

01;03

## Сверхзвуковые течения с малыми возмущениями при наличии внешних воздействий на поток.

### Ч. 2. Тонкий профиль

© Н.А. Герасимов, В.С. Сухомлинов

Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета,  
198903 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: NIKOLAI\_GERASIMO@MAIL.RU

(Поступило в Редакцию 13 июля 2009 г.)

Развита аналитическая теория сверхзвукового обтекания тонкого профиля произвольной формы при наличии вблизи поверхности локальных зон энерговыделения и внешней силы, действующей на поток. При получении основных результатов использовано линейное приближение, справедливое в известном диапазоне внешних условий. Получены аналитические выражения для расчета пространственных распределений возмущения давления около поверхностей тонкого профиля, находящегося под малым углом атаки. Проведено сравнение результатов аналитических расчетов с данными численного моделирования в рамках системы уравнений Эйлера на примере клина, находящегося под нулевым углом атаки. Сравнение показало хорошее согласие численных и аналитических расчетов. Полученные результаты позволяют перейти к формулировке и дальнейшему решению оптимизационных задач сверхзвукового аэродинамического обтекания с помощью внешних воздействий на сверхзвуковой поток.

### Введение

Ранее авторами была построена аналитическая теория сверхзвукового обтекания тонкого тела вращения при наличии внешних воздействий на поток [1], настоящая работа является ее продолжением. В ней будет рассматриваться стационарное сверхзвуковое обтекание сжимаемого идеального газа в линейном приближении. Как известно, аэродинамические силы, действующие на крыло, являются важнейшими характеристиками летательного аппарата. При этом они определяют не только подъемную силу, но и дают существенный вклад в лобовое сопротивление и уровень акустического шума, создаваемого у поверхности земли движущимся со сверхзвуковой скоростью летательным аппаратом. Таким образом, оптимизация сверхзвукового обтекания крыла за счет внешних воздействий является столь же актуальной задачей, как и аналогичная для тела вращения.

Крыло бесконечного размаха выбрано для рассмотрения по следующим причинам. Цель настоящей работы — разработать основные физические принципы оптимизации обтекания крыла за счет внешних воздействий. На начальном этапе в полном объеме такая задача может решаться лишь в аналитическом виде, и с этой точки зрения задача о сверхзвуковом обтекании крыла бесконечного размаха представляется оптимальной.

### Постановка задачи и вывод основных уравнений

Поскольку рассматривается крыло бесконечного размаха, поставленная задача является двумерной. Введем декартову систему координат  $XU$ . При этом пусть в

невозмущенной области массовая скорость  $v_1$  направлена параллельно оси  $X$  (рис. 1). Предположим, что обтекаемый профиль описывается уравнениями:

$$y = Y_+(x), \quad y = Y_-(x), \quad (1)$$

где индексы „+“ и „-“ здесь и далее относятся к верхней и нижней частям профиля крыла соответственно. Выберем расположение профиля крыла в системе координат  $XU$  так, чтобы выполнялись соотношения (см. рис. 1):

$$Y_+(l) = Y_-(l) = 0; \quad Y_+(0) = Y_-(0) = l_y, \quad (2)$$

где  $l$  — размер крыла в направлении массовой скорости.

Пусть на единицу объема обтекающего крыла потока действует внешняя сила  $F(x, y)$  и в потоке газа за счет внешнего энергоподвода выделяется объемная

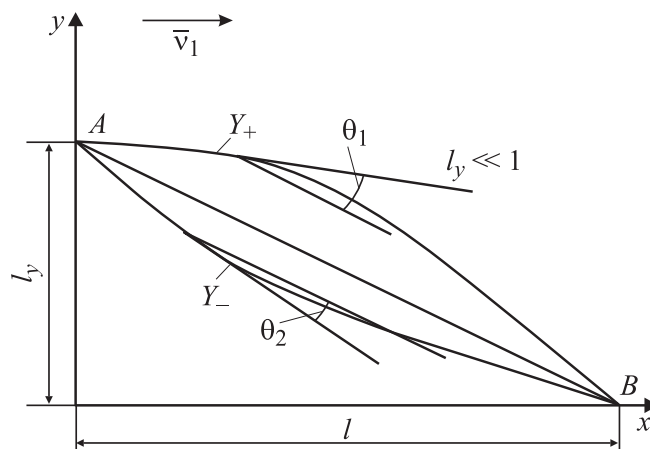


Рис. 1. Схема обтекания тонкого крыла.

плотность мощности  $Q(x, y)$ . Напомним [1] условия на эти функции, при которых течение с известной степенью точности можно считать потенциальным:

$$\frac{\max |F|L}{\rho v_1^2} = O(\omega); \quad \frac{QL}{P_{0c}} = O(\omega);$$

$$\omega = \max \left( \frac{v_x}{v_1}, \frac{v_y}{v_1} \right) \ll 1;$$

$$v = \mathbf{i}_x \cdot (v_1 + v_x) + \mathbf{i}_y v_y; \quad |\text{rot } v| = o(\omega^2). \quad (3)$$

Действуя аналогично случаю обтекания тонкого тела вращения, можно получить уравнение сверхзвукового обтекания в декартовых координатах в линейном приближении:

$$B_0^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\gamma MF(x, y)}{\rho_0 c} - \frac{(\gamma - 1)Q(x, y)}{\rho_0 c^2}, \quad (4)$$

где  $\Phi$  — потенциал возмущения скорости и сохранены обозначения работы [1]. Граничные условия для этого уравнения, которые соответствуют условию непротекания на верхней и нижней поверхностях крыла, соответственно запишутся в виде:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y \rightarrow +0} = v_1 \frac{dY_+}{dx}; \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y \rightarrow -0} = v_1 \frac{dY_-}{dx}. \quad (5)$$

При формулировке граничных условий толщиной профиля крыла можно пренебречь в силу линейности задачи [1]. Введем следующие обозначения:

$$\Phi_1(x, y) = \left[ \frac{\gamma MF(x, y)}{\rho_0 c} - \frac{(\gamma - 1)Q(x, y)}{\rho_0 c^2} \right] l^2; \quad (6)$$

$$\bar{y} = B_0 \frac{y}{l}; \quad \bar{x} = \frac{x}{l}; \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{v_1}.$$

В данных обозначениях задача (3), (4) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{1}{B_0^2 v_1} \Phi_1; \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y} \rightarrow +0} = \frac{1}{B_0} \frac{dY_+}{d\bar{x}}; \quad \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y} \rightarrow -0} = \frac{1}{B_0} \frac{dY_-}{d\bar{x}}. \quad (7a)$$

## Решение уравнения обтекания

Как и ранее (см. [1]), будем считать, что функция  $\Phi_1(\bar{x})$  зависит только от координаты  $\bar{x}$  и отлична от нуля в тонком слое толщиной  $\delta_p(\bar{x})$  у поверхности обтекаемого профиля, который в свою очередь, много толще пограничного слоя:

$$\delta_p(\bar{x}) = \bar{\delta}_p(\bar{x})l; \quad \bar{\delta}_p(\bar{x}) \ll 1. \quad (8)$$

Вне этого слоя и в области, ограниченной характеристиками, выходящими из начальной и конечной точек

профиля, уравнение однородно и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{x}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \bar{y}^2} = 0$$

$$\text{при } \bar{y} > Y_+(\bar{x}) + \bar{\delta}_p(\bar{x}); \quad \bar{y} < Y_-(\bar{x}) - \bar{\delta}_p(\bar{x}). \quad (9)$$

Для простоты предположим, что слой, в котором реализуются внешние воздействия, имеет везде равную толщину, т.е.  $\bar{\delta}_p(\bar{x}) = \bar{\delta}_p = \text{const}$ .

Уравнение (9), как известно, имеет общее решение [2]:

$$\bar{\Phi}_+(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x} - \bar{y}) + g(\bar{x} + \bar{y}), \quad (10)$$

где  $f(\bar{x} - \bar{y})$ ,  $g(\bar{x} + \bar{y})$  — произвольные функции своих аргументов.

В области, где функция  $\Phi_1(\bar{x})$  отлична от нуля, решение уравнения (7) можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного — неоднородного уравнения. Рассмотрим сначала решение в верхней полуплоскости. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения в области, где функция  $\Phi_1(\bar{x})$  отлична от нуля, воспользуемся результатами работы [4]. Опустив громоздкие вычисления, получим, что искомое общее решение уравнения (7) выглядит следующим образом:

$$\bar{\Phi}_-(\bar{x}, \bar{y}) = f_1(\bar{x} - \bar{y}) + g_1(\bar{x} + \bar{y}) + R^+(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } \bar{y} > 0; \quad (11)$$

$$R^+(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2B_0^2 v_1} \left[ \int_{\bar{x} + \bar{y} - \bar{\delta}_p}^{\bar{x}} \Phi_1(x_1)(\bar{x} + \bar{y} - x_1) dx_1 + \int_{\bar{x} - \bar{y} - \bar{\delta}_p}^{\bar{x}} \Phi_1(x_1)(\bar{x} - \bar{y} - x_1) dx_1 + \bar{\delta}_p \int_0^{\bar{x} + \bar{y} - \bar{\delta}_p} \Phi_1(x_1) dx_1 + \bar{\delta}_p \int_0^{\bar{x} - \bar{y} - \bar{\delta}_p} \Phi_1(x_1) dx_1 \right],$$

где  $f_1(\bar{x} - \bar{y})$ ,  $g_1(\bar{x} + \bar{y})$  — произвольные функции своих аргументов.

При получении (11) использовано то, что функция  $\Phi_1(\bar{x})$  отлична от нуля в тонком слое у поверхности обтекаемого профиля. С учетом того, что левая часть уравнения (7) четна по переменной  $\bar{y}$ , вполне очевидно, что частное решение в нижней полуплоскости получается заменой  $\bar{y}$  на  $-\bar{y}$ . Для нахождения неизвестных функций  $f_1(x)$ ,  $g_1(x)$  воспользуемся граничными условиями (7a). При этом отметим, что, поскольку течение сверхзвуковое, то возмущения могут лишь исходить от профиля, но не приходить к нему. Отсюда сразу получаем, что выполняются следующие соотношения [2]:

$$\bar{\Phi}_-(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0 \text{ при } \bar{y} > 0; \quad 0 \leq \bar{x} - \bar{y} \leq 1; \quad (12)$$

$$\bar{\Phi}_+(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0 \text{ при } \bar{y} < 0; \quad 0 \leq \bar{x} + \bar{y} \leq 1;$$

$$g_1(\bar{x} + \bar{y}), \quad g(\bar{x} + \bar{y}) \equiv 0 \text{ при } \bar{y} > 0; \quad (12a)$$

$$f_1(\bar{x} - \bar{y}), \quad f(\bar{x} - \bar{y}) \equiv 0 \text{ при } \bar{y} < 0.$$

Из (7а) находим:

$$g_1(\bar{x} + \bar{y}) = \frac{Y_-(\bar{x} + \bar{y})}{B_0} \text{ при } \bar{y} < 0; \quad 0 \leq \bar{x} + \bar{y} \leq 1; \quad (13)$$

$$f_1(\bar{x} - \bar{y}) = -\frac{Y_+(\bar{x} - \bar{y})}{B_0} \text{ при } \bar{y} > 0; \quad 0 \leq \bar{x} - \bar{y} \leq 1.$$

Пусть функция  $\Phi_1(\bar{x})$  принимает различные значения вблизи верхней и нижней поверхностей крыла:

$$\Phi_1(\bar{x}) = \Phi_1^+(\bar{x}) \text{ при } \bar{y} > 0; \quad (14)$$

$$\Phi_1(\bar{x}) = \Phi_1^-(\bar{x}) \text{ при } \bar{y} < 0.$$

Тогда можно записать:

$$\bar{\Phi}_+(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{Y_+(\bar{x} - \bar{y})}{B_0} + R^+(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } \bar{y} > 0; \quad (15)$$

$$\bar{\Phi}_-(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{Y_-(\bar{x} + \bar{y})}{B_0} + R^-(\bar{x}, \bar{y}) \text{ при } \bar{y} > 0,$$

где  $R^-(\bar{x}, \bar{y})$  получается из  $R^+(\bar{x}, \bar{y})$  заменами:  $\bar{y} \rightarrow -\bar{y}$ ;  $\Phi_1^+(\bar{x}) \rightarrow \Phi_1^-(\bar{x})$ . При получении соотношений (13), (15) использован тот факт, что, как следует из равенства (11), выполняется:

$$\frac{\partial R^+(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y} \rightarrow +0} = 0; \quad \frac{\partial R^-(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{y}} \Big|_{\bar{y} \rightarrow -0} = 0.$$

Таким образом, найдено решение уравнения (7) с граничными условиями (7а). Для нахождения  $\Phi_+(\bar{x}, \bar{y})$  следует сшить решения (10) и (15) на границе слоя, где реализуются внешние воздействия. В результате получаем следующие равенства:

$$f(\bar{x} - \bar{y}) = -\frac{Y_+(\bar{x} - \bar{y})}{B_0} + R_1^+(\bar{x} - \bar{y});$$

$$g(\bar{x} + \bar{y}) = -\frac{Y_-(\bar{x} + \bar{y})}{B_0} + R_1^-(\bar{x} + \bar{y}), \quad (16)$$

где

$$R_1^+(\bar{x} - \bar{y}) = \frac{1}{2B_0^2 v_1} \left[ \int_{\bar{x}-\bar{y}-\bar{\delta}_p}^{\bar{x}-\bar{y}+\bar{\delta}_p} \Phi_1^+(x_1)(\bar{x} - \bar{y} - x_1) dx_1 + \bar{\delta}_p \int_0^{\bar{x}-\bar{y}+\bar{\delta}_p} \Phi_1^+(x_1) dx_1 + \bar{\delta}_p \int_0^{\bar{x}-\bar{y}-\bar{\delta}_p} \Phi_1^+(x_1) dx_1 \right]; \quad (17)$$

$$R_1^-(\bar{x} + \bar{y}) = \frac{1}{2B_0^2 v_1} \left[ \int_{\bar{x}+\bar{y}-\bar{\delta}_p}^{\bar{x}+\bar{y}+\bar{\delta}_p} \Phi_1^-(x_1)(\bar{x} + \bar{y} - x_1) dx_1 + \bar{\delta}_p \int_0^{\bar{x}+\bar{y}-\bar{\delta}_p} \Phi_1^-(x_1) dx_1 + \bar{\delta}_p \int_0^{\bar{x}+\bar{y}+\bar{\delta}_p} \Phi_1^-(x_1) dx_1 \right].$$

Переходя к размерным переменным, используя результаты [5] и соотношения (15)–(17) для возмущения давления около нижней и верхней частей профиля крыла вне зоны воздействия, можно получить соответственно:

$$\frac{\Delta P_-}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{B_0} \left[ Y'_-(x + B_0 y) + \frac{1}{2B_0 v_1 l^2} R_2^-(x + B_0 y) \right]; \quad (18)$$

$$\frac{\Delta P_+}{P_0} = -\frac{\gamma M^2}{B_0} \left[ -Y'_+(x - B_0 y) + \frac{1}{2B_0 v_1 l^2} R_2^+(x - B_0 y) \right],$$

где

$$R_2^-(x + B_0 y) = \int_{x+B_0 y-\delta_p}^{x+B_0 y+\delta_p} \Phi_1^-(x_1) dx_1;$$

$$R_2^+(x - B_0 y) = \int_{x-B_0 y-\delta_p}^{x-B_0 y+\delta_p} \Phi_1^+(x_1) dx_1;$$

$$\Delta P = P - P_0.$$

При выполнении неравенства  $x - B_0 y \gg \delta_p$  из (17) имеем

$$R_2^-(x + B_0 y) \approx 2\delta_p \Phi_1^-(x + B_0 y);$$

$$R_2^+(x - B_0 y) \approx 2\delta_p \Phi_1^+(x - B_0 y). \quad (18a)$$

Вычисление подъемной силы дает:

$$F_y = \int_0^1 (\Delta P_- - \Delta P_+) dx = \frac{\rho_0 v_1^2}{B_0} \left\{ 2l_y + \frac{1}{2B_0 v_1 l^2} \int_0^1 [R_2^+(x - B_0 \delta_p) - R_2^-(x + B_0 \delta_p)] dx \right\}. \quad (19)$$

Используя выражение (18), для коэффициента подъемной силы получаем

$$C_y = \frac{2F_y}{\rho_0 v_1^2 l} = \frac{4\alpha_a}{B_0} [1 + W_2], \quad (20)$$

где  $\alpha_a \equiv l_y/l$  — угол атаки, а

$$W_2 \equiv \frac{1}{4M c l^3 \alpha_a} \int_0^1 [R_2^+(x - B_0 \delta_p) - R_2^-(x + B_0 \delta_p)] dx. \quad (20a)$$

Сила сопротивления тонкого профиля крыла равна [2]:

$$F_x = \int_0^1 (\Delta P_- Y'_- - \Delta P_+ Y'_+) dx. \quad (21)$$

Используя (18), имеем:

$$F_x = -\frac{\rho_0 v_1^2}{B_0} \left\{ \int_0^1 [((Y'_+)^2 + ((Y'_-)^2)] dx - W_3 \right\}, \quad (22)$$

где

$$W_3 \equiv \frac{1}{2Mcl^2B_0} \times \int_0^1 \left[ R_2^-(x + B_0\delta_p)Y_-(x') - R_2^+(x - B_0\delta_p)Y_+(x') \right] dx, \quad (22a)$$

Коэффициент лобового сопротивления, определяемый как

$$C_{xk} = \frac{2|F_x|}{\rho_0 v_1^2 l},$$

имеет вид

$$C_{xk} = \frac{4\alpha_a^2}{B_0} \left( 1 + \frac{\bar{\theta}_+^2 + \bar{\theta}_-^2}{2\alpha_a^2} - \frac{W_3}{2\alpha_a^2 l} \right), \quad (23)$$

где

$$\bar{\theta}_+^2 \equiv \frac{1}{l} \int_0^1 \theta_+^2(x) dx; \quad \bar{\theta}_-^2 \equiv \frac{1}{l} \int_0^1 \theta_-^2(x) dx \quad (23a)$$

— средние значения квадратов углов наклона верхней и нижней поверхностей крыла к хорде  $AB$  (см. рис. 1). При получении (22) использовались соотношения [2]:

$$Y'_+(x) = \theta_+(x) - \alpha_a; \quad Y'_-(x) = \theta_-(x) - \alpha_a. \quad (23b)$$

Для аэродинамического качества из (19) и (23) получаем

$$K = \frac{(1 + W_2)}{\alpha_a \left( 1 + \frac{\bar{\theta}_+^2 + \bar{\theta}_-^2}{2\alpha_a^2} - \frac{W_3}{2\alpha_a^2 l} \right)}. \quad (24)$$

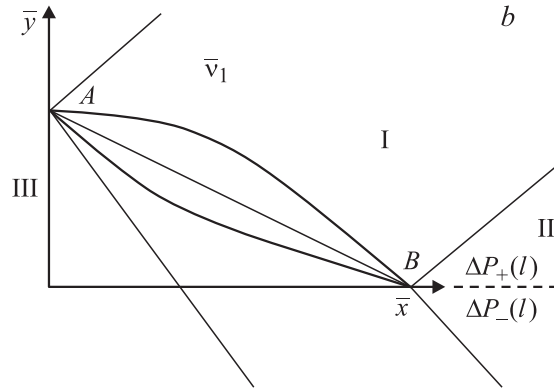
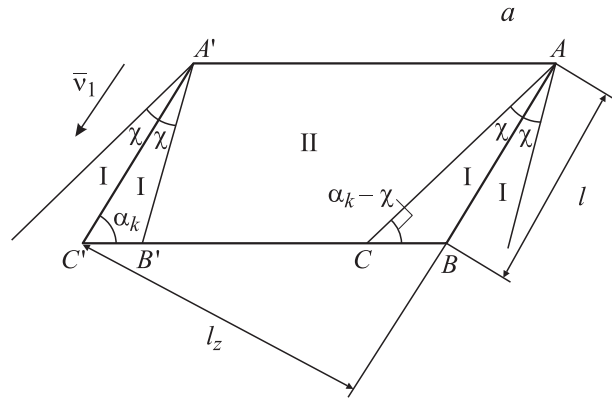
Все полученные результаты при  $\Phi_1 \equiv 0$  тождественно совпадают с приведенными в [2].

Теперь рассмотрим условия, при которых можно применить результаты, полученные в рамках теории стационарного обтекания бесконечного крыла, для оценки аэродинамических коэффициентов крыла конечного размаха. Если крыло имеет конечный размах, то возмущения от его концов могут достигать точек, лежащих на поверхности крыла. Очевидно, что соответствующие области определяются углом Маха (рис. 2, а):

$$\chi = \arctg \left( \frac{1}{B_0} \right).$$

Будем считать, что крыло имеет форму параллелограмма  $A'ABC'$  и стреловидность его такова, что  $\chi < \alpha_k$ , где  $\alpha_k$  — острый угол между сторонами крыла. Если площадь крыла есть  $S_k$ , а площадь области, которой достигают возмущения —  $S_v$  (возмущения от точек  $A, A'$  на рис. 2, а распространяются в  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ ), то условие применимости теории крыла бесконечного размаха запишется в виде

$$S_k \gg S_v. \quad (25)$$



**Рис. 2.** а — схема сверхзвукового обтекания крыла конечного размаха;  $l, l_z$  — ширина и размах крыла соответственно;  $\alpha_k$  — угол стреловидности;  $\chi$  — угол Маха; в области I распространяются возмущения от концов крыла; II — область, свободная от этих возмущений; III — невозмущенная область вверх по потоку от профиля крыла, II — невозмущенная область вниз по потоку от профиля крыла.

При выполнении этого неравенства будем правильно оценивать силы, действующие на крыло. Если размах крыла равен  $l_z$ , то простыми геометрическими построениями можно показать, что (25) эквивалентно:

$$\frac{l_z}{l} \gg \frac{1}{2} \sin \chi \sin \alpha_k \left[ \frac{1}{\sin(\alpha_k - \chi)} + \frac{1}{\sin(\alpha_k + \chi)} \right]. \quad (26)$$

При  $\alpha_k = \pi/2$  из этой формулы получаем:

$$\frac{l_z}{l} \gg \operatorname{tg} \chi,$$

что, очевидно, не является сильным ограничением в диапазоне чисел Маха, где применима линейная теория. Отметим, что при  $\alpha_k \neq \pi/2$  следует во всех формулах заменить величину  $v_1$  на  $v_1 \sin \alpha_k$ . При этом, как отмечается в [2], если  $M > 1$ , а  $M \sin \alpha_k < 1$ , то специфическое для сверхзвукового обтекания волновое сопротивление будет отсутствовать.

Рассмотрим вопрос о возможности стационарного обтекания при наличии внешних стационарных воздействий в рассматриваемой задаче. Как указывалось ранее,

при сверхзвуковом обтекании возмущения распространяются в нижней и верхней полуплоскости в полосах, определяемых соотношениями (12). Для стационарного обтекания необходимо, чтобы в областях, лежащих вне этих полос, на оси  $X$  выполнялось бы:

$$(\Delta P_- = \Delta P_+)_{y=0}.$$

Очевидно, что при  $\bar{x} < 0$  это условие выполняется, поскольку вверх по потоку по оси  $Y$  возмущения не распространяются. В области  $\bar{x} > 1$  давление  $\Delta P_+(x)$ ,  $\Delta P_-(x)$  определяется величинами  $\Delta P_+(l)$ ,  $\Delta P_-(l)$  соответственно. Таким образом, если  $P_+(l) \neq \Delta P_x(l)$ , то на оси  $X$  существует разность значения давления, которая приводит к возникновению  $u$  — составляющей массовой скорости в области II (см. рис. 2, b). При этом, как следует из уравнения Эйлера, в рамках рассматриваемой линейной теории величина этой компоненты будет иметь первый порядок малости, т. е.

$$\frac{v_y}{v_x} \sim \frac{v_x}{v_y}.$$

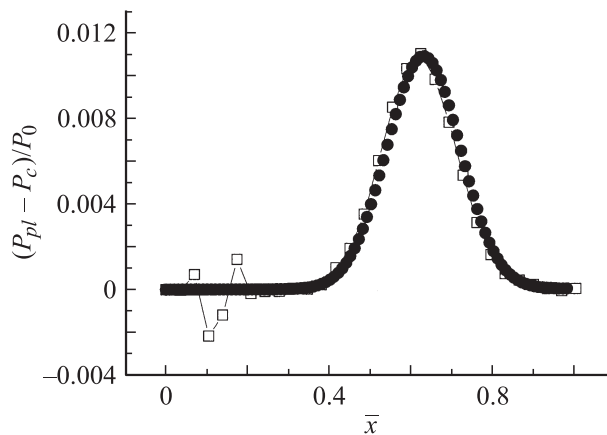
Поскольку разность давлений на оси  $Y$  при  $\bar{x} = 1$  сохраняется со временем из-за стационарности внешних воздействий, то величина  $v_y$  в области II будет нарастать. Таким образом, решение в этой части пространства будет нестационарным. Следует отметить, что, поскольку возмущения из области I вверх по потоку не распространяются, то это не нарушает стационарности обтекания в области I.

## Обсуждение полученных результатов и их сравнение с численными расчетами

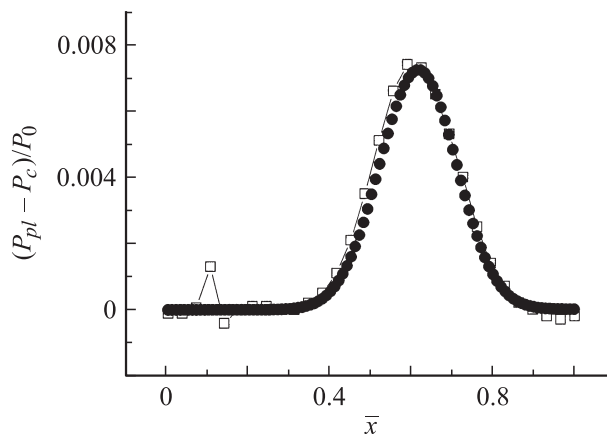
Для проверки правильности полученных аналитических результатов проведено сравнение расчетов по полученным формулам с данными, полученными численным решением задачи об обтекании тонкого клина под нулевым углом атаки в приближении Эйлера для случая, когда в тонком приповерхностном слое происходит внешнее энерговыделение. При этом форма зоны энерговыделения вдоль поверхности бралась гауссовой. Было проведено большое количество расчетов для различных чисел Маха, мощности энергоподвода, расстояний до поверхности клина. Некоторые результаты представлены на рис. 3–6. Из этих данных видно, что аналитические расчеты хорошо согласуются с численными данными.

При вычислениях использован случай внешнего энерговыделения, поскольку в предыдущей работе [1] в задаче о тонком теле вращения был подробно исследован случай воздействия силы на поток, как ускоряющей, так и тормозящей.

Расчеты показали, что при уменьшении мощности энерговыделения относительное возмущение давления убывает, а соответствие численных и аналитических расчетов улучшается. Это, очевидно, вызвано линейностью аналитической теории.



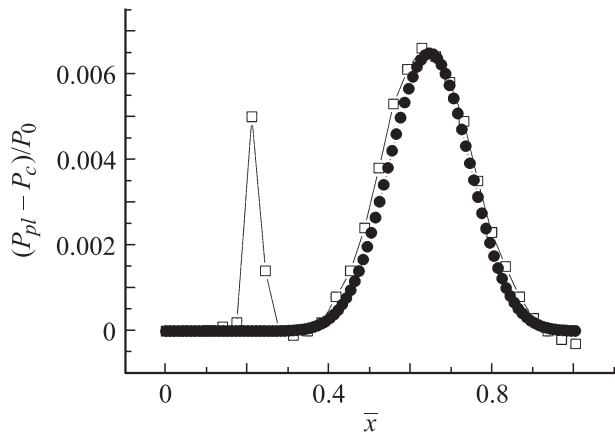
**Рис. 3.** Сравнение численных расчетов с аналитическими результатами для клина при следующих условиях:  $V = 1.5$ ;  $P = 50$  Ттгг;  $l = 1$  м; полуширина гауссова контура области энерговыклада 125 см; расстояние до поверхности клина 12.5 см. Толщина слоя энерговыклада 2.5 см; угол полураствора клина 0.05 rad; суммарная мощность энергоподвода 10 kW. □ — численный расчет, ● — аналитическая теория.



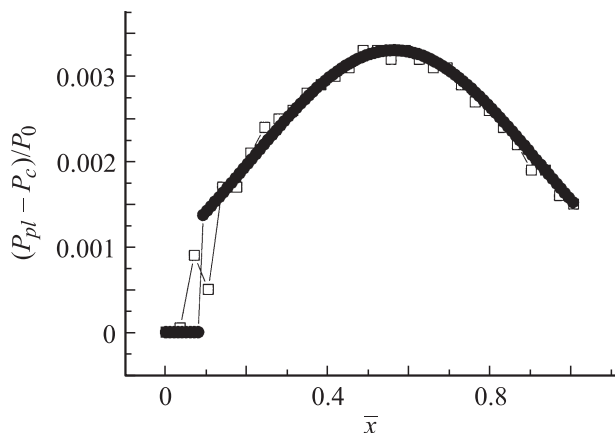
**Рис. 4.** Сравнение численных расчетов с аналитическими результатами для клина. Данные для расчета приведены на рис. 3, но  $M = 2.5$ ; суммарная мощность энергоподвода — 5 kW и расстояние до поверхности клина равно 5 см: □ — численный расчет, ● — аналитическая теория.

При увеличении числа Маха и росте расстояния до поверхности клина максимум возмущения давления смещается вправо. Это вполне согласуется с тем фактом, что возмущения в рассматриваемых условиях распространяются вниз по потоку по известным характеристикам [1] гиперболического уравнения (7). При увеличении числа Маха в невозмущенной области более 3 и уменьшении менее 1.3 расхождения между численными и аналитическими данными возрастают. Это вызвано тем, что при этом мы выходим за рамки применимости линейной теории (см. [1]).

Данные, приведенные на рис. 6, показывают, что при прочих равных условиях уширение гауссовой области внешних воздействий ведет к снижению возмущения



**Рис. 5.** Сравнение численных расчетов с аналитическими результатами для клина. Данные приведены на рис. 3, но  $M = 3$ ; расстояние до поверхности клина равно 5 см.  $\square$  — численный расчет,  $\bullet$  — аналитическая теория.



**Рис. 6.** Сравнение численных расчетов с аналитическими результатами для клина. Данные для расчета приведены на рис. 3, но суммарная полуширина гауссова контура энерговклада равна 50 см.  $\square$  — численный расчет,  $\bullet$  — аналитическая теория.

давления в центральной области и увеличению вниз и вверх по потоку от нее. Это объясняется тем, что возмущение давления вблизи некоторой пространственной области определяется не интегральной интенсивностью воздействия по всему объему, а плотностью мощности внешнего воздействия вблизи рассматриваемой пространственной области.

Отметим, что на всех приведенных численных кривых виден скачок давления в носовой части обтекаемого профиля, интенсивность которого растет с увеличением числа Маха. Это связано, по-видимому, с неустойчивостью численных схем при подходе к точке пересечения характеристики, проходящей через точку  $x = 0$  (т.е. слабой ударной головной волны клина) и прямой, на которой рассчитывается давление.

## Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в данной части работы:

- развита аналитическая теория сверхзвукового обтекания крыла бесконечного размаха при наличии внешних воздействий на поток, справедливая в известном диапазоне условий. Получены формулы для интегральных характеристик обтекания тонкого профиля произвольной формы. Хорошее согласие расчетов по полученным формулам с численными данными позволяет судить об адекватности разработанной теории;

- проведены расчеты возмущения давления на различном расстоянии от поверхности тонкого клина при различных условиях. Обнаруженные зависимости формы профиля давления от параметров потока, мощности и формы зоны внешнего энергоподвода объясняются на основе известных физических закономерностей.

В заключение отметим, что полученные аналитические результаты позволяют перейти к решению актуальной задачи — оптимизации аэродинамического внешнего обтекания за счет внешних энергетического и силового воздействия, т.е. уменьшения аэродинамического шума, увеличения подъемной силы и уменьшения лобового сопротивления.

## Список литературы

- [1] Герасимов Н.А., Сухомлинов В.С. // ЖТФ. 2009 2010. Т. 80. Вып. 1. С. 34–40.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. Т. VI. М.: Наука, 1988. 733 с.
- [3] Маделунг Э. Математический аппарат физики / Пер. с нем. М.: ГИФМЛ, 1960. 618 с.
- [4] Полянин А.Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 2001, 575 с.
- [5] Witham G.B. Linear and nonlinear waves. NY: John Wiley&Sons, 1974. 319 p.