

01;03

О возможности зажигания коронного разряда у поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя на поверхности заряженной градины в однородном электростатическом поле

© А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 19 ноября 2009 г.)

В квадратичном приближении по амплитуде капиллярных осцилляций заряженного слоя электропроводной жидкости на поверхности обводненной градины в однородном внешнем электростатическом поле получено и проанализировано выражение для напряженности электрического поля в ее окрестности. Выяснилось, что с увеличением номера моды, определяющей начальную деформацию равновесной сферической формы свободной поверхности жидкого слоя, и снижением толщины жидкого слоя напряженность электростатического поля в малой окрестности гребней капиллярных волн растет. Даже при малых зарядах и электрических полях напряженность электростатического поля у поверхности градины достаточно велика для зажигания коронного заряда в ее окрестности.

Введение

Изучение эволюции заряженной поверхности тонкого слоя жидкости во внешних силовых полях, таких как гравитационное, аэродинамическое, электростатическое, представляет значительный интерес для объяснения различных природных и технологических феноменов. Наиболее интересен этот объект для теории грозового электричества как в связи с процессами микроразделения зарядов, так и в феномене реализации разряда молнии [1–5]. Согласно существующим представлениям, инициирование разряда молнии связано с мощной электронной лавиной (переходящей в стример), зарождающейся при коронном разряде с группы близко расположенных капель или тающих градин, свободно падающих в грозовом облаке [1–3]. Однако натурные измерения в грозовых облаках внутриоблачных электрических полей и зарядов на каплях и градинах показывают (см., например, [4], гл. 10), что напряженность электрического поля и величина зарядов на каплях и градинах недостаточно велики как для реализации электростатической неустойчивости поверхности жидкости по отношению к собственному и индуцированному электрическому зарядам [6], так и для зажигания коронного разряда.

Зажигание коронного разряда в облаке на высоте 4–5 км (на уровне мокрого роста градин и интенсивного разделения электрических зарядов), где давление воздуха изменяется в диапазоне 460–400 мм Hg, возможно, если суммарная напряженность электростатического поля индуцированного и собственного зарядов у поверхности капли или обводненной градины достигнет ~ 20 кВ/см (см. [5], стр. 507). Для невозмущенной сферической свободной жидкой поверхности капли или тающей градины такие величины напряженности поля недостижимы. Однако известно [6–8], что деформация заряженной свободной поверхности жидкости, приводящая к локальному увеличению кривизны поверхности,

вызывает и локальное увеличение напряженности электрического поля, которая у вершин стоячих капиллярных волн может превысить критическую для зажигания коронного разряда величину.

В работах [9,10] было показано, что достаточно высокая напряженность электрического поля, необходимая для зажигания коронного разряда, может быть достигнута в окрестности капель и градин, заряженных ниже критического по Рэлею (в смысле возможности реализации электростатической неустойчивости свободной поверхности жидкости) значения, если номер возбужденной моды осцилляций достаточно высок ($n \geq 10$). Однако для того чтобы реализовались механизмы накопления заряда и возбуждения высоких мод, описанные в [9,10], необходимо, чтобы рассматриваемая градина двигалась с довольно большой скоростью ($V \approx 10^3$ см/с [10]). Если учесть, что заряженная градина находится во внутриоблачном электрическом поле, то рассмотренное требование в отношении скорости движения градины можно значительно смягчить. При наличии внешнего электрического поля благодаря поляризации градины сила кулоновского отталкивания между близкорасположенными одноименно заряженными каплей и градиной может оказаться меньше силы взаимного притяжения между индуцированными диполями [10]. Таким образом, расчет напряженности электрического поля на поверхности заряженной градины во внутриоблачном электрическом поле представляется актуальным.

1. Постановка задачи

Будем решать задачу о нахождении напряженности электрического поля вблизи поверхности сферического слоя идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости радиуса R , находящегося на поверхности твердого сферического ядра радиуса R_0 . Пусть жидкость

характеризуется плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ , а описанная система моделирует обводненную градину. Примем, что обладающая зарядом Q градина находится в однородном электростатическом поле напряженностью \mathbf{E}_0 .

Предлагаемая модель должна описывать заряженную градину во внутриоблачном электрическом поле. В естественных условиях градина движется относительно среды в суперпозиции электрического, гравитационного и аэродинамического полей. Сила аэродинамического сопротивления обеспечивает градине движение с примерно постоянной скоростью, но предположительно вследствие малой толщины слоя жидкости, не деформирует существенно форму градины по сравнению со сферой. Плотность внешней среды принимается равной нулю, чтобы не увеличивать громоздкость математических выкладок. Осцилляции и устойчивость заряженной капли (градины), движущейся относительно материальной среды, детально рассмотрены ранее в линейном и нелинейном приближениях в [11,12], где показано, что наличие внешней среды приводит к существенному усложнению проблемы, обусловленному аэродинамикой взаимодействия мод осцилляций на границе раздела.

Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма свободной поверхности жидкости претерпела виртуальную осесимметричную деформацию конечной амплитуды, существенно меньшей толщины жидкого слоя, пропорциональную одной из мод капиллярных осцилляций. Все рассмотренные проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \sigma = \rho = 1$, в сферической системе координат с началом в центре масс системы, полярный угол ϑ будем отсчитывать от положительного направления поля \mathbf{E}_0 . Уравнение свободной поверхности жидкости запишется в виде:

$$F(r, \vartheta, t) = r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1. \quad (1)$$

Течение жидкости будем полагать потенциальным, т. е. примем, что поле скоростей $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ волнового движения в жидком слое полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\mathbf{r}, t)$ известным соотношением: $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\psi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности твердого сферического ядра состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2)$$

а также граничных условий к ним: на свободной поверхности жидкости — кинематического

$$r = 1 + \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta};$$

динамического

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\psi)^2 + \Delta p + p_E - p_\sigma = 0;$$

$$p_E \equiv \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}; \quad p_\sigma = \text{div } \mathbf{n};$$

при условии постоянства электрического потенциала свободной поверхности жидкости

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t),$$

а также граничных условий на бесконечности

$$r \rightarrow \infty : \quad -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_0;$$

и на поверхности твердого сферического ядра

$$r = R_0 : \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} = 0.$$

В выписанных соотношениях Δp — перепад постоянных давлений внутри и вне жидкости в состоянии равновесия; p_E — давление электрического поля собственного заряда и внешнего поля на свободную поверхность капли; p_σ — лапласовское давление;

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\nabla F(r, \vartheta, t)}{|\nabla F(r, \vartheta, t)|}$$

— единичный вектор внешней нормали к поверхности капли; $\Phi_S(t)$ — постоянный вдоль свободной поверхности жидкости электрический потенциал.

Кроме перечисленных выше граничных условий следует учесть также условия неизменности собственного электрического заряда системы

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi) dS = Q; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неизменности объема слоя жидкости

$$\int_{V_1} r^2 dr d\mu d\varphi = -\frac{4}{3} \pi (1 - R_0^3);$$

$$\mu \equiv \cos \vartheta; \quad V_1 = \begin{cases} R_0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \quad (-1 \leq \mu \leq 1); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неподвижности центра масс градины

$$\frac{\int_{V_1} r dV_1 + \rho_* \int_{V_2} r dV_2}{\int_{V_1} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} dV_2} = 0; \quad V_2 = \begin{cases} 0 \leq r \leq R_0; \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

где ρ_* — безразмерная плотность твердого ядра.

Начальные условия к поставленной задаче формулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы свободной поверхности жидкого слоя и равенства нулю начальной скорости движения свободной поверхности

$$t = 0 : \quad \xi(\vartheta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon P_k(\mu) \quad (k \geq 2);$$

$$\frac{\partial \xi(\vartheta, t)}{\partial t} = 0.$$

Здесь ε — безразмерная амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи; $P_k(\mu)$ — полином Лежандра k -го порядка; ξ_0 и ξ_1 — константы, зависящие от номера возбужденной моды k , ее амплитуды и определяемые условиями неизменности объема капли и неподвижности центра масс системы:

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 = 0 + O(\varepsilon^3).$$

2. Метод решения

Сформулированную задачу в квадратичном по ε приближении целесообразно решать методом многих временных масштабов [13], как это проделано в работах [9,10,12]. Для этого искомые функции $\xi(\vartheta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ представляются в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε и считаются зависящими не просто от времени t , но от разных его масштабов T_m , определенных соотношением $T_m \equiv \varepsilon^m t$:

$$\begin{aligned} \xi(\vartheta, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots); \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots); \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots). \end{aligned} \quad (3)$$

Производные по времени вычисляются с учетом полного набора различных его масштабов по правилу [13]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3). \quad (4)$$

Подставив разложения (3)–(4) в систему уравнений (2) и граничные условия к ней и приравняв в каждом из соотношений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$, которые для $m \geq 1$ будем искать в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\mu); \\ \psi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} (H_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n + G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1}) P_n(\mu); \\ \Phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\mu). \end{aligned} \quad (5)$$

3. Отыскание решений различных порядков малости

3.1. Нулевой порядок малости

В нулевом порядке малости возмущение свободной поверхности жидкого слоя отсутствует, поэтому имеет смысл рассмотреть только часть задачи для электрического потенциала, формулировка которой имеет вид

$$\Delta \Phi^{(0)} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi^{(0)} \rightarrow \mathbf{E}_0;$$

$$r = 1: \quad \Phi^{(0)} = \Phi_S^{(0)}; \quad -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} d\mu d\varphi = Q.$$

Решение данной системы уравнений, описывающих электрический потенциал градины в равновесном состоянии, имеет вид

$$\Phi^{(0)} \equiv \frac{Q}{r} - E_0 \mu (r - r^{-2}). \quad (6)$$

Выражение (6) можно дополнить тождеством

$$M_n^{(0)} = H_n^{(0)} = G_n^{(0)} \equiv 0.$$

3.2. Первый порядок малости

В первом порядке малости по величине амплитуды возмущения ε исходная система уравнений (2) и граничные условия к ней преобразуются к виду

$$\Delta \Phi^{(1)} = 0; \quad \Delta \psi^{(1)} = 0; \quad (7)$$

$$r = R_0: \quad \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(1)} \rightarrow 0;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r};$$

$$-\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \right)$$

$$+ (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = 0;$$

$$\Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_S^{(1)};$$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(1)} \right] d\mu = 0;$$

$$t = 0: \quad \xi^{(1)} = P_k(\mu); \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad \int_{-1}^1 \xi^{(1)} d\mu = 0.$$

Здесь Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа. Условие для неподвижности центра масс выполняется тождественно, и поэтому здесь не приводится.

Подставив разложения (3), (5) и решение нулевого порядка (6) в систему уравнений (7), получим бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений, определяющих коэффициенты $F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $H_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$:

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0;$$

$$\begin{aligned} &A_n^{(n-2)}M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + A_n^{(n-1)}M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \\ &+ \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \\ &+ A_n^{(n+1)}M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \\ &+ A_n^{(n+2)}M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0; \quad n \geq 2; \end{aligned} \quad (8)$$

$$A_n^{(n-2)} = -w\chi_n \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)};$$

$$A_n^{(n-1)} = -\sqrt{wW}\chi_n \frac{n(2n-3)}{(2n-1)};$$

$$A_n^{(n+1)} = -\sqrt{wW}\chi_n \frac{(n+1)(2n-1)}{2n+3};$$

$$A_n^{(n+2)} = -w\chi_n \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)};$$

$$\begin{aligned} \omega_n^2 = \chi_n \left\{ (n-1)[(n+2) - W] \right. \\ \left. - w \frac{n(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right\}; \end{aligned}$$

$$\chi_n = \frac{n(n+1)(1 - R_0^{2n+1})}{n+1 + nR_0^{2n+1}}; \quad w = \frac{9E_0^2}{4\pi} \quad W = \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{n(1 - R_0^{2n+1})} \\ \times \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \quad (n \geq 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{R_0^{2n+1}}{(n+1)(1 - R_0^{2n+1})} \\ \times \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} \quad (n \geq 2); \end{aligned}$$

$$\Phi_S^{(1)} \equiv 0; \quad F_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \quad F_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0;$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = (3E_0\mu + Q)M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots); \quad n \geq 2. \quad (9)$$

3.3. Второй порядок малости

Для определения решения второго порядка малости, т.е. для отыскания функций $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $H_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, запишем систему уравнений, получающуюся при подстановке разложений (3) в исходную систему уравнений (2) и граничные условия к ней, сохраняя слагаемые второго порядка малости по ε

$$\Delta\Phi^{(2)} = 0; \quad \Delta\psi^{(2)} = 0; \quad (10)$$

$$r = R_0: \quad \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{(2)} \rightarrow 0;$$

$$r = 1:$$

$$\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\vartheta} \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\vartheta};$$

$$- \frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial r\partial T_0}$$

$$- \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial\vartheta} \right)^2 \right] + \frac{1}{8\pi} \left[2 \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r} \right.$$

$$+ 2 \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta} \frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial\vartheta} + \left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\vartheta} \right)^2$$

$$+ 2\xi^{(2)} \left(\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta} \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r\partial\vartheta} - \left(\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta} \right)^2 \right)$$

$$+ 2\xi^{(1)} \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r\partial\vartheta} - 2 \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta} \right) \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta} \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r\partial\vartheta} \right)$$

$$+ (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3\Phi^{(0)}}{\partial r^3} + \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta} \frac{\partial^3\Phi^{(0)}}{\partial r^2\partial\vartheta} + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r\partial\vartheta} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta^2} \right)^2 - 4 \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\vartheta} \frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r\partial\vartheta} \right)$$

$$+ [(2 + \Delta\Omega)\xi^{(2)} - 2\xi^{(1)}(1 + \Delta\Omega)\xi^{(1)}] = 0;$$

$$\Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \left(\frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) + \xi^{(1)} \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}$$

$$+ \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \frac{d^2\Phi^{(0)}}{dr^2} = \Phi_S^{(2)};$$

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r \partial \vartheta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \vartheta} \right) + \xi^{(2)} \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + 2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \vartheta} \right] d\mu = 0;$$

$$t = 0: \quad \xi^{(2)} = -\frac{1}{(2k+1)}$$

(для одномодового возмущения);

$$\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = 0; \quad \int_{-1}^1 [\xi^{(2)} + (\xi^{(1)})^2] d\mu = 0.$$

Подставив разложения (5), а также решения нулевого и первого порядка в систему дифференциальных уравнений (10) для второго порядка малости, получим систему неоднородных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $H_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ и $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$. Исключив из получившихся уравнений слагаемые, пропорциональные $(\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)/\partial T_1)$, которые приводят к появлению секулярных членов в решениях, получим, что амплитуды разложения $M_n^{(1)}$ не зависят от временного масштаба T_1 . Таким образом, в дальнейшем будем полагать, что

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_n^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2 t).$$

На основе вышесказанного система дифференциальных уравнений для отыскания коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ сведется к следующему виду:

$$M_0^{(2)}(T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (M_n^{(1)}(T_0))^2;$$

$$\begin{aligned} & A_n^{(n-2)} M_{n-2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + A_n^{(n-1)} M_{n-1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\ & + \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\ & + A_n^{(n+1)} M_{n+1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \\ & + A_n^{(n+2)} M_{n+2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = f_n(T_0), \quad n \geq 1; \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_n(T_0) = & \chi_n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0^2} M_l^{(1)}(T_0) \right. \\ & \times \left[K_{m,l,n} \left(\frac{\nu_m}{\chi_n} - 1 \right) - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_n \chi_m} \right] + \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \\ & \times \left[K_{m,l,n} \left(\frac{\nu_m}{\chi_n} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_m} \left(\frac{1}{\chi_n} + \frac{1}{2\chi_l} \right) \right] \\ & + M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \left\{ K_{m,l,n} [2l(l+1) - 1] \right. \\ & + w \frac{(13m(m+1) - 7)}{(2m-1)(2m+3)} \\ & + \frac{W}{2} [m(2n-2m+l-7) + l+3] + \frac{11w}{2(2m+1)} \\ & \times \left[\frac{m(m-1)}{(2m-1)} K_{m-2,l,n} + \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)} K_{m+2,l,n} \right] \\ & - \frac{\sqrt{wW}}{(2m+1)} [K_{m+1,l,n}(m+1)((m+2)^2 - 11) \\ & + K_{m-1,l,n}m((m+3)^2 - 15)] + m\sqrt{wW} \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} \right. \\ & \times K_{m,l,n+l} + \frac{n^2}{2n-1} K_{m,l,n-1} \left. \right] + W \frac{\alpha_{m,l,n-1}}{2} \left. \right\} \\ & + \left(\frac{m}{(2m-1)} M_{m-1}^{(1)}(T_0) + \frac{(m+1)}{(2m+3)} M_{m+1}^{(1)}(T_0) \right) M_l^{(1)}(T_0) \\ & \times \left\{ mw \left[\frac{n^2}{2n-1} K_{m,l,n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} K_{m,l,n+1} \right] \right. \\ & - w \frac{m+1}{2m+3} [(m+2)^2 K_{m+1,l,n} + m(m+5) K_{m-1,l,n}] \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{wW} [(l-7+m(2n-7-2m+l)) K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n}] \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} [(m+1)(l+1) K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n}] \\ & \times \left(\frac{l M_{l-1}^{(1)}(T_0)}{(2l-1)} + \frac{(l+1) M_{l+1}^{(1)}(T_0)}{(2l+3)} \right) \left[\sqrt{wW} M_m^{(1)}(T_0) \right. \\ & \left. + w \left(\frac{m M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} + \frac{(m+1) M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\nu_m = \frac{m-1 + (m+2)R_0^{2m+1}}{1 - R_0^{2m+1}};$$

$$K_{m,l,n} \equiv [C_{m0l0}^{n0}]^2;$$

$$\alpha_{m,l,n} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^{n0} C_{m-1l0}^{n0};$$

C_{m0l0}^{n0} и C_{m-1l0}^{n0} — коэффициенты Клебша–Гордана [14].

Рассмотрение задачи в квадратичном по ε приближении позволяет определить зависимость коэффициентов

$M_n^{(2)}(T_0, T_1)$ только от временного масштаба $T_0 \equiv t$. При этом можно записать, что:

$$M_n^{(2)}(T_0, T_1) \approx M_n^{(2)}(t) + O(\varepsilon t)$$

и для возмущения поверхности получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} \xi(\vartheta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\vartheta, t) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^3 t) \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(t) P_n(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) + O(\varepsilon^3 t). \end{aligned} \quad (12)$$

Неизвестные коэффициенты $M_n^{(1)}$ и $M_n^{(2)}$ получим в результате численного решения систем дифференциальных уравнений (8) и (11). Коэффициенты $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $H_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ и $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ с учетом (12) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv H_n^{(2)}(t) = \frac{1}{n(1 - R_0^{2n+1})} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial t} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\nu_m K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_m} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(t)}{\partial t} M_l^{(1)}(t) \right\}; \\ G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv G_n^{(2)}(t) = \frac{R_0^{2n+1}}{(n+1)(1 - R_0^{2n+1})} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial t} - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\nu_m K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_m} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(t)}{\partial t} M_l^{(1)}(t) \right\}; \\ \Phi_S^{(2)} &\equiv 0, \quad F_0^{(2)}(t) = 0, \\ F_n^{(2)}(t) &\equiv (3E_0\mu + Q) \left[M_n^{(2)}(t) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m M_m^{(1)}(t) M_l^{(1)}(t) \right], \\ &n \geq 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, выражение для потенциала электрического поля с точностью до константы, зависящей от времени, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi^{(0)} + \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} = \frac{Q}{r} - E_0\mu(r - r^{-2}) \\ &+ \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (F_n^{(1)}(t) + \varepsilon F_n^{(2)}(t)) r^{-(n+1)} P_n(\mu), \end{aligned}$$

где коэффициенты $F_n^{(m)}(t)$ определяются выражениями (9) и (13).

4. Расчет напряженности электрического поля у поверхности заряженной капли

Выражение для напряженности электростатического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \equiv -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)$ в окрестности свободной поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя,

имеет вид

$$\begin{aligned} r \geq 1 + \xi(\vartheta, t): \quad \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{E}^{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{E}^{(2)}, \\ \mathbf{E}^{(0)} &= \mathbf{e}_r \left[E_0\mu \left(1 + \frac{2}{r^3} \right) + \frac{Q}{r^2} \right] - \mathbf{e}_\vartheta \left[E_0 \sqrt{1 - \mu^2} \left(1 - \frac{1}{r^3} \right) \right], \\ \mathbf{E}^{(1)} &= \mathbf{e}_r \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) F_n^{(1)}(t) r^{-(n+2)} P_n(\mu) - \mathbf{e}_\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(1)}(t) r^{-(n+2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta}; \\ \mathbf{E}^{(2)} &= \mathbf{e}_r \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) F_n^{(2)}(t) r^{-(n+2)} P_n(\mu) - \mathbf{e}_\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)}(t) r^{-(n+2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta}, \end{aligned} \quad (14)$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϑ — орты сферической системы координат. Из выражения (14) найдем напряженность электрического поля на свободной поверхности капли. Для этого разложим (14) в окрестности равновесной сферической формы по величине деформации ξ . Поскольку орты \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϑ не зависят от радиальной переменной r , то можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \vartheta, t)|_{r=1+\xi} &\approx \left[\mathbf{E}(r, \vartheta, t) + \xi \frac{\partial \mathbf{E}(r, \vartheta, t)}{\partial r} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(r, \vartheta, t)}{\partial r^2} \right] \Big|_{r=1} = \mathbf{e}_r (3E_0\mu + Q) \\ &+ \varepsilon \mathbf{e}_r \sum_{n=0}^{\infty} [(1+n)F_n^{(1)} - 2(3E_0\mu + Q)M_n^{(1)}] P_n(\mu) - \varepsilon \mathbf{e}_\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_n^{(1)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta} + 3E_0 \sqrt{1 - \mu^2} M_n^{(1)} P_n(\mu) \right] \\ &+ \varepsilon^2 \mathbf{e}_r \sum_{n=0}^{\infty} [(1+n)F_n^{(2)} - 2(3E_0\mu + Q)M_n^{(2)}] P_n(\mu) + \varepsilon^2 \mathbf{e}_r \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[3(4E_0\mu + Q)M_m^{(1)} M_l^{(2)} - (m+1)(m+2)M_m^{(1)} F_l^{(1)} \right] P_m(\mu) P_l(\mu) + \\ &- \varepsilon^2 \mathbf{e}_\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta} + 3E_0 \sqrt{1 - \mu^2} M_n^{(2)} P_n(\mu) + \varepsilon^2 \mathbf{e}_\vartheta \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[(m+2)F_m^{(1)} \frac{\partial P_m(\mu)}{\partial \vartheta} + 6E_0 \sqrt{1 - \mu^2} M_l^{(1)} P_m(\mu) \right] M_l^{(1)} P_l(\mu). \end{aligned} \quad (15)$$

Чтобы найти нормальную компоненту напряженности электрического поля $E_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$, выпишем в явном виде аналитическое выражение для вектора нормали к свободной поверхности нелинейно-осциллирующего слоя жидкости:

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\nabla F(r, \vartheta, t)}{|\nabla F(r, \vartheta, t)|} = n_r \mathbf{e}_r + n_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta,$$

где $F(r, \vartheta, t)$ и ξ определены соотношениями (1) и (12).

С точностью до слагаемых второго порядка малости по ε на свободной поверхности проекции n_r и n_ϑ на орты сферической системы координат \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_ϑ вектора нормали определяются выражениями

$$\begin{aligned} r = 1: \quad n_r &= 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} (\partial_\vartheta \xi^{(1)})^2 \\ &= 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_m^{(1)} M_l^{(1)} \frac{\partial P_m(\mu)}{\partial \vartheta} \frac{\partial P_l(\mu)}{\partial \vartheta}, \\ n_\vartheta &= -\varepsilon \partial_\vartheta \xi^{(1)} + \varepsilon^2 (\xi^{(1)} \partial_\vartheta \xi^{(1)} + \partial_\vartheta \xi^{(2)}) \\ &= -\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta} + \varepsilon^2 \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_m^{(1)}(t) M_l^{(1)}(t) \right. \\ &\quad \left. \times P_m(\mu) \frac{\partial P_l(\mu)}{\partial \vartheta} + \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Скалярное произведение выражений (15) и (16) даст выражение для нормальной компоненты электрического поля на поверхности жидкого слоя градины:

$$\begin{aligned} E_n &= (3E_0\mu + Q) + \varepsilon(3E_0\mu + Q) \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) M_n^{(1)} P_n(\mu) \\ &\quad + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (3E_0\mu + Q) \left[(n-1) M_n^{(2)} + (1+n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m M_m^{(1)} M_l^{(1)} K_{m,l,n} \right] + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ [3(4E_0\mu + Q) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (m+1)(m+2)(3E_0\mu + Q)] M_m^{(1)} M_l^{(2)} K_{m,l,n} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3m(m+1)}{2m+1} E_0 M_m^{(1)} M_l^{(1)} (K_{m+1,l,n} - K_{m-1,k,n}) \right\} P_n(\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

5. Анализ полученных результатов

Прежде чем исследовать выражение для напряженности электрического поля (17), необходимо найти решения систем уравнений (8) и (11), описывающих временные зависимости амплитуд взаимодействующих мод осцилляций поверхностно заряженного слоя жидкости на твердом сферическом ядре в однородном внешнем

электростатическом поле. Поскольку решение бесконечных связанных систем дифференциальных уравнений (8) и (11) невозможно, ограничимся конечным количеством мод, а сам расчет будем проводить численно. Предварительные оценки показали, что при начальном возбуждении k -й моды заметный вклад в формирование рельефа свободной поверхности жидкости вносят моды, близкие по номеру к изначально возбужденной. Поэтому при нижеследующих расчетах будем учитывать взаимодействие k -й моды только с четырьмя соседними ($k \pm 1$, $k \pm 2$). Необходимо отметить, что моды с номерами $n \neq k$ возбуждаются вследствие межмодового взаимодействия, которое появляется благодаря наличию внешнего электрического поля и определяется в системах (8) и (11) коэффициентами $A_n^{(n-2)}$ и $A_n^{(n+2)}$ (пропорциональными E_0^2) и $A_n^{(n-1)}$ и $A_n^{(n+1)}$ (пропорциональными E_0).

Анализ систем связанных дифференциальных уравнений (8) и (11) показывает, что в соответствии с общей теорией связанных колебаний [13] коэффициенты связи k -й моды с $(k \pm j)$ -й модой

$$\lambda_k \equiv \frac{A_k^{(k \pm j)}}{\omega_k \omega_{k \pm j}},$$

так же как и коэффициенты связности мод

$$\mu_k \equiv \frac{|\omega_k^2 - \omega_{k \pm j}^2|}{\omega_k \omega_{k \pm j}},$$

малы всюду, кроме ближайших окрестностей критических для реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости значений параметров W и w . Но поскольку рассматриваются только высокие моды с $k \approx 10$ (именно они возбуждаются в жидком слое при столкновении градины с облачными каплями), а неустойчивость заряженной поверхности жидкости на поверхности градины определяется основной ($k = 2$) модой, то в рассматриваемой задаче можно считать взаимодействие мод слабым.

Отталкиваясь непосредственно от вида уравнений (8) и (11), можно провести количественную оценку величины связи мод, разделив коэффициенты $A_k^{(k \pm j)}$ на квадрат частоты k -й моды ω_k^2 . На рис. 1 представлены зависимости такого отношения ($J \equiv |A_k^{(k \pm j)}| / \omega_k^2$) от номера моды. Видно, что для всех номеров мод, связанных взаимодействием, интенсивность взаимодействия мала и быстро уменьшается с ростом j .

На рис. 2–5 приведены результаты расчетов по (17) в виде зависимостей безразмерной напряженности электрического поля собственного заряда градины от полярного угла, безразмерного времени, когда начальная деформация равновесной сферической формы слоя жидкости на поверхности градины определена одной из мод осцилляций с номером $k \gg 2$.

Из рис. 2, на котором изображены зависимости величины напряженности у поверхности градины от полярного угла ϑ , видно, что в отличие от разобранных в [10]

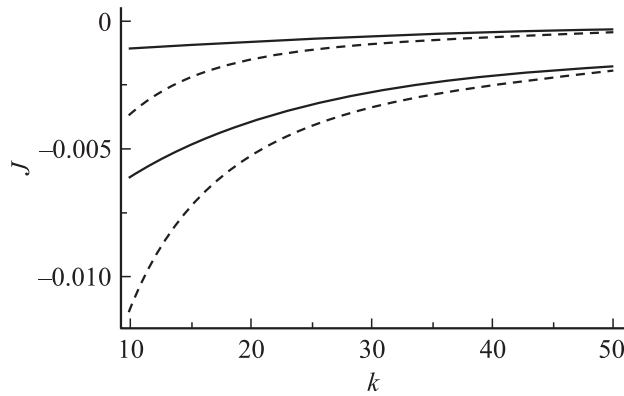


Рис. 1. Характеристики интенсивности взаимодействия мод. Зависимости J — отношения коэффициентов $A_k^{(k\pm j)}$ с $j = 1; 2$ дифференциальных уравнений (8) и (11) к квадрату безразмерной частоты ω_k^2 от номера моды k (условно считающегося изменяющимся непрерывно), рассчитанные при $w = 0.1$, $W = 0.1$, $R_0 = 0.98$. Тонкая сплошная кривая соответствует отношению $A_k^{(k-2)}/\omega_k^2$, жирная сплошная кривая — $A_k^{(k-1)}/\omega_k^2$, жирный пунктир — $A_k^{(k+1)}/\omega_k^2$, тонкий пунктир — $A_k^{(k+2)}/\omega_k^2$.

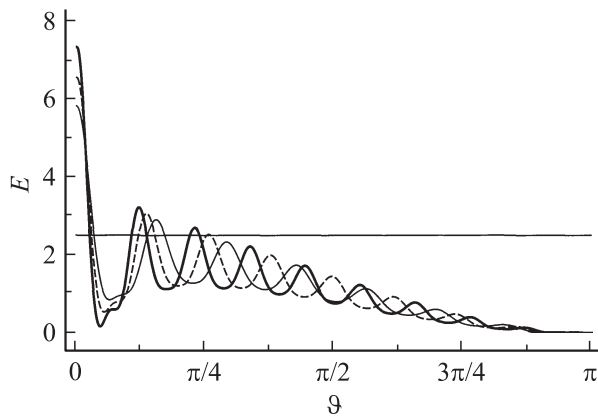


Рис. 2. Зависимость от полярного угла ϑ величины безразмерной напряженности электрического поля E в окрестности свободной поверхности заряженного слоя жидкости на поверхности обводненной градины в момент времени $t = 0$, когда начальная деформация определяется модой с номером $k = 14$ (тонкая сплошная кривая), $k = 16$, $k = 18$ (жирная сплошная кривая) при $W = 0.1$, $w = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, $R_0 = 0.98$. Здесь и на остальных рисунках прямая линия $E = 2.5$ соответствует безразмерной напряженности электростатического поля 20 kV/cm , критической для зажигания коронного разряда в облаке на высоте $4\text{--}5 \text{ km}$.

ситуации заряженной градины в отсутствие внешнего электрического поля в настоящем исследовании напряженность электрического поля у поверхности градины не является симметричной относительно экваториальной плоскости и уменьшается при изменении ϑ от 0 до π . Тем не менее на лобовой части градины в окрестности вершины $\vartheta \approx 0$ напряженность поля в несколько раз превышает критическую для зажигания коронного разря-

да величину даже при малых значениях заряда градины и величины напряженности внешнего электрического поля: $W = 0.1$ и $w = 0.1$. Из соотношения (17) видно, что величина полной напряженности поля на свободной поверхности слоя жидкости линейна по величине заряда градины Q и напряженности внешнего поля E_0 . Сказанное означает, что, согласно результатам расчетов, приведенных на рис. 2, напряженность поля на лобовой части градины (при $\vartheta \approx 0$) будет превышать критическую для зажигания коронного разряда величину даже при еще меньших значениях заряда градины и напряженности внешнего электрического поля (при $\varepsilon = \text{const}$) или при меньших значениях ε (при $W = w = \text{const}$). Сказанное позволяет согласовать развиваемые в [1–3,9,10,14–18] представления о возможности зажигания разряда молнии с коронного разряда в окрестности крупной обводненной градины, свободно падающей в грозовом облаке, с натурными измерениями зарядов градин и капель и напряженности внутриоблачного электрического поля [4].

Основным механизмом возбуждения нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности градины является ее столкновение при падении в облаке с мелкими каплями, составляющими облако. Максимум concentra-

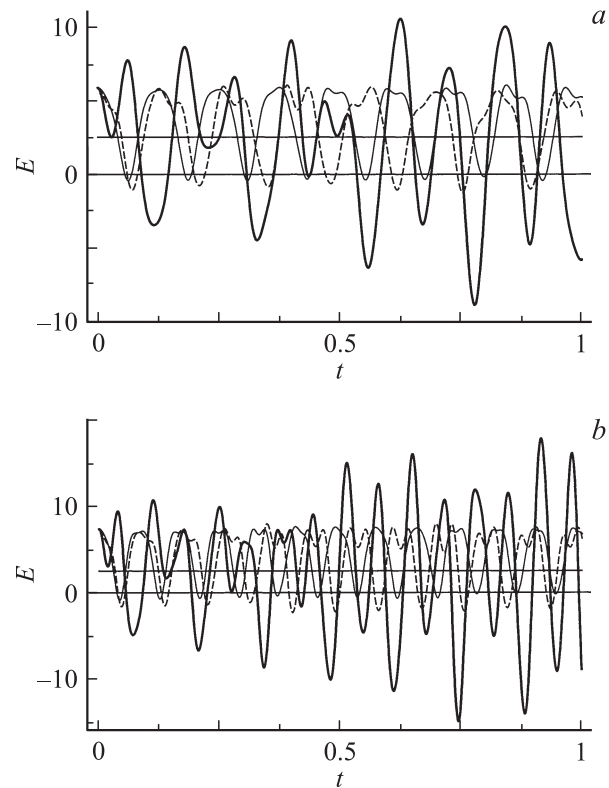


Рис. 3. Зависимость от времени величины безразмерной напряженности электрического поля на поверхности обводненной градины на оси симметрии системы $\vartheta = 0$ для различных значений толщины жидкого слоя $R_0 = 0.9$ (тонкая сплошная кривая), $R_0 = 0.94$ (пунктир), $R_0 = 0.98$ (жирная сплошная кривая), рассчитанные при $W = 0.1$, $w = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$, когда начальная деформация определяется: *a* — четырнадцатой модой ($k = 14$); *b* — восемнадцатой ($k = 18$).

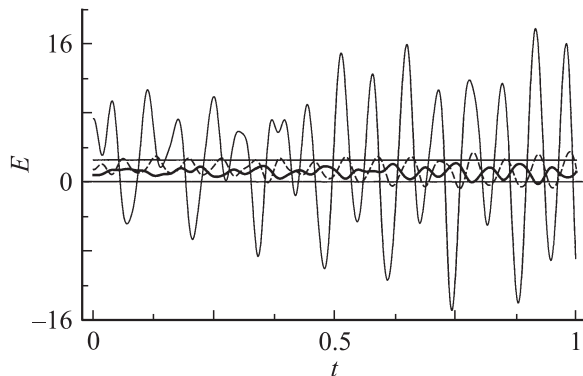


Рис. 4. Зависимости от безразмерного времени величины безразмерной напряженности электрического поля E в окрестности свободной поверхности заряженного слоя жидкости на поверхности обводненной градины при различных значениях углов $\vartheta = 0$ (тонкая сплошная кривая), $\vartheta = 0.3$ (пунктир), $\vartheta = \pi/2$ (жирная сплошная кривая) при $R_0 = 0.98$, когда начальная деформация определяется восемнадцатой модой ($k = 18$) и $W = 0.1$, $w = 0.1$, $\varepsilon = 0.1$.

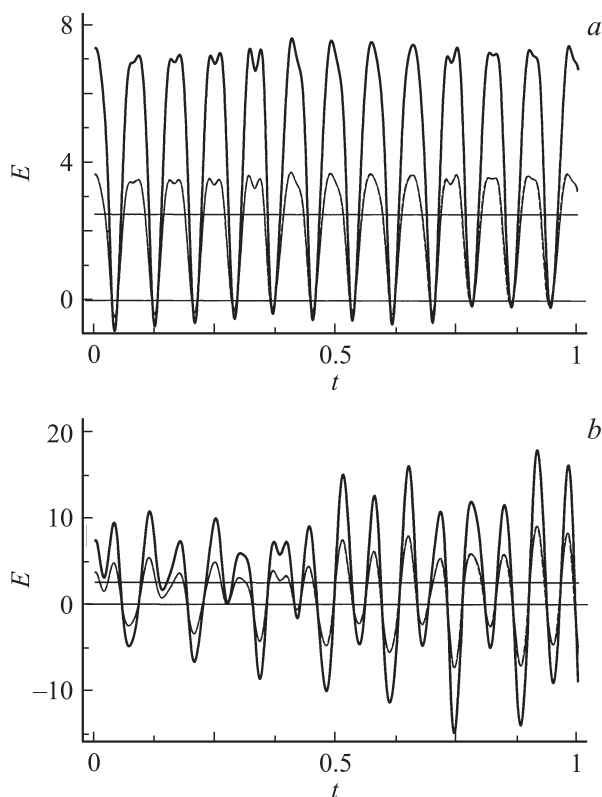


Рис. 5. То же, что на рис. 4, но рассчитанное при $\vartheta = 0$, $\varepsilon = 0.1$ и различных значениях параметров W и w : $W = 0.1$, $w = 0$ (тонкая сплошная кривая), $W = 0$, $w = 0.1$ (пунктир), $W = 0.1$, $w = 0.1$ (жирная сплошная кривая) при $R_0 = 0.9$ (a); $R_0 = 0.98$ (b), когда начальная деформация определяется восемнадцатой модой ($k = 18$).

ции облачных капель приходится на капли радиусом $r_0 \approx 10 \mu\text{m}$ (см. [19], стр. 132). Принимая, что радиус градины $R_0 \approx 100 \mu\text{m}$, можно получить оценку на но-

мера возбуждающихся мод осцилляций жидкого слоя: $k \propto R_0/r_0 \approx 10$. Поэтому иллюстрационные расчеты, результаты которых приведены на рис. 2–4, проведены для мод с номерами $k \approx 10$.

На рис. 3 приведены временные зависимости напряженности поля на поверхности градины, рассчитанные для высоких мод при различных толщинах слоя жидкости на градине. Видно, что величина напряженности поля в окрестности лобовой части ($\vartheta \approx 0$) свободной поверхности жидкого слоя на поверхности градины увеличивается с ростом номера изначально возбужденной моды и с уменьшением толщины слоя жидкости. Из рис. 4 видно, что с наибольшей вероятностью следует ожидать зажигания коронного разряда на лобовой части градины, что согласуется с данными рис. 2.

На рис. 5 приведены зависимости от времени величины напряженности электрического поля на лобовой части поверхности обводненной градины при различных значениях безразмерных параметров W и w . Интересно, что разность значений напряженности электрического поля на вершине градины в ситуациях: $W = 0.1$, $w = 0$ (заряженная градина в отсутствие поля) и $W = 0$, $w = 0.1$ (незаряженная градина при наличии внешнего поля) на рис. 5 неразличима на толщине линий, т.е. кривые, соответствующие ситуациям $W = 0.1$, $w = 0$ и $W = 0$, $w = 0.1$, практически совпадают. Это обстоятельство становится очевидным, если учесть, что, согласно (17), наиболее существенный вклад в величину напряженности поля на вершине градины дают компоненты $\sim (3E_0\mu + Q)$, согласно введенным обозначениям: $Q = \sqrt{4\pi W}$ и $3E_0 = \sqrt{4\pi w}$. Отсюда видно, что при $\mu = 1$ вклады в величину напряженности поля от собственного и индуцированного зарядов при равных значениях параметров W и w практически совпадают.

В завершение следует отметить, что приведенные выше иллюстрации (рис. 2–5) к аналитическому выражению (17) для величины напряженности поля на вершинах градины имеют качественный характер и демонстрируют лишь тенденции изменения напряженности при изменении физических параметров системы, поскольку рассчитаны с погрешностями против асимптотичности. Численные расчеты к рис. 2–5 проводились из соображений наглядности при $\varepsilon = 0.1$, что и привело к появлению амплитудных значений рассчитанной напряженности ~ 10 . Уменьшение малого параметра ε (безразмерной амплитуды деформации свободной поверхности жидкого слоя в начальный момент времени) в три-четыре раза снизит расчетную напряженность до асимптотически строгих значений, но все результаты проведенного анализа останутся справедливыми.

Заключение

В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде осцилляций в однородном внешнем электростатическом поле заряжен-

ного слоя идеальной несжимаемой электропроводной жидкости на поверхности твердого сферического ядра найдено выражение для напряженности электрического поля в окрестности свободной поверхности жидкости. Показано, что напряженность электростатического поля в лобовой части градины может превышать значение, критическое для зажигания коронного разряда в ее окрестности даже при зарядах и внешних электрических полях, существенно меньших критических для реализации электростатической неустойчивости. С увеличением номера моды, определяющей начальную деформацию равновесной сферической формы, а также с уменьшением толщины жидкого слоя на поверхности ядра, напряженность электростатического поля у вершин локальных выступов на заряженной свободной поверхности обводненной градины растет. Коронный разряд на гребнях капиллярных волн на поверхности жидкого слоя может зажечься при значениях заряда градины и напряженности электрического поля, наблюдаемых в грозových облаках.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета, при поддержке грантов Рособразования № 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

- [1] Дьячук В.А., Мучник В.А. // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
- [2] Бейтуганов М.Н. // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 49.
- [3] Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [4] Облака и облачная атмосфера. Справочник / Под ред. И.П. Мазина, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитова. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
- [5] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
- [6] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 15–22.
- [8] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 1–7.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [10] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 11. С. 10–19.
- [11] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 26–34.
- [12] Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Нелинейные осцилляции заряженных капель во внешних силовых полях. М.: Изд-во РГОТУПС, 2007. 187 с.
- [13] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1983. 455 с.
- [14] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [15] Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
- [16] Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 23–31.

- [17] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [19] Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.