Краткие сообщения

01;07

Длина формирования процессов в постоянном внешнем поле при высоких энергиях

© М.Х. Хоконов, И.З. Бекулова

Кабардино-Балкарский государственный университет,
360004 Нальчик, Россия
e-mail: khokon6@mail.ru

(Поступило в Редакцию 19 февраля 2009 г.)

Методом комплексного времени показано, что можно адекватно определить длину l_C формирования процессов излучения и рождения пар в постоянном внешнем поле, причем полученные значения l_C имеют не только качественный, но и количественный смысл. Рассмотрение основано на методе комплексного времени, позволяющего выразить амплитуды процессов в виде быстро сходящихся интегралов. Установлено, что длина формирования излучения мягких фотонов уменьшается с ростом частоты излучения в соответствии с известными выражениями по закону $l_C \sim \omega^{-1/3}$, тогда как для бóльших значений частоты эта зависимость переходит в $l_C \sim \omega^{-1/2}$. Получены формулы для l_C, позволяющие указать, с какой точностью этой величине можно придать смысл длины формирования излучения.

Тормозное излучение релятивистских электронов с энергией E при их взаимодействии с атомами вещества формируется на длине (см. [1], § 4)

$$l_C = 2\gamma\gamma' c/\omega, \tag{1}$$

где γ и γ' — лоренц-факторы излучающего электрона до и после илучения фотона с частотой ω, $\gamma = E/mc^2$, $\gamma' = E'/mc^2$, $E' = E - \hbar\omega$, m — масса покоя электрона, c — скорость света в вакууме (см. также [2]). Длина формирования излучения l_C определяет также длину, на которой существенны когерентные эффекты в излучении, связанные с наличием многих рассеивающих центров внутри области $l < l_C$ вдоль движения электрона. Поэтому l_C называют также длиной когерентности для процесса излучения.

Выражение (1) для когерентной длины получается при рассмотрении продольного импульса $q_\parallel$, передаваемого атомному ядру при взаимодействии с ним релятивистского электрона: $l_C \simeq \hbar/q_\parallel$ [3]. Тормозное излучение характеризуется конечностью времени взаимодействия электрона с атомом и малостью угла отклонения электрона полем ядра θ_e, так что выполняется условие $\theta_e\gamma \ll 1$ (за исключением случая крайне жестких фотонов, для которых $\hbar\omega \sim E$). Для процессов в протяженных внешних полях длину когерентности можно определить как область, вносящую основной вклад в интеграл, определяющий амплитуду рассматриваемого процесса. Такой подход применялся, например, в работах [4,5] к практически важному случаю излучения в постоянном внешнем поле, когда спектр излучения определяется известными классическими или квантовыми формулами для электрона, движущегося по окружности (синхронное излучение). В работах [4,5] приводится следующее выражение для длины формирования излучения:

$$l_C = b\left(\frac{cEE'}{F^2\omega}\right)^{1/3}, \tag{2}$$

где F — постоянная сила, действующая на электрон, b — коэффициент порядка еденицы (так, $b = 4 \cdot 3^{1/3}$, согласно [4], и $b = (3\pi)^{1/3}$, согласно [5]), $E' = E - \hbar\omega$ — энергия электрона после излучения.

Нас будет интересовать не чисто круговое движение электрона, а близкое к прямолинейному ультрарелятивистское движение в произвольном, вообще говоря, неоднородном внешнем поле в условиях, когда каждый участок траектории можно с высокой степенью точности аппроксимировать дугой окружности с мгновенным радиусом кривизны R [6]. Тогда спектр излучения со всей траектории будет представлять собой сумму вкладов, каждый из которых рассчитывается по известным формулам для чисто кругового движения. Такой подход, называемый синхротронным приближением, широко применяется для интерпретации экспериментальных данных по измерению спектральных характеристик излучения электронов с энергией свыше нескольких десятков гигаэлектрон-вольт в ориентированных кристаллах [4,7,8]. Мгновенный радиус кривизны траектории электрона с энергией E определяется при таком движении как $R = E/F$, где $F = |\nabla U|$, $U(\mathbf{r})$ — непрерывный потенциал атомной цепочки (плоскости) кристалла как функция поперечной координаты $\mathbf{r}$ [2]. Синхротронное приближение применимо, если выполнется условие $\theta_e\gamma \gg 1$. Понятие длины когерентности для постоянного внешнего поля важно для определения границ применимости синхротронного приближения, когда реализуется ситуация, противоположная тормозному излучению на атомах.

Формулы (1) и (2) для длины когерентности не имеют строго количественного значения и определяют только порядок величины протяженности области, в которой формируется процесс излучения. В настоящей работе будет показано, что в случае постоянного внешнего поля можно строго определить длину формирования излучения таким образом, что можно точно указать, с какой вероятностью процесс происходит за время $t \leq t_C$, где $t_C = l_C/v$, $v \approx c$ — скорость электрона. Все результаты, полученные для процесса излучения фотонов, можно будет непосредственно обобщить на случай рождения электронно-позитронных пар гамма-квантами. Величину l_C следует отличать от длины свободного пробега L для процесса последовательного излучения нескольких фотонов. Последняя определяется полным сечением излучения σ. В частности, для тормозного излучения на атомах аморфного вещества $L = 1/\sigma N$, где N — число атомов в единице объема.

В рамках классической электродинамики спектральное распределение энергии, излучаемой за единицу времени релятивистским электроном, движущимся по окружности, определяется выражением [6]

$$P_\omega = \frac{e^2\omega}{\pi c \gamma^2}\left[\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,(1+2x^2)\sin\frac{3}{2}\xi\left(x+\frac{x^3}{3}\right) - \frac{\pi}{2}\right], \tag{3}$$

$$P_\omega = \frac{e^2\omega}{\pi c \gamma^2\sqrt{3}}\int_\xi^\infty K_{5/3}(y)dy, \tag{4}$$

где $\xi = 2\omega/(3\Omega\gamma^3)$ — инвариантный синхротронный параметр, Ω — частота вращения электрона по окружности с мгновенным радиусом кривизны $R = c/\Omega$, $K_v(y)$ — функция Макдональда. Учет квантовой отдачи фотона при излучении сводится к замене Байера–Каткова в подынтегральном выражении (3) $\omega \to \omega E/E'$ [7], тогда синхротронный параметр в (3) и (4) можно записать в виде

$$\xi = \frac{2}{3\chi}\,\frac{\hbar\omega}{E-\hbar\omega}, \tag{5}$$

где $\chi = \hbar F E/(m^3c^5)$ — инвариантный параметр, характеризующий величину внешнего поля. Квантовые эффекты существенны уже при $\chi > 0.1$.

Переменная интегрирования x в (3) является безразмерной временной $x = \Omega\gamma t/2 = Ft(2mc)$. Произведение времени формирования процесса t_C на скорость частицы $v \approx c$ даст длину когерентности l_C. Соответствующее значение переменной $x = x_C$ связано с l_C соотношением

$$l_C = \frac{2mc^2}{F}\,x_C. \tag{6}$$

Для относительно магких частот, когда $\xi \ll 1$, основной вклад в интеграл (3) вносят большие значения x, так что доминирующим является кубический член в аргументе синуса. Определяющей для интеграла будет первая осцилляция подынтегрального выражения, а безразмерная длина когерентности x_C определится из условия равенства аргумента синуса единице, что приводит к формуле (2) с $b = 2\cdot 3^{1/3}$. Тот факт, что длина когерентности в (2) уменьшается с ростом частоты излучения $l_C \sim \xi^{-1/3}$, приводил многих авторов к выводу о том, что на достаточно больших значениях частоты синхротронное приближение должно быть всегда справедливым, так как при малых l_C можно считать, что в течение процесса излучения сила, действующая на электрон, постоянна.

При больших частотах, когда $\xi \gg 1$, первая осцилляция уже не определяет значение интеграла в (3) и надо учесть множество осцилляций. В работе [4] показано, что при $\xi \gg 1$ область значений переменной интегрирования в (3), существенная для получения разумного значения интеграла, очень велика и пропорциональна $\sim \exp\xi$. Отсюда авторы [4] заключают, что утверждение о том, что синхротронное приближение справедливо для расчетов спектров на больших частотах ($\xi \gg 1$) не имеет оснований. Такое заключение подтверждается результатами работы [9], где решена задача об излучении релятивистских частиц в неоднородном внешнем поле. Авторами работы [9] показано, что в неоднородных внешних полях спектр излучения не совпадает с синхронным спектром (4) ни на малых, ни на больших частотах. С другой стороны, экспоненциальный рост области интегрирования по времени в (3) при больших ξ означает, что для больших частот эту область нельзя отождествлять со временем формирования процесса излучения, так как при таком подходе для $\xi \gg 1$ получаются физически неразумные, аномально большие значения l_C.

Наш подход основан на том обстоятельстве, что для произвольного ультрарелятивистского движения электрона формулы для вероятности излучения могут быть представлены таким образом, что всегда можно избежать появления быстро осциллирующих подынтегральных выражений путем перехода к комплексной временной переменной [10,11]. В этом подходе подынтегральные выражения в амплитудах излучения становятся монотонно убывающими функциями временной переменной, что позволяет адекватно количественно определить длину когерентности для всех частот.

Метод комплексного времени приводит к следующему представлению формул (3), (4) для синхротронного излучения [10,11]

$$P_\omega = \frac{e^2\omega}{\pi c\gamma^2}\int_0^\infty g(x)dx, \tag{7}$$

где $g(x)$ — монотонно убывающая функция безразмерной переменной x, связанной с обычной временной переменной t теми же соотношениями, что и в (3),

$$g(x) = \frac{1}{u(x)}\left(1 + 4x^2 + \frac{16}{9}x^4\right)e^{-\xi u(x)}, \tag{8}$$

функция $u(x)$ монотонно возрастает с ростом своего аргумента:

$$u(x) = \left(1 + \frac{4}{3}x^2\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}. \qquad (9)$$

Выражение (7) позволяет определить величину, которую можно трактовать как вероятность фотону быть излученным за время t_C:

$$w = \frac{\int\limits_0^{x_C} g(x)dx}{\int\limits_0^{\infty} g(x)dx}, \qquad (10)$$

где значение x_C выбирается так, чтобы вероятность w была близка к единице. Длина когерентности l_C связана с x_C, согласно выражению (6).

Основной вклад в быстро сходящийся интеграл (7) вносят такие значения временной переменной x, при которых аргумент экспоненты в (8) превышает единицу. В соответствии с этим определим длину когерентности как величину, определяемую соотношением $\xi u(x_C) = \xi + a$, где $a \geq 1$ — число, показывающее, с какой точностью вероятность w близка к единице. Тогда длина когерентности в постоянном внешнем поле определится выражением (6), где

$$x_C = \sqrt{3}(A_+ + A_- - 1/2)^{1/2}, \qquad (11)$$

$$A_\pm^3 = \frac{1}{32}\left[\frac{a^2}{\xi^2} + 2\frac{a}{\xi} + \frac{1}{2} \pm \left(1 + \frac{a}{\xi}\right)\left(\frac{a^2}{\xi^2} + 2\frac{a}{\xi}\right)^{1/2}\right]. \qquad (12)$$

Для малых частот, когда $\xi \ll 1$, формулы (11), (12) дают

$$x_C \approx \sqrt{3}\left[\left(\frac{a}{4\xi}\right)^{2/3}\left(1 + \frac{2\xi}{3a}\right) - \frac{1}{2}\right]^{1/2}. \qquad (13)$$

Уже при $a = 1$ формула (13) справедлива с точностью 12% по отношению к точным соотношениям (11), (12) для $\xi = 1$. В пределе очень малых частот $\xi \to 0$ (13) приводит к „общепринятому“ соотношению (2) с $b = (9\sqrt{3})^{1/3}$, т.е. в этом пределе имеет место зависимость, полученная авторами [4,5] — $l_C \sim \xi^{-1/3}$. Величина x_C в этом интервале имеет вид

$$x_C = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\xi}\right)^{1/3}. \qquad (14)$$

В другом интервале больших частот $\xi \gg 1$ для безразмерной длины когерентности из (11) и (12) получаем

$$x_C = \left(\frac{2a}{3g}\right)^{1/2}. \qquad (15)$$

При $a = 1$ простая формула (15) справедлива с точностью 5% (при $\xi = 1$). Таким образом, характер зависимости длины когерентности от частоты излучения меняется от зависимости $l_C \sim \xi^{-1/3}$ при $\xi \ll 1$, на $l_C \sim \xi^{-1/2}$ при $\xi \gg 1$.

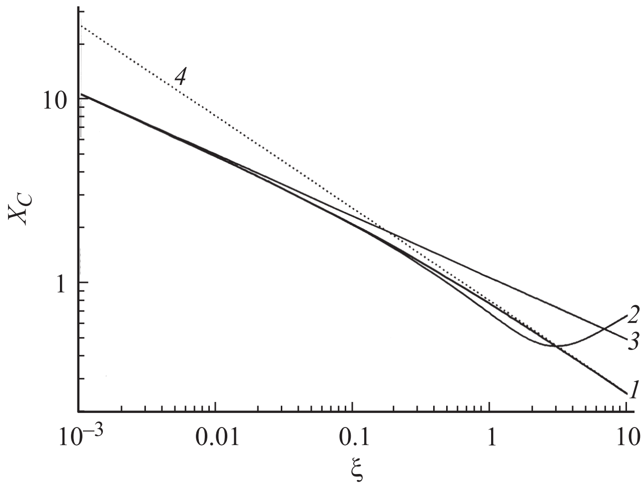

Рис. 1. Зависимость длины когерентности x_C от частоты излучения ξ (при $a = 1$). Кривая *1* — точный расчет по формулам (11), (12). Кривые *2* и *3* — расчет по асимптотическим формулам (13) и (14) соответственно; пунктир *4* соответствует асимпотической формуле (15) для больших ξ.

Кривые зависимости длины когерентности x_C от частоты излучения ξ (при $a = 1$) представлены на рис. 1. Простая асимптотическая формула (15) согласуется с точным расчетом для $\xi > 1$. Для малых частот, при $\xi < 1$, хорошим приближением является формула (13). Выражение (14) справедливо для $\xi < 0.1$.

Рис. 2 показывает, с какой точностью значение x_C, вычисленное по формулам (11) и (12), можно считать длиной формирования излучения при различных значениях параметра a (безразмерная величина x_C связана с длиной формирования излучения по формуле (6)). На рис. 2 показана зависимость вероятности излучения (10)

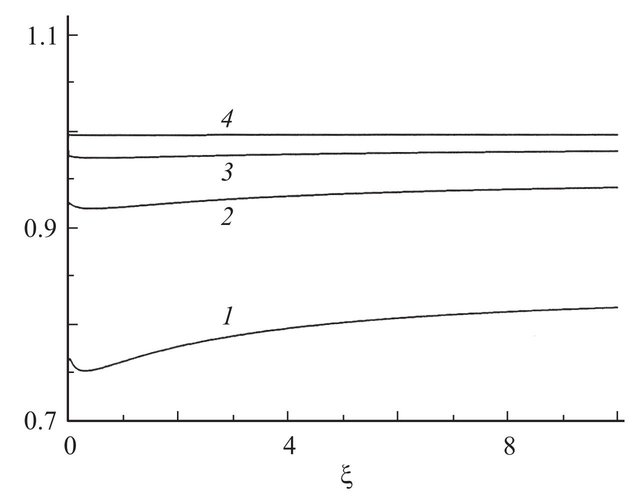

Рис. 2. Вероятность излучить фотон (10) как функция его частоты ξ для различных значений параметра a. Кривые *1–4* отвечают значениям параметра a, равным 1, 2, 3 и 5 соответственно. Величина x_C в (10) вычислялась по формулам (11) и (12).

от безразмерной частоты ξ для различных значений параметра a. Из этого рисунка следует, что уже при $a = 1$ (кривая *1*) фотон с большой вероятностью ($w \approx 0.8$) излучается на длине l_C. При $a = 5$ (кривая *4* на рис. 2) вероятность (10) близка к единице для всех частот.

Полученные результаты естественным образом обобщаются на случай рождения электрон-позитронных пар гамма-квантом в присутствии внешнего поля. Когерентной длиной в этом случае можно считать длину, на которой электрон и позитрон расходятся на расстояние порядка двух комптоновских длин. Соответствующие выражения получаются из формул для излучения с помощью кроссинг-симметрии, приводящей к замене: $E \to -E_+$, $E - \hbar\omega \to E_-$, $\omega \to -\omega$, где E_+ и E_- — энергия образовавшихся позитрона и электрона соответственно. Для гамма-кванта, рождающего пару в поле атомного ядра, длина когерентности равна $l_P = 2E_+E_-/(m^2c^3\omega)$ (см., например, [1], § 13). Для процесса рождения пары в постоянном внешнем поле длина когерентности определяется формулами (6), (11)–(15), в которых вместо параметра ξ следует взять

$$\xi_P = \frac{2}{3\chi_P}\frac{(\hbar\omega)^2}{E_+E_-}, \qquad (16)$$

где $\chi_P = \hbar^2 F\omega/(m^3c^5)$.

Таким образом, для процессов в постоянном внешнем поле можно адекватно определить длину формирования излучения и рождения пар, имеющую не только качественный, но и количественный смысл. Длина формирования излучения мягких фотонов ($\xi < 0.1$) уменьшается с ростом частоты излучения в соответствии с „общепринятым" выражением (2) $l_C \sim \omega^{-1/3}$. Для больших частот ($\xi > 1$) эта зависимость переходит в $l_C \sim \omega^{-1/2}$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-02-01130-а.

Список литературы

[1] *Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф.* Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, 1993. 344 с.
[2] *Uggerhoj U.I.* // Reviews of Mod. Phys. 2005. Vol. 77. N 4. P. 1131–1171.
[3] *Тер-Микаелян М.Л.* Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван: АН Арм. ССР, 1969. 457 с.
[4] *Pedersen O., Andersen J.U., Bonderup E.* // Relativistic Channeling. NATO ASI Ser. B. 1987. P. 207–226.
[5] *Artru X.* // Phys. Lett. A. 1988. Vol. 128. N 5. P. 302–306.
[6] *Schwinger J.* // Phys. Rev. 1949. Vol. 12. N 12. P. 1012–1925.
[7] *Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М.* Электромагнитные процессы при высокой энергии и ориентированных монокристаллах. Новосибирск: Наука, 1989. 399 с.
[8] *Хоконов М.Х.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 1723–1741.
[9] *Khokonov M.Kh., Nitta H.* // Phys. Rev. Lett. 2002. N 9. Vol. 89. P. 094 801.
[10] *Khokonov M.Kh.* // Physica Scripta. 1997. Vol. 55. P. 513–519.
[11] *Хоконов М.Х.* // ЖЭТФ. 2004. Т. 126. С. 799–818.