (2.10)$$

где  $\delta_{L0}$  — символ Кронекера.

Как и раньше, считаем, что поле магнитных источников обладает осевой симметрией. Тогда на основании формулы (2.5) связь между коэффициентами  $c_l$  и  $a_l$  имеет вид:

$$c_{lm} = \sum_{j=m} \frac{a_+(l+j)!}{2^m m!(j-m)!} \frac{1}{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}} \times z^{j-m} (x+iy)^m \left[ 1 - \frac{(j-m)(j-m-1)}{2(2m+2)} \frac{x^2+y^2}{z^2} + \frac{(j-m)\dots(j-m-3)}{8(2m+2)(2m+4)} \frac{(x^2+y^2)^2}{z^4} + \dots \right], \quad (2.11)$$

где  $x, y, z$  — координаты вектора  $\mathbf{R}$ .

Из формулы (2.11) следует, что для определения энергии (2.10) с точностью до второго порядка по координатам смещения центра масс тела достаточно вычислить коэффициенты  $c_{l0}$ ,  $c_{l1}$  и  $c_{l2}$ . Определив эти коэффициенты и подставив их в выражение (2.10), получим:

$$U = -\frac{\chi\mu_0}{2} \sum_l \frac{l}{2l+1} b^{2l+1} a_l^2 - \frac{\chi\mu_0}{2} z \sum_l \frac{l(l+1)}{2l+1} \times b^{2l+1} a_l a_{l+1} - \frac{\chi\mu_0}{2} z^2 \sum_l \frac{l(l+1)}{2l+1} b^{2l+1} \times [(l+1)a_{l+1}^2 + (l+2)a_l a_{l+2}] - \frac{\chi\mu_0}{4} x^2 \times \sum_l \frac{l(l+1)}{2l+1} b^{2l+1} [la_{l+1}^2 - (l+2)a_l a_{l+2}]. \quad (2.12)$$

Откуда, продифференцировав (2.12), получим:

$$F_z = \frac{\chi\mu_0}{2} \sum_l \frac{l(l+1)}{2l+1} a_l a_{l+1} b^{2l+1},$$

$$K_z = -\chi\mu_0 \sum_l \frac{l(l+1)}{2l+1} b^{2l+1} [(l+1)a_{l+1}^2 + (l+2)a_l a_{l+2}],$$

$$K_x = K_y = -\frac{\chi\mu_0}{2} \sum_l \frac{l(l+1)}{2l+1} b^{2l+1} [la_{l+1}^2 + (l+2)a_l a_{l+2}]. \quad (2.13)$$

При  $\chi < 0$  на основании условия (1.14) выражение (2.13) может быть использовано для нахождения области устойчивости.

Найдем область устойчивости подвеса диамагнитного шара в поле витка с током и в поле двух витков, включенных как навстречу друг другу, так и в одну сторону. Вначале рассмотрим подвес, образованный одним витком.

Потенциал витка в окрестности начала координат  $X_i$  представляется в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$\varphi_0 = \sum_{l=0} a_l r^l P_l(\cos \theta).$$

На оси витка  $\theta = 0$ ,  $k = z$  и выражение для потенциала переходит в

$$\varphi_0 = \sum_{l=0} a_l z^l. \quad (2.14)$$

С другой стороны, если известна формула потенциала витка  $\varphi_0$  в системе координат  $X_i$ , то, разложив ее в ряд Тейлора в окрестности точки  $z$  при  $z_0 = 0$ , будем иметь:

$$\varphi_0 = \sum_l \left( \frac{\partial^l \varphi_0}{\partial z^l} \right)_{z_0=0} \frac{1}{l!} z^l. \quad (2.15)$$

Сравнив (2.14) с (2.15), видим, что коэффициенты  $a_l$  равны

$$a_l = \left( \frac{\partial^l \varphi_0}{\partial z^l} \right)_{z_0=0} \frac{1}{l!}.$$

Потенциал витка в системе  $X_i$  задается выражением:

$$\varphi_0 = \frac{\mu_0}{2} I \left( \frac{\eta + \nu}{\sqrt{1 + (\eta + \nu)^2}} - 1 \right), \quad (2.16)$$

здесь  $\nu$  — величина, характеризующая положение центра шара относительно начала координат системы  $X_i$ , отнесенной к радиусу витка, а  $\eta$  — положение начала координат  $X_i$  относительно плоскости витка, отнесенного к его радиусу.

Разложив в ряд Тейлора потенциал (2.16) в окрестности  $\nu$ , приведем несколько первых коэффициентов разложения потенциала в безразмерном виде, отнорми-

рованных на радиус витка:

$$a_0 = \frac{\eta}{(1 + \eta^2)^{1/2}}, \quad a_1 = \frac{1}{(1 + \eta^2)^{3/2}}, \quad a_2 = -\frac{3\eta}{2(1 + \eta^2)^{5/2}},$$

$$a_3 = \frac{-1 + 4\eta^2}{2(1 + \eta^2)^{7/2}}, \quad a_4 = \frac{5\eta(-3 + 4\eta^2)}{8(1 + \eta^2)^{9/2}},$$

$$a_5 = \frac{3(-12\eta^2 + 8\eta^4 + 1)}{8(1 + \eta^2)^{11/2}}, \quad \eta = \frac{z}{a}. \quad (2.17)$$

Подставив эти коэффициенты в выражения для силы и жесткостей, будем иметь:

$$\frac{F}{F_0} = \frac{4\xi^3}{(1 + \eta^2)^4} - \frac{9\eta(1 - 4\eta^2)}{10(1 + \eta^2)^6} \xi^5$$

$$+ \frac{15(1 - 4\eta^2)\eta(3 - 4\eta^2)}{28(1 + \eta^2)^8} \xi^7$$

$$- \frac{25\eta(3 - 4\eta^2)(-12\eta^2 + 8\eta^4 + 1)}{48(1 + \eta^2)^{10}} \xi^9 + \dots,$$

$$\frac{K_z a}{F_0} = \frac{(7\eta^2 - 1)}{(1 + \eta^2)^5} \xi^3 + \frac{9(1 - 23\eta^2 + 36\eta^4)}{5(1 + \eta^2)^7} \xi^5$$

$$- \frac{3}{28} \frac{5(-93\eta^2 + 288\eta^4 - 176\eta^6 + 3)}{(1 + \eta^2)^9} \xi^7 + \dots, \quad (2.18)$$

$$\frac{K_x a}{F_0} = \frac{1}{2} \frac{(2 - 5\eta^2)}{(1 + \eta^2)^5} \xi^3 + \frac{3}{10} \frac{(2 + 29\eta^2 - 28\eta^4)}{(1 + \eta^2)^7} \xi^5$$

$$+ \frac{45}{112} \frac{(-19\eta^2 + 104\eta^4 - 48\eta^6 + 4)}{(1 + \eta^2)^9} \xi^7 + \dots,$$

$$F_0 = \mu_0 \chi I^2,$$

где  $\xi = b/a$  — радиус шара, отнормированный на радиус витка с током.

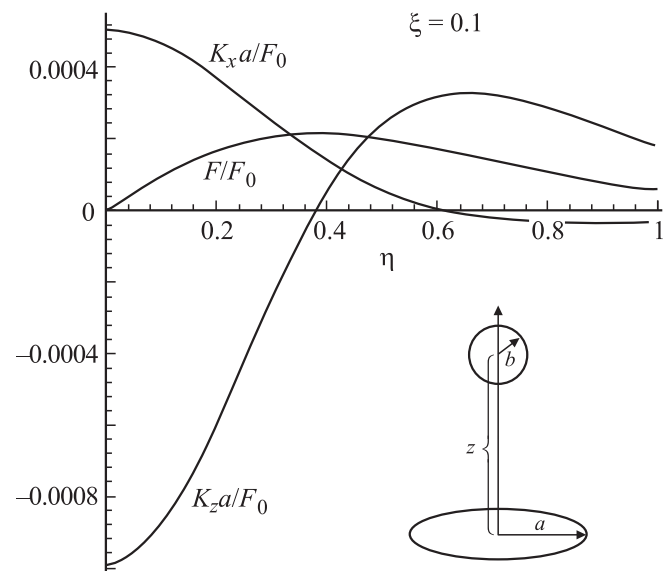


Рис. 2. Область устойчивости малого диамагнитного шара в магнитном поле одного витка.

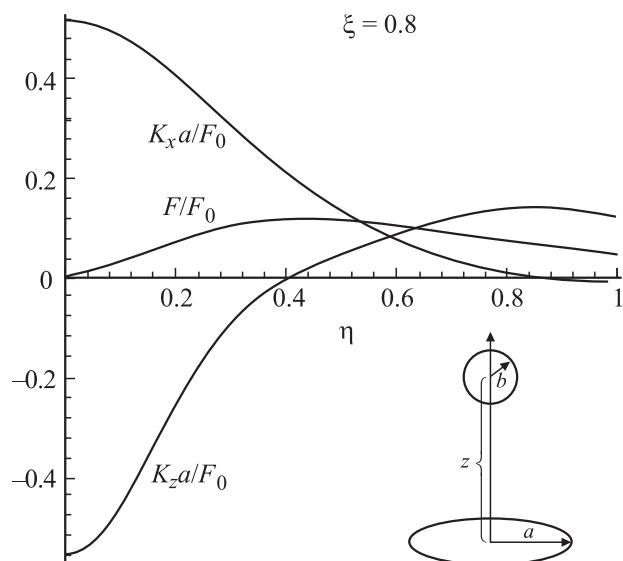


Рис. 3. Область устойчивости диамагнитного шара сравнимо с размером витка в магнитном поле одного витка.

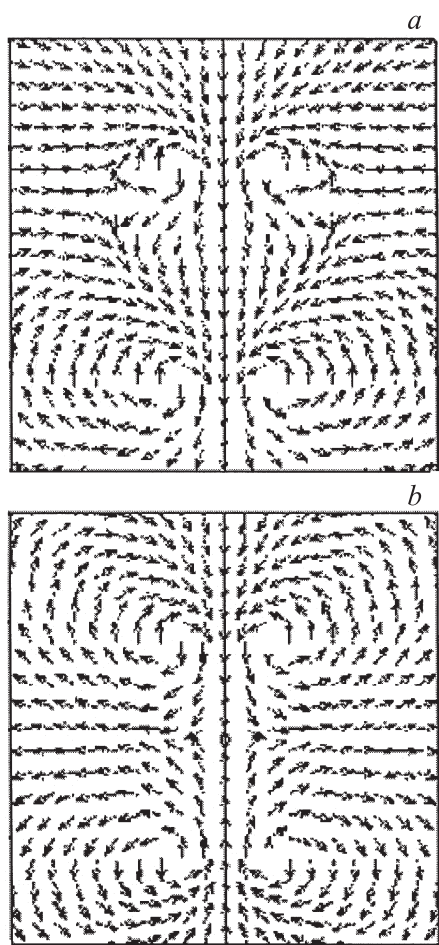


Рис. 4. Конфигурация магнитного поля, создаваемая двумя витками (*a* — разнонаправленные, *b* — однонаправленные токи).

Графики зависимости силы и жесткости от радиуса шара и его положения относительно плоскости витка приведены на рис. 2 и 3 для малого шара  $\xi = 0.1$  и шара  $\xi = 0.8$ .

Анализ полученных графических зависимостей показывает, что область устойчивости зависит от размеров шара. Так, для малого шара  $b = 0.1a$ , область устойчивости  $0.379a < z < 0.636a$ , а для шара, размеры которого  $b = 0.8a$ , область устойчивости  $0.399a < z < 0.882a$ . Разница в размерах области устойчивости представляет 53%. Сравнение формул (2.18) с формулами квазиоднородного приближения дает одинаковый результат для случая  $b \ll 1$ , т.е. когда размеры тела очень малы. В этом случае в формулах (2.13) и (2.18) можно оставить только первый член разложения, который совпадает с квазиоднородным приближением.

Рассмотрим подвес, образованный двумя витками.

Чтобы определить возможность левитации диамагнитного тела в поле, образованном двумя круговыми токами, обратимся к конфигурации поля. Конфигурация поля, образованная однонаправленными и противонаправленными токами, приводится на рис. 4.

Из рис. 4, *b* видно, что если токи однонаправлены, то в центре поля, образованного витками, присутствует большая область однородности, в которой на шар не должны действовать силы. В случае разнонаправленных токов (рис. 4, *a*) по оси *x* и *z* есть неоднородности магнитного поля, следовательно, должны возникать возвращающие силы. Поэтому в этой области возможно устойчивое удержание диамагнитного тела.

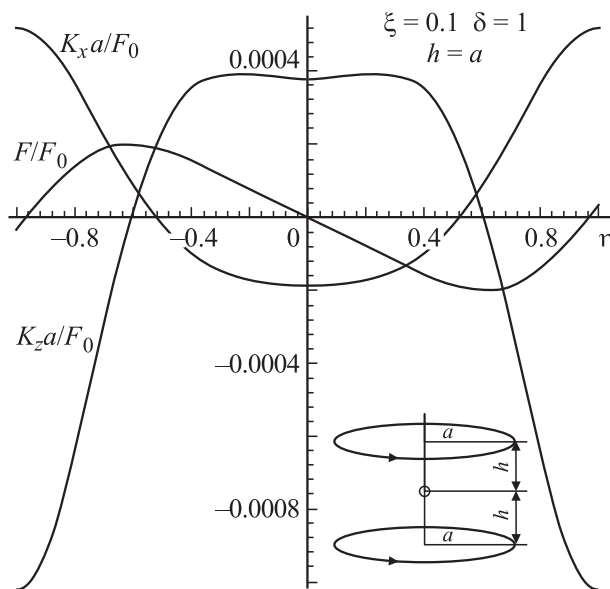
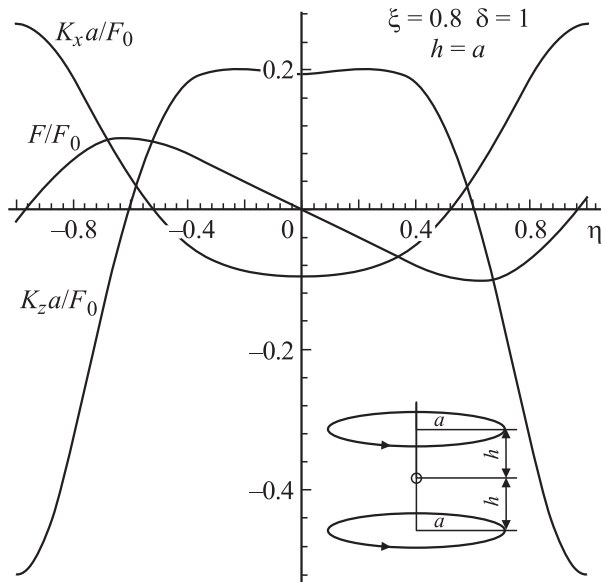


Рис. 5. Область устойчивости малого диамагнитного шара в магнитном поле двух витков; однонаправленные токи.





**Рис. 6.** Область устойчивости диамагнитного шара сравнимого с размерами витка в магнитном поле двух витков; одинаправленные токи.

Потенциал витка в системе  $X_i$  задается выражением:

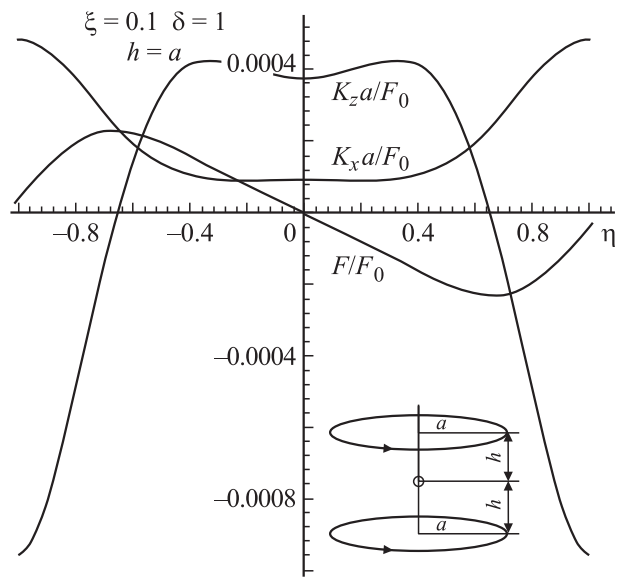
$$\varphi_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \left( \frac{z - h + w}{\sqrt{a^2 + (h - z + w)^2}} + \varepsilon_i \frac{z + h + w}{\sqrt{a^2 + (h + z + w)^2}} - 1 \right), \quad (2.19)$$

здесь  $w$  — величина, характеризующая положение центра шара относительно начала координат системы  $X_i$ , а  $z$  — положение начала координат  $X_i$  относительно плоскости витка,  $\varepsilon_i = \pm 1$  — в зависимости от направления тока в катушках противоположные и одинаправленные соответственно,  $2h$  — расстояние между витками.

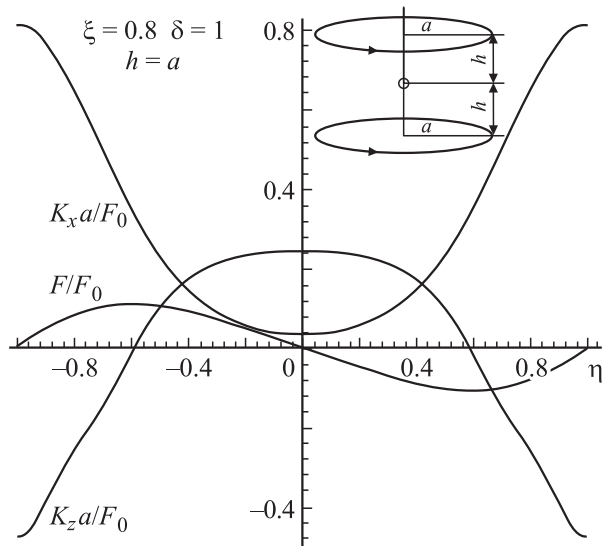
Разложив в ряд Тейлора потенциал (2.19) в окрестности  $w$ , приведем несколько первых коэффициентов разложения потенциала в безразмерном виде, отнормированных на радиус витка:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\eta - \delta}{\sqrt{1 + (\eta - \delta)^2}} + \frac{\eta + \delta}{\sqrt{1 + (\eta + \delta)^2}}, \\ a_1 &= \frac{1}{[1 + (\delta\eta)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[1 + (\delta + \eta)^2]^{3/2}}, \\ a_2 &= \frac{(\delta - \eta)}{2[1 + (\delta - \eta)^2]^{7/3}} - \frac{(\delta + \eta)}{2[1 + (\delta + \eta)^2]^{7/3}}, \\ a_3 &= \frac{288(\delta - \eta)^2 - 72}{144[1 + (\delta - \eta)^2]^{5/2}} + \frac{288(\delta + \eta)^2 - 72}{144[1 + (\delta + \eta)^2]^{5/2}}, \\ \delta &= \frac{h}{a}, \quad \eta = \frac{z}{a}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В результате расчетов при подстановке в (2.13) получены зависимости силовых характеристик, графики которых представлены на рис. 5, 6 для одинаправленных токов, а на рис. 7, 8 — для противоположно направленных. Размеры шара  $\xi = 0.1$ ,  $\xi = 0.8$  соответственно,  $\delta = 1$ ,  $h = a$ . Анализ этих зависимостей показывает, что при фиксированном расстоянии между токовыми кольцами область устойчивости мало зависит от размеров шара.



**Рис. 7.** Область устойчивости малого диамагнитного шара в магнитном поле двух витков; разнонаправленные токи.



**Рис. 8.** Область устойчивости диамагнитного шара сравнимого с размерами витка в магнитном поле двух витков; разнонаправленные токи.



## Заключение

Итак, размеры области устойчивости зависят от направления токов. При однонаправленном включении область мала и сосредоточена вблизи витка. В случае разнонаправленного включения токов область устойчивости обширна. Как видно из рисунков, возможно равновесное удержание диамагнитного шара — как большого, так и малого.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00333а).

## Список литературы

- [1] *Berry M.V., Geim A.K.* // Eur. J. Phys. 1997. Vol. 18. С. 307–313.
- [2] *Geim A.* // Phys. Today. 1998. Vol. 51. P. 36–39.
- [3] *Thomson W.* Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism. London: Mac-Millan, 1872. Paper XXXIII. P. 493–499; Paper XXXIV. P. 514–515.
- [4] *Earnshaw S.* // Trans. Cambridge Philos. 1842. Soc. 7. P. 97–112.
- [5] *Braunbek W.* // Z. Phys. 1939. Bd 112. S. 753–763.
- [6] *Arkadiev V.* // Nature. London. 1947. Vol. 160. P. 330.
- [7] *Понизовский В.М.* // ПТЭ. 1981. № 4. С. 7–14.
- [8] *Урман Ю.М.* // Изв. вузов. Приборостроение. 1973. Т. 16. № 8. С. 72–74.
- [9] *Урман Ю.М.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 1. С. 3–9.
- [10] *Урман Ю.М.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 1. С. 10–16.
- [11] *Урман Ю.М.* // Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 52–68.
- [12] *Линьков Р.В.* // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 6. С. 1123–1131.
- [13] *Линьков Р.В.* // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 9. С. 1898–1899.
- [14] *Sato A., Nimori S., Numazawa T., Maeda M., Matsumoto F., Nagai H., Takahashi M., Kuriyama T., Ito T., Kakamura T.* // Adv. Cryogenic Eng. 2004. Vol. 49A. P. 731–741.
- [15] *Watanabe K., Awaji S., Motokawa M., Mikami Y., Sakuraba J., Watazawa K.* // Jpn. J. Appl. Phys. 1998. Vol. 37. P. L1148–1150.
- [16] *Schneider-Muntau H.J., Nakagawa Y.* // High Magnetic Fields: Science and Technology. Singapore: World Scientific, 2003. Vol. 1. P. 99.
- [17] *Bird M.D., Bole S., Dixon I., Eyssa Y.M., Gao B.J., Schneider-Muntau H.J.* // Physica. 2001. Vol. B 294–295. P. 639–642.
- [18] *Simon M.D., Geim A.K.* // J. Appl. Phys. 2000. Vol. 87. P. 6200–6204.
- [19] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. Т. 8. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [20] *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 305 с.
- [21] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975. 436 с.