

## Численное моделирование зарождения вихрей в двухзонной модели Гинзбурга–Ландау

© И.Н. Аскерзаде

Department of Computer Engineering, Engineering Faculty of Ankara University,  
06100, Tandogan, Ankara, Turkey  
Институт физики НАН Азербайджана,  
AZ1143 Баку, Азербайджан  
e-mail: iasker@science.ankara.edu.tr, solstphs@physics.ab.az

(Поступило в Редакцию 19 октября 2009 г.)

Получены нестационарные уравнения в двухзонной модели Гинзбурга–Ландау. Методом численного моделирования проанализирован процесс зарождения абрикосовских вихрей в промежуточном состоянии двухзонного сверхпроводника.

Открытие высокотемпературных купратных соединений [1] и других новых классов сверхпроводников [2,3] в последние годы послужило толчком к созданию новых микроскопических теорий сверхпроводимости. Несмотря на обилие этих моделей теория Гинзбурга–Ландау [4] до сих пор остается мощным инструментом при исследовании некоторых свойств сверхпроводников. Незаменимость теории Гинзбурга–Ландау еще раз выходит на первое место при исследовании динамики абрикосовских вихрей в сверхпроводниках второго рода. Следует отметить, что теория Гинзбурга–Ландау была модифицирована с учетом  $d$ -волновой симметрии параметра порядка в высокотемпературных соединениях [5]. Эти уравнения также используются при изучении флуктуационных эффектов вблизи критической температуры  $T_c$  в однозонных сверхпроводниках [6]. Последним шагом является обобщение теории Гинзбурга–Ландау на случай двухзонных сверхпроводников для исследования свойств диборида магния  $MgB_2$  и намагнитных борокарбидов  $Y(Lu)Ni_2B_2C$  [7–10]. Недавно уравнения двухзонной теории Гинзбурга–Ландау были использованы для расчета флуктуационной проводимости в  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$  [11].

Нестационарные уравнения Гинзбурга–Ландау для однозонных сверхпроводников впервые были выведены в [12] и нашли широкое применение при изучении динамики электромагнитного поведения сверхпроводника во внешнем магнитном поле.

Настоящая работа посвящена выводу нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау и численному моделированию процесса зарождения вихрей в рамках двухзонной модели. Стационарные уравнения для двухзонной модели Гинзбурга–Ландау рассмотрены в [7–11]. Согласно этой модели, функционал свободной энергии Гинзбурга–Ландау для изотропного двухзонного сверхпроводника пишется как

$$F_{SC} = \int d^3r (F_1 + F_{12} + F_2 + H^2/8\pi), \quad (1)$$

где

$$F_i = \frac{\hbar^2}{4m_i} \left| \left( \nabla - \frac{2\pi i \mathbf{A}}{\Phi_0} \right) \Psi_i \right|^2 + \alpha_i(T) \Psi_i^2 + \beta_i \Psi_i^2/2, \quad (2)$$

$$F_{12} = \varepsilon (\Psi_1^* \Psi_2 + c.c.)$$

$$+ \varepsilon_1 \left\{ \left( \nabla + \frac{2\pi i \mathbf{A}}{\Phi_0} \right) \Psi_1^* \left( \nabla - \frac{2\pi i \mathbf{A}}{\Phi_0} \right) \Psi_2 + c.c. \right\}, \quad (3)$$

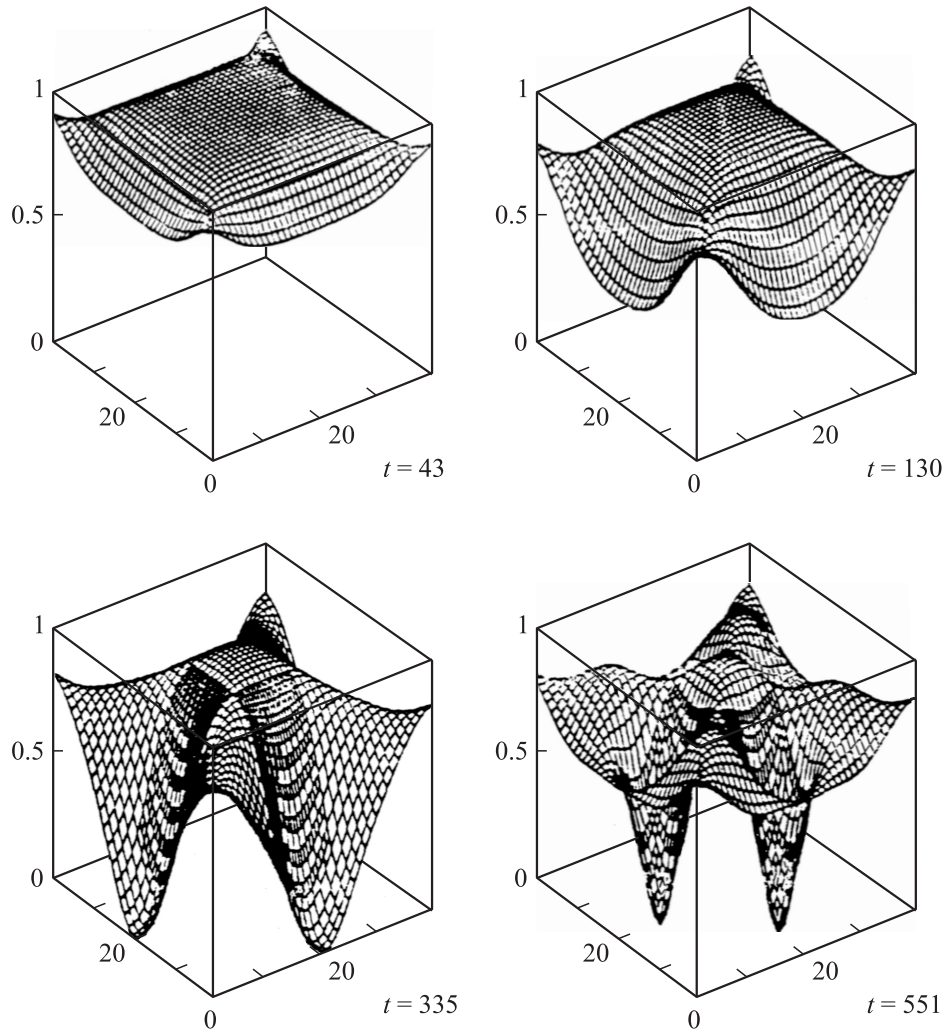
где  $m_i$  обозначает массы электронов, принадлежащих к разным зонам ( $i = 1, 2$ ). Коэффициенты  $\alpha_i$  линейно зависят от температуры:  $\alpha_i = \gamma_i(T - T_{c,i})$ , в то время как  $\beta_i$  полагаются константами. Величины  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_1$  описывают межзонное взаимодействие между параметрами порядка и их градиентами соответственно,  $H$  — внешнее магнитное поле,  $\Phi_0$  — квант магнитного потока. В выражениях (2) и (3) параметры порядка полагаются медленно изменяющимися в пространстве. Минимизация свободной энергии (1)–(3) дает уравнения Гинзбурга–Ландау для описания двухзонных сверхпроводников в стационарном случае [7–11]. Нестационарные уравнения в двухзонной теории Гинзбурга–Ландау выводятся из функционала (1)–(3) аналогично работе [12]:

$$\eta_1 \left( \frac{\partial}{\partial t} + i\kappa\phi \right) \Psi_1 = -\frac{\delta F}{\delta \Psi_1^*},$$

$$\eta_2 \left( \frac{\partial}{\partial t} + i\kappa\phi \right) \Psi_2 = -\frac{\delta F}{\delta \Psi_2^*}, \quad (4)$$

$$\sigma_n \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\phi \right) \Psi_1 = -\frac{1}{2} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}}.$$

Здесь использованы обозначения, принятые в работе [12]. В уравнениях (4)  $\phi$  обозначает скалярный электрический потенциал,  $\eta_{1,2}$  — релаксационные параметры,  $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$  — параметр Гинзбурга–Ландау,  $\sigma_n$  — проводимость. Выбором соответствующей калибровки электростатический потенциал можно исключить из системы уравнений (4) [12]. При такой калибровке и выборе конфигурации магнитного поля (без ограничения общности) в виде  $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ , нестационарные уравнения в двухзонной теории Гинзбурга–Ландау принимают



Результаты численного анализа для сверхпроводящего тока, протекающего в двухзонной сверхпроводящей пленке в перпендикулярном магнитном поле (оси  $ox$ ,  $oy$  лежат в горизонтальной плоскости, плотность сверхпроводящего тока направлена вдоль оси  $oz$ ).

следующий вид:

$$\eta_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{4m_1} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{l_s^2} \right) \Psi_1 + \alpha_1(T) \Psi_1 + \varepsilon \Psi_2 + \varepsilon_1 \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{l_s^2} \right) \Psi_2 + \beta_1 \Psi_1^3 = 0, \quad (5a)$$

$$\eta_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{4m_2} \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{l_s^2} \right) \Psi_2 + \alpha_2(T) \Psi_2 + \varepsilon \Psi_1 + \varepsilon_1 \left( \frac{d^2}{dx^2} - \frac{x^2}{l_s^2} \right) \Psi_1 + \beta_2 \Psi_2^3 = 0, \quad (5b)$$

$$\sigma_n \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{A} + \frac{2\pi}{\Phi_0} \left\{ \frac{\hbar^2}{4m_1} n_1(T) \left( \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right) + \varepsilon_1 (n_1(T)n_2(T))^{0.5} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\hbar^2}{4m_2} n_2(T) \left( \frac{d\varphi_2}{dr} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right) \right\}, \quad (5c)$$

где  $l_s^2 = \hbar c / 2eH$  — так называемая магнитная длина,  $\varphi_{1,2}(\mathbf{r})$  — фаза параметра порядка  $\Psi_{1,2}(\mathbf{r}) = |\Psi_{1,2}| \exp(i\varphi_{1,2})$ ,  $n_{1,2}(T) = 2|\Psi_{1,2}|^2$  — концентрация сверхпроводящих электронов в равновесном состоянии, которые представлены в [9,10]. К этим уравнениям надо добавить еще естественные граничные условия для параметров порядка

$$\mathbf{n} \left( \nabla - \frac{2\pi i \mathbf{A}}{\Phi_0} \right) \Psi_1 = a_{11} \Psi_1 + a_{12} \Psi_2, \quad (6a)$$

$$\mathbf{n} \left( \nabla - \frac{2\pi i \mathbf{A}}{\Phi_0} \right) \Psi_2 = a_{21} \Psi_1 + a_{22} \Psi_2, \quad (6b)$$

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = \mathbf{H}_0 \times \mathbf{n}, \quad (6c)$$

где  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) являются константами. Первые два условия соответствуют отсутствию сверхтока через границу двухзонного сверхпроводника, а второе соответствует непрерывности нормальной компоненты магнитного поля на границе сверхпроводника с вакуумом.

Рассмотрим поведение однородной двухзонной сверхпроводящей пленки постоянной толщины, помещенной в постоянное перпендикулярное магнитное поле. При такой конфигурации модель становится двумерной и аналогично [13] для дальнейшего численного анализа удобно ввести связанные переменные типа

$$\begin{aligned} W(x, y) &= \exp\left(ik \int^x A(\xi, y) d\xi\right), \\ V(x, y) &= \exp\left(ik \int^y B(x, \eta) d\eta\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Система уравнений (5) и (6) переписывается с учетом новых переменных  $W$ ,  $V$ , и в итоге получаются уравнения, удобные для дискретизации. Для получения пространственно-дискретной системы уравнений (5) используем улучшенный метод Эйлера [14]. При проведении численных экспериментов размеры сверхпроводящей пленки полагались равными  $40\lambda \times 40\lambda$ , где  $\lambda$  — длина проникновения магнитного поля для двухзонного сверхпроводника и определяется формулой из работы [10]

$$\lambda^{-2}(T) = \frac{4\pi e^2}{c^2} \left( \frac{n_1(T)}{m_1} + 2\varepsilon_1 (n_1(T)n_2(T))^{0.5} + \frac{n_2(T)}{m_2} \right). \quad (8)$$

При моделировании также вводятся безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \frac{\mathbf{r}}{\lambda}; \quad \Psi'_{1,2} = \frac{\Psi_{1,2}}{\Psi_{(1,2)0}}; \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}}{\lambda H_c \sqrt{2}}; \\ F'(\Psi'_{1,2}, A') &= \frac{F(\Psi_{1,2}, A)}{\alpha_0^2 |\Psi_{1,0}|^2 + \alpha_1^2 |\Psi_{2,0}|^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения для  $\Psi_{(1,2)0}$ , а также для термодинамического магнитного поля  $H_c$  представлены в работах [10,11].

Для решения соответствующих дискретных уравнений двухзонной теории Гинзбурга—Ландау применяется метод адаптивной сетки [14]. Результаты численных расчетов представлены на рисунке в виде пространственно-временной эволюции плотности сверхпроводящего тока в пленке. Значения численных параметров выбраны для типичного двухзонного сверхпроводника  $\text{MgB}_2$  [8–11]. Как видно, со временем внешнее магнитное поле проникает в сверхпроводниковую пленку в виде вихрей. В центре вихря плотность сверхпроводящего тока стремится к нулю. Как видно из численных расчетов, внешнее магнитное поле проникает в сверхпроводящую пленку с боковых сторон симметричным образом.

Расчеты показали, что конечный вид равновесного состояния зависит от величины внешнего магнитного поля  $H$  и параметра Гинзбурга—Ландау  $\kappa$ . В принципе, определение точного количества проникающих вихрей в зависимости от заданных параметров представляет большой интерес и является предметом последующих исследований. Расчеты также подтвердили существование мейсснеровского состояния, т. е. при фиксированном

значении  $\kappa$  и малых магнитных полях  $H < H_{c1}$  зарождения вихрей не наблюдается. Кроме того, структура одиночного вихря в двухзонных сверхпроводниках сильно отличается от однозонных сверхпроводников [15] из-за анизотропного распределения магнитного поля по сечению вихря. По этой причине взаимодействие вихрей в двухзонных сверхпроводниках при их большой плотности упаковки существенно отличается от классического случая однозонных сверхпроводников.

Таким образом, в настоящей работе получены нестационарные уравнения двухзонной теории Гинзбурга—Ландау и проведено численное моделирование этих уравнений во внешнем магнитном поле. Представлены результаты зарождения абрикосовских вихрей в промежуточном состоянии двухзонного сверхпроводника. Полученные результаты представляют интерес с точки зрения динамики вихря в сверхпроводниках со сложной структурой параметра порядка.

## Список литературы

- [1] Высокотемпературная сверхпроводимость: фундаментальные и прикладные исследования. Л.: Машиностроение, 1990. 686 с.
- [2] Nagamatsu J., Nakagawa N., Muranaka T., Zenitani Y., Akimitsu J. // Nature. 2001. Vol. 410. P. 63.
- [3] Drechsler S.L. et al. // Physica C. 1999. Vol. 317–318. P. 117.
- [4] Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. // ЖЭТФ. 1950. Т. 50. С. 1064.
- [5] Berlinsky A.J., Fetter A.L., Franz M. et al. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. P. 2200.
- [6] Асламазов Л.Г., Ларкин А.И. // ФТТ. 1968. Т. 10. С. 1104.
- [7] Askerzade I.N. et al. // Supercond. Sci. Tech. 2002. Vol. 15. P. L13.
- [8] Askerzade I.N. et al. // Supercond. Sci. Tech. 2002. Vol. 15. P. L17.
- [9] Askerzade I.N. // Physica C. 2003. Vol. 390. P. 281.
- [10] Аскерзаде И.Н. // УФН. 2006. Т. 176. С. 1025.
- [11] Аскерзаде И.Н., Рагимов С.С. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 11. С. 82.
- [12] Schmid A. // Phys. Condens. Matter. 1966. Vol. 5. P. 302.
- [13] Kwong M.K., Kaper H.G. // J. Comput. Phys. 1995. Vol. 119. P. 120.
- [14] Thompson J.F., Warsi Z.U.A., Martin C.W. // Numerical Grid Generation. NY: Elsevier, 1985. 330 p.
- [15] Askerzade I.N., Tanatar B. // Commun Theor. Phys. 2009. Vol. 51. P. 563.