

01;09

## Синхронизация спектральных компонент в системах с однонаправленной связью

© О.И. Москаленко

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия  
e-mail: moskalenko@nonlin.sgu.ru

(Поступило в Редакцию 10 ноября 2009 г.)

Исследуется синхронизация спектральных компонент в однонаправленно связанных хаотических системах. Показано, что поведение спектральных компонент в этом случае определяется величиной расстройки между взаимодействующими системами. Обнаружены универсальные закономерности, имеющие место при синхронизации спектральных компонент

### Введение

Синхронизация хаотических колебаний представляется в настоящее время одним из фундаментальных феноменов современной теории колебаний и волн и нелинейной динамики [1], имеющих важное теоретическое и прикладное значение, например, в случае скрытой передачи информации при помощи детерминированных хаотических сигналов [2–4], в биологических [5,6], физиологических [7–9], химических [1–12] задачах, при управлении хаосом, в том числе в системах СВЧ-электроники [13–16].

В настоящее время выявлено несколько типов синхронного поведения однонаправленно и взаимно связанных хаотических систем, каждый из которых характеризуется своими принципиальными особенностями. Это прежде всего фазовая синхронизация [17], обобщенная синхронизация [18], синхронизация с запаздыванием (lag-синхронизация) [20] и др. В последнее время в научной литературе активно обсуждается вопрос о взаимосвязи этих типов синхронного поведения друг с другом. В частности, существуют попытки изучения явления фазовой и полной хаотической синхронизации с точки зрения теории информации [21,22]. Известны работы, в которых рассматриваются разные типы синхронизации связанных хаотических осцилляторов как различные виды проявления единых закономерностей, возникающих в связанных нелинейных системах (например, [23,24]). В работах [25–27] предложен подход к описанию синхронного поведения хаотических осцилляторов, основанный на рассмотрении поведения систем на различных временных масштабах. Этот подход, названный синхронизацией временных масштабов, естественным образом обобщает различные типы синхронного поведения, перечисленные выше.

Другим подходом к рассмотрению различных типов хаотической синхронизации с единых позиций является исследование синхронизации спектральных компонент фурье-спектров взаимодействующих систем. Так, в наших работах [28–30] было показано, что различные типы синхронного поведения в системах со взаимной связью (фазовая синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация) представляют собой частные

проявления синхронизации спектральных компонент. В то же время подобных исследований в системах с однонаправленным типом связи в настоящее время не проводилось. Однако рассмотрение таких систем является весьма важным, например, с точки зрения анализа режима обобщенной хаотической синхронизации и его соотношения с другими типами синхронного поведения, в частности с фазовой синхронизацией. Известно, что механизмы, приводящие к установлению этих режимов, являются различными в случае относительно большой и относительно слабой расстройки частот [31–34]. Поэтому интересным представляется вопрос о том, как будет работать подход, основанный на синхронизации спектральных компонент, в случае однонаправленной связи между системами при различных значениях частотной расстройки. Исследованию этой проблемы и посвящена настоящая работа.

### Различные типы хаотической синхронизации и взаимосвязь между ними с позиций синхронизации спектральных компонент

Рассмотрим поведение двух однонаправленно связанных хаотических систем

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_d, \mathbf{g}_d), \\ \dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{G}(\mathbf{x}_r, \mathbf{g}_r) + \varepsilon \mathbf{P}(\mathbf{x}_d, \mathbf{x}_r),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\mathbf{x}_{d,r} = (x_{d,r}^1, x_{d,r}^2, x_{d,r}^3)$  — векторы состояний ведущей и ведомой систем соответственно;  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  определяют векторное поле рассматриваемых систем,  $\mathbf{g}_d$  и  $\mathbf{g}_r$  являются векторами параметров; слагаемое  $\mathbf{P}$  отвечает за однонаправленную связь между системами, а параметр  $\varepsilon$  определяет силу связи между системами.

Известно, что при увеличении параметра связи  $\varepsilon$  в системе (1) возможно последовательное возникновение режимов хаотической фазовой синхронизации, обобщенной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации, причем в зависимости от

величины расстройки управляющих параметров  $\mathbf{g}_d$  и  $\mathbf{g}_r$  фазовая синхронизация возникает либо до, либо после обобщенной [31,35].

В режиме хаотической фазовой синхронизации фазы взаимодействующих хаотических систем, введенные традиционным образом [17], оказываются захваченными, в то время как амплитуды временных реализаций этих систем остаются в общем случае абсолютно не связанными друг с другом. Режим обобщенной синхронизации означает наличие уникальной функциональной зависимости  $\mathbf{F}[\cdot]$  между состояниями ведущей и ведомой систем ( $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ ), причем ее вид может быть как гладким (сильная обобщенная синхронизация), так и фрактальным (слабая обобщенная синхронизация) [36]. Режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием представляют собой сильные формы обобщенной синхронизации: в режиме синхронизации с запаздыванием состояния взаимодействующих систем оказываются идентичными, но сдвинутыми на некоторый временной интервал  $\tau$  (т.е.  $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{x}_d(t - \tau)$ ), в то время как при полной хаотической синхронизации состояния взаимодействующих систем совпадают ( $\mathbf{x}_d(t) \approx \mathbf{x}_r(t)$ ).

Для описания вышеназванных типов хаотической синхронизации в однонаправленно связанных системах с позиций синхронизации спектральных компонент по аналогии с [29] рассмотрим временные реализации, порождаемые ведущим и ведомым хаотическими осцилляторами. Так же как и в случае взаимной связи между системами, фурье-спектры колебаний ведущей и ведомой систем

$$S_{d,r}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{d,r}^j(t) e^{-i2\pi f t} dt \quad (2)$$

(где  $j=1,2,3$ ) в режиме синхронизации с запаздыванием будут связаны друг с другом соотношением

$$S_r(f) \approx S_d(f) e^{-i2\pi\tau f},$$

а для разности мгновенных фаз  $\Delta\phi_f$ , соответствующих спектральной компоненте  $f$  фурье-спектров  $S_{d,r}(f)$ , будет иметь место соотношение

$$\Delta\phi_f = \phi_{f_d}(t) - \phi_{f_r}(t) = 2\pi\tau f. \quad (3)$$

Таким образом, как и в случае взаимной связи между системами, на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  точки, отвечающие разности фаз спектральных компонент хаотических осцилляторов, находящихся в режиме синхронизации с запаздыванием, должны располагаться вдоль прямой, имеющей угловой коэффициент  $k = 2\pi\tau$ . В случае рассмотрения двух идентичных хаотических систем, будет наблюдаться режим полной синхронизации ( $\tau = 0$ ), и соответственно угловой коэффициент  $k$  прямой линии на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  будет равен нулю.

При разрушении режима синхронизации с запаздыванием (например, с уменьшением параметра связи между осцилляторами) часть спектральных компонент фурье-спектров будет выходить из режима синхронизма, что

будет проявляться в отклонении точек на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  от прямой линии. В то же время для систем с однонаправленным типом связи существует целый ряд нерешенных вопросов:

— как будут проявляться режимы обобщенной и фазовой синхронизации в случаях относительно большой и относительно слабой расстройки значений управляющих параметров,

— какие характерные отличия в поведении спектральных компонент можно будет наблюдать в этих случаях,

— как объяснить различия в соотношении между режимами обобщенной и фазовой синхронизации в случае относительно больших и относительно слабых значений расстройки частот?

Для ответа на эти вопросы обратимся к конкретным примерам.

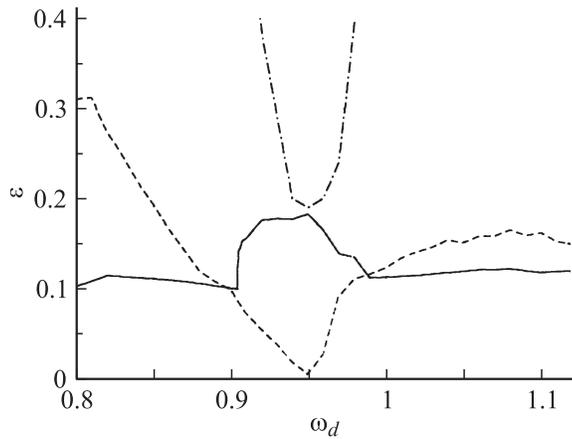
## Хаотическая синхронизация в однонаправленно связанных системах Ресслера

Для иллюстрации синхронизации спектральных компонент в однонаправленно связанных хаотических системах рассмотрим поведение двух систем Ресслера, характеризующихся в автономном режиме фазово-когерентными хаотическими аттракторами [35]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c); \\ \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \quad (4)$$

где индексы  $d$  и  $r$  отвечают ведущей (автономной) и ведомой системам соответственно;  $a = 0.15$ ,  $p = 0.2$ ,  $c = 10.0$  — управляющие параметры, численные значения которых взяты из работы [31]. Параметры  $\omega_{d,r}$  задают собственные частоты ведущей и ведомой систем соответственно. Параметр ведомой системы выберем фиксированным  $\omega_r = 0.95$ , а аналогичный параметр ведущей системы  $\omega_d$  будем изменять в диапазоне  $\omega_d \in [0.8; 1.12]$ , чтобы задать расстройку между взаимодействующими осцилляторами.

На рис. 1 приведены границы возникновения режимов фазовой синхронизации, обобщенной синхронизации и синхронизации с запаздыванием для системы (4) на плоскости параметров  $(\omega_d, \varepsilon)$ . Нетрудно заметить, что режим синхронизации с запаздыванием всегда возникает после возникновения режимов в обобщенной и фазовой синхронизации, в то время как соотношение между последними определяется величиной расстройки между взаимодействующими системами. Для объяснения причин такого поведения границ возникновения синхронных режимов на плоскости параметров „величина



**Рис. 1.** Границы возникновения режимов фазовой синхронизации (штриховая кривая), обобщенной синхронизации (сплошная кривая) и синхронизации с запаздыванием (штрихпунктир) двух однонаправленно связанных систем Ресслера (4) на плоскости параметров  $(\omega_d, \epsilon)$ .

расстройки—интенсивность связи“ рассмотрим, как происходит синхронизация спектральных компонент отдельно для случаев относительно большой и относительно слабой величины расстройки параметров взаимодействующих систем.

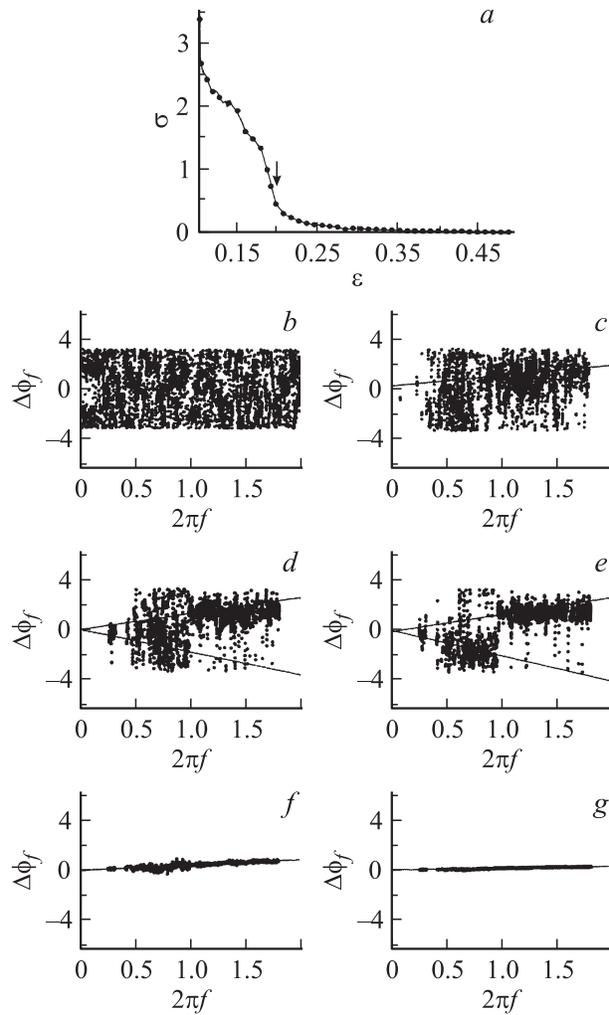
### Случай большой расстройки управляющих параметров

Начнем рассмотрение со случая достаточно больших значений частотной расстройки, т.е. положим параметр  $\omega_d = 0.99$ . Как видно из рис. 1, при выбранных значениях управляющих параметров фазовая синхронизация наступает после обобщенной (см. также [35]). В то же время ввиду достаточно большой расстройки управляющих параметров в данном случае удастся диагностировать наличие синхронного режима (синхронизации временных масштабов) до порога возникновения фазовой синхронизации [37]. Кроме того, как упоминалось выше, при достаточно больших значениях параметра связи  $\epsilon$  между системами имеет место синхронизация с запаздыванием. Значения параметра связи, соответствующие порогам возникновения синхронных режимов равны соответственно  $\epsilon_{\text{TSS}} = 0.1$  — для синхронизации временных масштабов,  $\epsilon_{\text{GS}} = 0.112$  — для обобщенной синхронизации,  $\epsilon_{\text{PS}} = 0.118$  — для фазовой синхронизации,  $\epsilon_{\text{LS}} \approx 0.50$  — для синхронизации с запаздыванием.

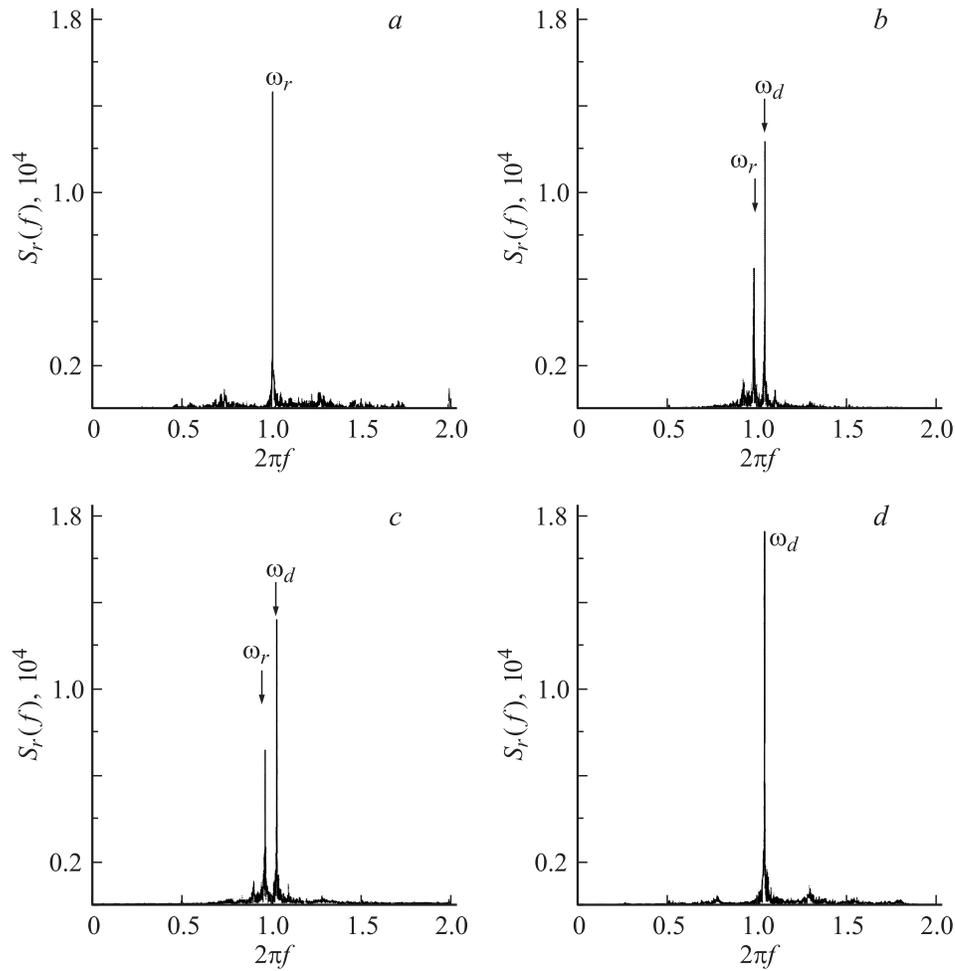
Рассмотрим, как проявляется переход от одного типа синхронного поведения к другому на языке фурье-спектров. Для характеристики степени синхронизации будем рассматривать количественную характеристику числа спектральных компонент фурье-спектров  $S_{d,r}(f)$ , находящихся в режиме синхронизма

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta\phi_{f_j} - 2\pi\tau f_j)^2, \quad (5)$$

аналогичную введенной в работе [29]. Здесь суммирование ведется по всем спектральным компонентам фурье-спектров  $S_{d,r}(f)$ , временное запаздывание  $\tau$  определяется как временной сдвиг между спектральными компонентами фурье-спектров, на которые приходится наибольшая доля энергии колебаний. В режимах полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием значение  $\sigma$  должно стремиться к нулю. После разрушения этих режимов, вызванного уменьшением значения параметра связи,  $\sigma$  будет нарастать по мере увеличения числа спектральных компонент фурье-спектров  $S_{d,r}(f)$ , вышедших из синхронного состояния.



**Рис. 2.** *a* — зависимость величины  $\sigma$  от параметра связи  $\epsilon$  и *b–g* — разность фаз  $\Delta\phi_f$  для различных спектральных компонент  $f$  фурье-спектров  $S_{d,r}(f)$  двух связанных систем Ресслера (4) в случае относительно большой расстройки собственных частот для различных значений силы связи  $\epsilon$ . *b* — асинхронная динамика при  $\epsilon = 0.02$ ; *c* — режим синхронизации временных масштабов  $\epsilon = 0.1$ ; *d* — режим обобщенной синхронизации  $\epsilon = 0.112$ ; *e* — режим фазовой синхронизации  $\epsilon = 0.118$ ; *f* —  $0.25$ ; *g* — режим синхронизации с запаздыванием  $\epsilon = 0.52$ . Прямые на *c–g* соответствуют синхронизованным спектральным компонентам.



**Рис. 3.** Фурье-спектры ведомой системы Ресслера из (4) при различных значениях силы связи:  $a$  —  $\varepsilon = 0$ ;  $b$  — 0.112;  $c$  — 0.118;  $d$  — 0.2. Спектральные компоненты, соответствующие собственным частотам ведущей  $\omega_d$  и ведомой  $\omega_r$  систем, показаны стрелками.

На рис. 2,  $a$  приведена зависимость величины  $\sigma$  от интенсивности связи между системами. Видно, что по аналогии со случаем взаимной связи  $\sigma$  стремится к нулю при больших  $\varepsilon$ , что свидетельствует об установлении в системе (4) режима синхронизации с запаздыванием. В то же время характер самой зависимости  $\sigma$  от  $\varepsilon$  несколько отличается от случаев взаимной связи, рассмотренных в [29,30]. При  $\varepsilon < 0.2$  (показано на рисунке стрелкой)  $\sigma$  уменьшается достаточно резко, в то время как для  $\varepsilon \geq 0.2$  происходит плавное уменьшение величины  $\sigma$ . Почему так происходит, позволяет понять рис. 2,  $b$ – $g$ , где приведены значения разности фаз для различных спектральных компонент Фурье-спектров однонаправленно связанных систем Ресслера (4). До возникновения синхронного режима ( $\varepsilon = 0.02$ ) все спектральные компоненты рассинхронизованы, т. е. все точки на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  распределены случайным образом (см. рис. 2,  $b$ ). Ситуация аналогична случаю взаимной связи между системами. При увеличении параметра связи происходит последовательная синхронизация спектральных компонент. Так, при  $\varepsilon = 0.1$  (рис. 2,  $c$ ) синхро-

низуется одна спектральная компонента (отвечающая основной спектральной компоненте ведущей системы, что проявляется в появлении некоторого „фазового сгустка“ вблизи этой частоты). Этот момент соответствует возникновению синхронизации временных масштабов.

Возникновение режима обобщенной синхронизации при выбранных значениях управляющих параметров сопровождается появлением двух синхронизованных спектральных компонент соответствующих основной частоте ведущей и частоте ведомой систем (более подробно см. работу [33]). Как видно из рис. 2,  $d$ , соответствующего параметру связи  $\varepsilon = 0.112$ , при котором в системе (4) наблюдается режим обобщенной синхронизации, спектральные компоненты в этом случае „выстраиваются“ вдоль двух прямых, углы наклона которых соответствуют временным сдвигам

$$\tau_{d,r} = \Delta\phi_f(\omega_{d,r})/\omega_{d,r}$$

между основными спектральными компонентами ведущей и ведомой систем соответственно.

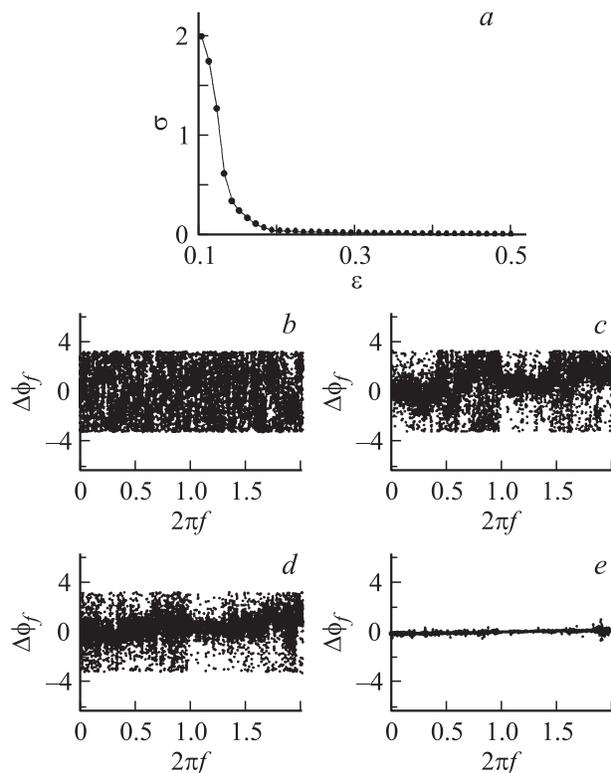
Фурье-спектр ведомой системы в этом случае содержит две четко выраженные спектральные компоненты, соответствующие упомянутым выше частотам (см. рис. 3, *b*, ср. с рис. 3, *a*, где показан аналогичный спектр в автономном режиме ( $\varepsilon = 0$ )). При наступлении режима фазовой синхронизации ( $\varepsilon = 0.118$ , рис. 2, *e*) основных спектральных компонент в фурье-спектре ведомой системы по-прежнему две, однако изменяется их интенсивность (см. рис. 3, *c*). Возникновение режима фазовой синхронизации в данном случае сопровождается появлением фазовой когерентности хаотического аттрактора ведомой системы, потерянной при  $\varepsilon \approx 0.11$  [32,34]. Дальнейшее увеличение силы связи приводит к „подавлению“ спектральной компоненты на „собственной“ частоте ведомой системы. Таким образом, в ее фурье-спектре будет присутствовать только одна четко выраженная спектральная компонента на основной частоте ведущей системы (см. рис. 2, *d*). Такая ситуация имеет место при  $\varepsilon \geq 0.2$ , что и объясняет изменение характера зависимости  $\sigma(\varepsilon)$ . Теперь все спектральные компоненты должны „выстраиваться“ вдоль одной прямой, а увеличение интенсивности связи приведет к их последовательной синхронизации (по аналогии со случаем взаимной связи). Таким образом, рис. 2, *f* ( $\varepsilon = 0.25$ ) соответствует режиму достаточно сильной фазовой синхронизации, когда синхронизована большая часть спектральных компонент, а рис. 2, *g* ( $\varepsilon = 0.52$ ) иллюстрирует режим синхронизации с запаздыванием, когда все спектральные компоненты синхронизованы.

### Случай малой расстройки управляющих параметров

Теперь рассмотрим случай относительно слабой расстройки значений управляющих параметров взаимодействующих систем (4). Для этого выберем параметр ведущей системы  $\omega_d = 0.97$ , оставив значения всех остальных управляющих параметров неизменными, и исследуем переход от асинхронного состояния к режиму синхронизации с запаздыванием в системе (4).

На рис. 4 иллюстрируется поведение спектральных компонент при изменении параметра связи  $\varepsilon$ . По аналогии с рис. 2 здесь приведена также зависимость величины  $\sigma$  от интенсивности связи между системами (рис. 4, *a*), характер которой свидетельствует об установлении режима синхронизации с запаздыванием в системе при  $\varepsilon_{LS} \approx 0.24$ , что достаточно хорошо согласуется с границей синхронизации с запаздыванием, приведенной на рис. 1. Кроме того, из рисунка видно, что режим фазовой синхронизации наступает в данном случае при  $\varepsilon_{PS} = 0.092$ , в то время как обобщенная синхронизация имеет место при  $\varepsilon \geq \varepsilon_{GS} = 0.139$ , т.е. режим фазовой синхронизации наступает раньше обобщенной.

При относительно слабой расстройке собственных частот поведение спектральных компонент качественно аналогично случаям взаимной связи между системами, рассмотренными в [29,30]. Если в системе имеет место асинхронная динамика ( $\varepsilon = 0.01$ ), все спектральные компоненты (точки на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$ )



**Рис. 4.** *a* — зависимость величины  $\sigma$  от параметра связи  $\varepsilon$  и *b*–*e* — разность фаз  $\Delta\phi_f$  для различных спектральных компонент  $f$  фурье-спектров  $S_{d,r}(f)$  двух связанных систем Ресслера (4) в случае относительно слабой расстройки собственных частот для различных значений силы связи  $\varepsilon$ . *b* — асинхронная динамика при  $\varepsilon = 0.01$ ; *c* — режим фазовой синхронизации  $\varepsilon = 0.092$ ; *d* — режим обобщенной синхронизации  $\varepsilon = 0.14$ ; *e* — режим синхронизации с запаздыванием  $\varepsilon = 0.30$ .

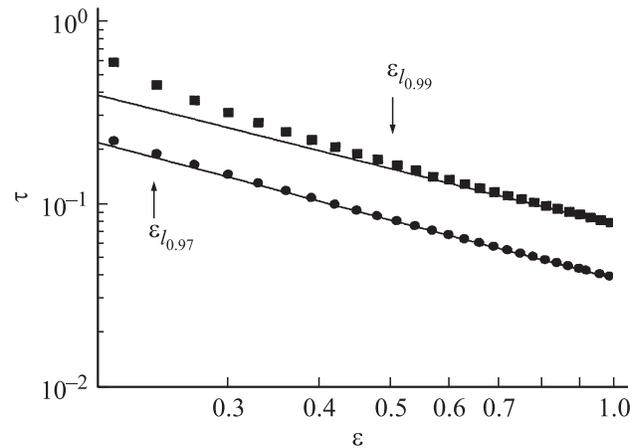
распределены случайным образом в диапазоне  $[-\pi; \pi]$  (см. рис. 4, *b*). При  $\varepsilon = 0.092$  (рис. 4, *c*) происходит „захват собственных частот“ (на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  появляется „фазовый сгусток“) и возникает режим фазовой синхронизации (в этом случае пороги возникновения режимов фазовой синхронизации и синхронизации временных масштабов примерно совпадают [37]). При  $\varepsilon = 0.14$  имеет место режим обобщенной синхронизации. Следует отметить, что механизмы возникновения обобщенной синхронизации в этом случае являются несколько другими: установление режима обобщенной синхронизации обусловлено синхронизацией основной частоты ведущей системы и ее субгармоник [33]. Ввиду их относительно слабой интенсивности уловить наличие фазового захвата на этих частотах представляется затруднительным (рис. 4, *d*), а следовательно, проявление режима обобщенной синхронизации на языке спектральных компонент практически не отличается от режима фазовой синхронизации (ср. рис. 4, *c, d*). При  $\varepsilon = 0.24$  наступает режим синхронизации с запаздыванием, что проявляется в расположении всех спектральных компонент на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  вдоль прямой линии (рис. 4, *e*).

Таким образом, переход от одного типа синхронного поведения к другому в однонаправленно связанных хаотических системах также сопровождается синхронизацией спектральных компонент фурье-спектров взаимодействующих систем. В то же время поведение спектральных компонент является „универсальным“ лишь для режимов асинхронной динамики и синхронизации с запаздыванием ввиду одних и тех же механизмов, приводящих к их возникновению как при различных значениях расстройки собственных частот, так и при различных типах связи между системами. Проявление режимов обобщенной и фазовой синхронизации в однонаправленно связанных хаотических системах на языке фурье-спектров определяется величиной расстройки собственных частот взаимодействующих систем. Если их собственные частоты расстроены относительно слабо, фазовая синхронизация возникает за счет захвата основных спектральных компонент. В этом случае только одна спектральная компонента оказывается синхронизованной. При увеличении силы связи между осцилляторами синхронизируются также субгармоники основной частоты ведомой системы, и возникает режим обобщенной синхронизации.

В случае больших расстройек взаимодействующих систем синхронизация одной спектральной компоненты соответствует возникновению синхронизации временных масштабов. Когда синхронизируется вторая спектральная компонента, возникает режим обобщенной синхронизации. В этом случае в фурье-спектре ведомой системы можно различить две четко выраженные спектральные компоненты, а все точки на плоскости  $(f, \Delta\phi_f)$  выстраиваются вдоль двух прямых, углы наклона которых соответствуют временным сдвигам между этими спектральными компонентами. Наличие в фурье-спектре ведомой системы двух четко выраженных спектральных компонент свидетельствует о том, что аттрактор этой системы является фазово-некогерентным. В этом случае диагностировать фазовую синхронизацию не удастся. При дальнейшем увеличении параметра связи уменьшается интенсивность спектральной компоненты на частоте ведомой системы, что приводит к тому, что хаотический аттрактор ведомой системы снова становится фазово-когерентным. В этом случае становится снова возможно диагностировать фазовую синхронизацию традиционными методами, что и соответствует моменту возникновения режима фазовой синхронизации при больших расстройках [32,34].

## Универсальные закономерности при синхронизации спектральных компонент

Коротко остановимся на универсальных закономерностях, имеющих место при синхронизации спектральных компонент. В работе [28] было показано как аналитически, так и численно, что в режиме синхронизации



**Рис. 5.** Зависимость временного сдвига  $\tau$  между основными частотными компонентами фурье-спектров однонаправленно связанных систем Ресслера (4) от параметра связи  $\varepsilon$  в случае относительно большой ( $\omega_d = 0.99$ ) (■) и относительно слабой ( $\omega_d = 0.97$ ) (●) расстройки собственных частот. Сплошные линии соответствуют степенным законам  $\tau = k\varepsilon^n$  с показателем степени  $n = -1$  ( $k = 0.04$  при  $\varepsilon = 0.97$ ,  $k = 0.08$  при  $\varepsilon = 0.99$ ). Значения параметров связи  $\varepsilon_{I_{0,99}} = 0.5$  и  $\varepsilon_{I_{0,97}} = 0.24$ , соответствующие порогам возникновения режима синхронизации с запаздыванием, показаны стрелками. Видно, что после установления режима синхронизации с запаздыванием, независимо от величины частотной расстройки, имеет место универсальный степенной закон.

с запаздыванием зависимость временного сдвига между частотными компонентами (этот сдвиг является одинаковым для всех частот) от параметра связи подчиняется универсальному степенному закону  $\tau \propto \varepsilon^{-1}$ , причем этот закон имеет место как в однонаправленно, так и взаимно связанных системах. Для подтверждения универсальности этого феномена покажем, что вышеупомянутый степенной закон выполняется в случаях как относительно большой, так и относительно слабой расстройки собственных частот.

На рис. 5 приведены зависимости временных сдвигов между синхронизованными спектральными компонентами от параметра связи  $\varepsilon$  для случаев большой и малой расстройки собственных частот, рассмотренных выше, и соответствующие аппроксимации. Видно, что в обоих случаях после установления режима синхронизации с запаздыванием имеет место универсальный степенной закон.

## Заключение

В настоящей работе проведено исследование синхронизации спектральных компонент в однонаправленно связанных хаотических системах. Показано, что различные типы хаотической синхронизации могут быть рассмотрены как частные проявления синхронизации спектральных компонент, причем поведение спектральных компонент в режимах синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации не зависит от величины

расстройки между системами. В этих случаях имеет место универсальный степенной закон зависимости временного сдвига между частотными компонентами взаимодействующих систем от параметра связи.

Проявление режимов фазовой и обобщенной синхронизации в области больших и малых значений расстройки частот является различным, что обусловлено различием в механизмах, приводящих к их установлению в обоих случаях. Если частоты взаимодействующих систем расстроены достаточно слабо, фазовая синхронизация возникает за счет синхронизации одной спектральной компоненты, соответствующей собственной частоте колебаний ведущей системы, в то время как установление обобщенной синхронизации обусловлено синхронизацией нескольких спектральных компонент, соответствующих основной частоте и ее субгармоникам. Возникновение обобщенной синхронизации обусловлено синхронизацией большего числа спектральных компонент, следовательно, реализация этого режима возможна только после установления фазовой синхронизации.

В случае относительно большой расстройки параметров взаимодействующих систем захвата основных частот не происходит, но в то же время возможна синхронизация двух спектральных компонент, соответствующих основной частоте ведущей системы и собственной частоте ведомой. В этом случае реализуется режим обобщенной синхронизации, а диагностирование фазовой синхронизации оказывается невозможным из-за потери фазовой когерентности хаотического аттрактора. Увеличение силы связи между системами приводит к подавлению спектральной компоненты на частоте ведомой системы, что способствует появлению фазовой когерентности аттрактора, а следовательно и возникновению фазовой синхронизации. Поэтому в области относительно больших значений расстройки собственных частот фазовая синхронизация возникает после обобщенной.

Работа выполнена при поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России“ на 2009–2013 гг.

## Список литературы

- [1] Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003;
- [2] Roy R. // Nature. 2005. Vol. 438. P. 298–299.
- [3] Jaeger H., Haas H. // Science. 2008. Vol. 304. P. 78–80.
- [4] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // УФН. 2009. Т. 179 (12). С. 1281–1310.
- [5] Glass L. // Nature (London). 2001. Vol. 410. P. 277–284.
- [6] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Fluctuation and Noise Letters. 2006. Vol. 4. P. 1.
- [7] Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.E. Chaotic synchronization, applications to living systems. Ser. A. Vol. 42. Singapore: World Scientific, 2002.
- [8] Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I., Bodrov M.B., Bespyatov A.V. // Phys. Rev. E. 2003. Vol. 68. P. 041 913.
- [9] Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Yip K.P., Holstein-Rathlou N.H., Marsh D.J. // Amer. J. Physiology (Renal Physiology). 2007. Vol. 203. P. F1545–F1555.
- [10] Parmananda P. // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. P. 1595–1598.
- [11] Kiss I.Z., Hudson J.L. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64 (4). P. 046 215.
- [12] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S. Contemporary Phys. 2003. Vol. 44 (5). P. 401–416.
- [13] Rosa E., Pardo W.B., Ticos C.M., Walkenstein J.A., Monti M. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10 (11). P. 2551–2563.
- [14] Трубецков Д.И., Храмов А.Е. // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48 (1). С. 116–124.
- [15] Трубецков Д.И., Короновский А.А., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Радиофизика. 2004. XLVII (5–6). С. 343–372.
- [16] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Popov P.V., Pempen I.S. // Chaos. 2005. Vol. 15 (1). P. 013 705.
- [17] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76 (11). P. 1804–1807.
- [18] Rulkov N.F., Sushchik M.M., Tsimring L.S., Abarbanel H.D.I. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 51 (2). P. 980–994.
- [19] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78 (22). P. 4193–4196.
- [20] Pecora L.M., Carroll T.L. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64 (8). P. 821–824.
- [21] Shabunin A., Demidov V., Astakhov V., Anishchenko V.S. // Phys. Rev. E. 2002. Vol. 65 (5). P. 056 215.
- [22] Шабунин А.В., Демидов В.Е., Астахов В.В., Анищенко В.С. // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. Вып. 11. С. 78–85.
- [23] Boccaletti S., Pecora L.M., Paelaez A. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 066 219.
- [24] Brown R., Kocarev L. // Chaos. 2000. Vol. 10 (2). P. 344–349.
- [25] Короновский А.А., Храмов А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Vol. 79 (7). P. 391–395.
- [26] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. Vol. 14 (3). P. 603–610.
- [27] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Physica D. 2005. Vol. 206 (3–4). P. 252–264.
- [28] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80 (1). С. 25–28.
- [29] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. Вып. 18. С. 54–56.
- [30] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Moskalenko O.I. // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71 (5). P. 056 204.
- [31] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I. // Europhys. Lett. 2005. Vol. 72 (6). P. 901–907.
- [32] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K. // Phys. Rev. E. 2007. Vol. 75 (3). P. 036 205.
- [33] Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52 (8). С. 949–960.
- [34] Короновский А.А., Куровская М.К., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 1. С. 21–29.
- [35] Zheng Z., Hu G. // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62 (6). P. 7882–7885.
- [36] Pyragas K. // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 54 (5). P. R4508–R4511.
- [37] Короновский А.А., Куровская М.К., Храмов А.Е. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 19. С. 76–82.