

03:04

## **Магнитоакустический автоволновой импульс в тепловыделяющей ионизованной газовой среде**

© Д.И. Завершинский, Н.Е. Молевич

Самарский филиал Физического института им. П.Н. Лебедева РАН  
Самарский государственный аэрокосмический университет  
E-mail: molevich@fian.smr.ru

Поступило в Редакцию 22 февраля 2013 г.

Получено уравнение, описывающее эволюцию быстрых и медленных магнитоакустических волн в тепловыделяющем полностью ионизованном газе. Определены форма и параметры магнитоакустического импульса, являющегося в условиях магнитоакустической неустойчивости автомодельным решением этого уравнения.

В гиперзвуковой аэродинамике, астрофизике, геофизике, физике плазмы, управляемого термоядерного синтеза (УТС) и ряде других областей физики, механики, техники возникает необходимость исследования структуры волновых движений в ионизованных газовых средах. Явления альфвеновского и магнитозвукового резонанса и диссипации магнитоакустических волн являются возможными механизмами нагрева плазмы в установках УТС и нагрева плазмы солнечной короны. Широко распространенной методикой диагностики процессов, протекающих в плазме, является изучение магнитоакустических осцилляций. В частности, обнаружены пульсации СВЧ-излучения Солнца, идентифицированные как магнитозвуковые осцилляции во вспышечных корональных магнитных петлях [1]. Показано, что шумовые бури возникают в областях над солнечными пятнами, где существуют усиленные потоки магнитоакустических волн и где в результате трансформации этих волн образуются турбулентные возмущенные зоны, заполненные так называемыми ударно-волновыми солитонами.

Структура и свойства газодинамических возмущений в проводящей среде в присутствии магнитного поля, описываемые системой магнитогазодинамических (МГД) уравнений, подробно исследованы. В таких

средах возможно распространение трех типов волн: альфвеновских, быстрой и медленной магнитоакустических. В альфвеновских волнах давление, плотность и продольная компонента скорости остаются неизменными, а возмущение претерпевают поперечные составляющие скорости и напряженности магнитного поля. В магнитоакустических волнах наряду с поперечными компонентами поля и скорости изменение претерпевают также плотность, давление и продольная компонента скорости. Продольная же составляющая вектора напряженности магнитного поля остается постоянной. В [2–4] показано, что в тепловыделяющей плазме альфвеновские волны устойчивы, а магнитоакустические волны могут стать неустойчивыми. Подобная неустойчивость ранее была описана для акустических волн в тепловыделяющем газе в отсутствие магнитного поля [5]. В [6] было показано, что эта неустойчивость приводит к формированию сильно асимметричного автоволнового импульса с разрывным передним и экспоненциальным задним фронтом. Этот импульс описывается обобщенным нелинейным акустическим уравнением.

В данной работе впервые найдены условия существования и параметры подобного по форме магнитоакустического автоволнового импульса в тепловыделяющей полностью ионизованной газовой среде, описываемой системой уравнений МГД вида [2–4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \text{rot} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla P - \frac{1}{4\pi} \text{rot} [\mathbf{B} \times \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{V} &= 0, \\ C_{V\infty} \rho \frac{dT}{dt} - \frac{k_B T}{m} \frac{d\rho}{dt} &= -\rho \mathfrak{J}(\rho, T), \quad P = \frac{k_B T \rho}{m}, \\ \mathfrak{J}(\rho, T) &= L(\rho, T) - Q(\rho, T). \end{aligned} \quad (1)$$

В (1)  $\rho$ ,  $T$ ,  $P$  — плотность, температура и давление в плазменной среде соответственно,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{B}$  — векторы скорости и магнитного поля соответственно,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $C_{V\infty}$  — высокочастотная теплоемкость при постоянном объеме,  $m$  —  $1/2$  молекулярной массы,  $L(\rho, T)$ ,  $Q(\rho, T)$  — функции, описывающие охлаждение и нагрев,  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla$ ,  $-\rho \mathfrak{J}(\rho, T)$  — обобщенная функция тепловых потерь, широко применяемая при исследовании тепловых неустойчивостей начиная с пионерских работ [5,7]. Эта функция феноменологически

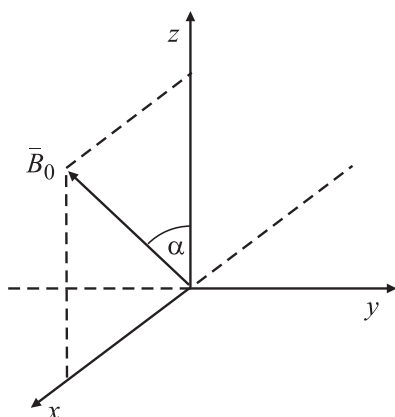


Рис. 1. Направление вектора индукции невозмущенного магнитного поля.

учитывает как мощность охлаждения в среде в расчете на единицу объема (например, излучательной природы), так и мощность нагрева среды в результате различных экзотермических процессов. В стационарных условиях она равна 0. В системе (1) ионизованный газ является идеальным, пренебрежено влиянием диссипативных процессов, обусловленных наличием вязкости, теплопроводности и конечной проводимости.

Исследование волн проводилось в декартовой системе координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Вектор стационарного магнитного поля находится в плоскости  $x$ ,  $z$  (рис. 1), т. е.  $\mathbf{B}_0 = B_0 \sin \alpha \mathbf{x}_0 + B_0 \cos \alpha \mathbf{z}_0$ , где  $B_0$  — абсолютное значение длины вектора индукции магнитного поля,  $\alpha$  — угол наклона между магнитным полем и осью  $z$ ,  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{z}_0$  — единичные векторы. В работе рассматривались волны, распространяющиеся вдоль оси  $z$ . Зависимостями от  $x$  и  $y$  пренебрегалось ( $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$ ).

Стандартная процедура линеаризации системы (1) относительно возмущений стационарного состояния вида  $\rho = \rho_0 + \bar{\rho} \exp(-i\omega t + ikz)$  позволяет получить дисперсионное соотношение для альфвеновских волн (тепловыделение не приносит сюда ничего нового)

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c_a^2 \cos^2 \alpha \quad (2)$$

и магнитоакустических волн

$$\frac{\omega^2}{k^2} = 0.5(c_a^2 + \tilde{c}^2) \pm 0.5\sqrt{c_a^4 + \tilde{c}^4 - 2c_a^2\tilde{c}^2 \cos 2\alpha}, \quad (3)$$

где

$$c_a^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}, \quad \tilde{c}^2 = \frac{k_B T_0 C_{P0} - i\omega\tau C_{P\infty}}{m C_{V0} - i\omega\tau C_{V\infty}},$$

$$C_{P\infty} = C_{V\infty} + \frac{k_B}{m}, \quad C_{V0} = \frac{k_B \tilde{\mathfrak{J}}_{0T}}{m}, \quad C_{P0} = \frac{k_B(\tilde{\mathfrak{J}}_{0T} - \tilde{\mathfrak{J}}_{0\rho})}{m},$$

$$\tau = \frac{k_B T_0}{m Q_0}, \quad \tilde{\mathfrak{J}}_{0T} = \frac{T_0}{Q_0} (\partial \tilde{\mathfrak{J}} / \partial T)_{\rho=\rho_0, T=T_0}, \quad \tilde{\mathfrak{J}}_{0\rho} = \frac{\rho_0}{Q_0} (\partial \tilde{\mathfrak{J}} / \partial \rho)_{\rho=\rho_0, T=T_0}.$$

Здесь  $C_{P\infty}$  — высокочастотная теплоемкость при постоянном давлении,  $C_{V0}$ ,  $C_{P0}$  — эффективные низкочастотные теплоемкости при постоянном объеме и давлении в тепловыделяющей среде [6,8] соответственно,  $\tau$  — характерное время нагрева,  $c_a$  — скорость альфвеновских волн,  $Q_0$  — стационарное значение мощности нагрева.

Без учета тепловыделения  $\tilde{c}^2 = \tilde{c}_\infty^2$  и выражение (3) совпадает с ранее известным [3]. Зависимость от частоты комплексной величины  $\tilde{c}^2$  обуславливает появление в тепловыделяющей среде дисперсии скорости магнитоакустических волн.

Дисперсионное отношение (3) существенно упрощается в низкочастотном и высокочастотном приближениях:

$$k = \frac{\omega}{c_{0f,s}} \left( 1 + i \frac{\omega \xi_0}{4\rho_0 c_{0f,s}^2} \Xi_0 \right), \quad \omega\tau \ll \frac{C_{P0}}{C_{P\infty}}, \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}}, \quad (4)$$

$$k = \frac{\omega}{c_{\infty f,s}} \left( 1 + i \frac{\xi_0 C_{V0}^2}{4\rho_0 c_{\infty f,s}^2 \omega \tau^2 C_{V\infty}^2} \Xi_\infty \right), \quad \omega\tau \gg \frac{C_{P0}}{C_{P\infty}}, \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}}, \quad (5)$$

где

$$\Xi_0 = \left( 1 \pm \frac{c_0^2 - c_a^2 \cos 2\alpha}{\sqrt{c_0^4 + c_a^4 - 2c_0^2 c_a^2 \cos 2\alpha}} \right),$$

$$\Xi_\infty = \left( 1 \pm \frac{c_\infty^2 - c_a^2 \cos 2\alpha}{\sqrt{c_\infty^4 + c_a^4 - 2c_\infty^2 c_a^2 \cos 2\alpha}} \right), \quad (6)$$

$$\xi_0 = \frac{\tau \rho_0 C_{V\infty} (c_\infty^2 - c_0^2)}{C_{V0}} = \frac{P_0 \tau_0 (\tilde{\mathfrak{J}}_{0\rho} / (\gamma_\infty - 1) + \tilde{\mathfrak{J}}_{0T})}{\tilde{\mathfrak{J}}_T^2},$$

$$c_0^2 = C_{p0} k_B T_0 / m C_{V0} = \gamma_0 k_B T_0 / m, \quad c_\infty^2 = C_{p\infty} k_B T_0 / m C_{V\infty} = \gamma_\infty k_B T_0 / m,$$

$$c_{0,f,s}^2 = 0.5 \left( c_0^2 + c_a^2 \pm \sqrt{c_0^4 + c_a^4 - 2c_0^2 c_a^2 \cos 2\alpha} \right),$$

$$c_{\infty,f,s}^2 = 0.5 \left( c_\infty^2 + c_a^2 \pm \sqrt{c_\infty^4 + c_a^4 - 2c_\infty^2 c_a^2 \cos 2\alpha} \right), \quad (7)$$

$\xi_0$  — низкочастотный коэффициент второй вязкости в тепловыделяющей среде [6,8],  $c_0, c_\infty$  — низкочастотная и высокочастотная скорости звука,  $c_{0,f,s}, c_{\infty,f,s}$  — низкочастотная и высокочастотная скорости магнитоакустических волн, индексы  $f, s$  соответствуют быстрой (знак „+“ в (3), (6), (7)) и медленной (знак „-“) магнитоакустическим волнам. Выражение для низкочастотной скорости звука совпадает с [2,8].

Согласно (2)–(7) альфвеновская волна является устойчивой, а магнитоакустические волны теряют устойчивость при  $\xi_0 < 0$ , т.е. при выполнении условия

$$[\mathfrak{J}_{0\rho} / (\gamma_\infty - 1) + \mathfrak{J}_{0T}] < 0. \quad (8)$$

Это условие совпадает с известным условием акустической неустойчивости тепловыделяющих сред в отсутствие магнитного поля [5,2,6].

Для описания стационарной структуры магнитоакустических волн, формируемой при условии неустойчивости (8), необходимо учесть влияние нелинейных слагаемых в исходной МГД-системе (1). Это удастся сделать для случая слабой дисперсии  $|\beta| = |c_{0,f,s}^2 - c_{\infty,f,s}^2| / c_{\infty,f,s}^2 \sim \varepsilon \ll 1$ , где  $\varepsilon$  — величина первого порядка малости.

Используя методику, включающую теорию возмущений и медленно меняющегося профиля, подробно описанную в [6], получим следующее нелинейное уравнение, описывающее распространение магнитоакустических волн в сопровождающей системе координат ( $\xi = (z - c_{\infty,f,s} t) / c_{\infty,f,s} \tau$ ,  $Y = \varepsilon t / \tau$ ) с точностью до величин второй малости по амплитуде

$$\left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} + \frac{\Psi_\infty}{2} \frac{\partial \tilde{\rho}^2}{\partial \xi} \right)_\xi - \frac{C_{V0}}{C_{V\infty}} \left( \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} + \frac{\beta \Xi_\infty}{4} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \xi} + \frac{\Psi_0}{2} \frac{\partial \tilde{\rho}^2}{\partial \xi} \right) = 0, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad (9)$$

$$\Psi_\infty = \frac{c_\infty^2 (\gamma_\infty + 1) (c_{\infty,f,s}^2 - c_{az}^2)}{2c_{\infty,f,s}^2 (2c_{\infty,f,s}^2 - c_\infty^2 - c_a^2)} + \frac{3(c_{\infty,f,s}^2 - c_\infty^2)}{2(2c_{\infty,f,s}^2 - c_\infty^2 - c_a^2)},$$

$$c_{az}^2 = c_a^2 \cos^2 \alpha, \quad (10)$$

$$\Psi_0 = \frac{c_0^2(2\gamma_0 - 1)(c_{\infty f,s}^2 - c_{az}^2)}{c_{\infty f,s}^2\gamma_0(2c_{\infty f,s}^2 - c_{\infty}^2 - c_a^2)} + \frac{3(c_{\infty f,s}^2 - c_{\infty}^2)}{2(2c_{\infty f,s}^2 - c_{\infty}^2 - c_a^2)} - \frac{c_0^2(c_{\infty f,s}^2 - c_{az}^2)}{2c_{\infty f,s}^2\Gamma_0\mathfrak{J}_{0T}(2c_{\infty f,s}^2 - c_{\infty}^2 - c_a^2)} [\mathfrak{J}_{0TT}(\gamma_0 - 1)^2 + \mathfrak{J}_{0\rho\rho} + 2\mathfrak{J}_{0\rho T}(\gamma_0 - 1)],$$

$$\mathfrak{J}_{0TT} = \left( \frac{T^2\partial^2\mathfrak{J}}{Q\partial T^2} \right)_{\rho=\rho_0, T=T_0}, \quad \mathfrak{J}_{0\rho T} = \left( \frac{\rho T\partial^2\mathfrak{J}}{Q\partial\rho\partial T} \right)_{\rho=\rho_0, T=T_0},$$

$$\mathfrak{J}_{0\rho\rho} = \left( \frac{\rho^2\partial^2\mathfrak{J}}{Q\partial\rho^2} \right)_{\rho=\rho_0, T=T_0}. \quad (11)$$

Полученное выражение (10) для высокочастотного коэффициента магнитоакустической нелинейности  $\Psi_{\infty}$  совпадает с полученным ранее [4]. В отсутствие магнитного поля  $\Psi_{\infty} = (\gamma_{\infty} + 1)/2$ . Выражение (11) для низкочастотного коэффициента магнитоакустической нелинейности  $\Psi_0$  получено впервые. В отсутствие магнитного поля  $\Psi_0$  совпадает с низкочастотным акустическим коэффициентом, полученным в [6].

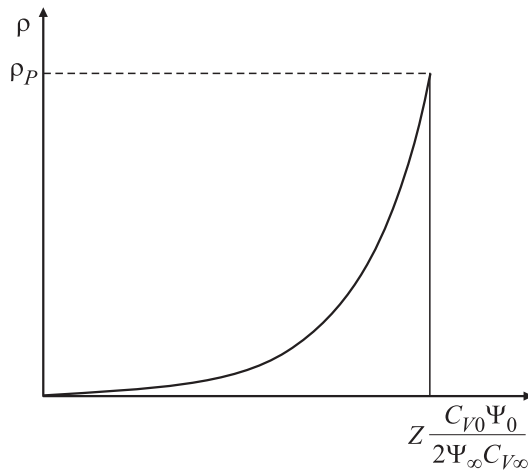
Заметим, что полученное здесь уравнение (9) существенно отличается от полученного в высокочастотном приближении нелинейного магнитоакустического уравнения [4], так как оно способно адекватно описать также и низкочастотную часть спектра, а также нелинейную передачу энергии вверх по спектру.

Уравнение для магнитоакустических волн (9) по форме совпадает с обобщенным нелинейным акустическим уравнением релаксирующей среды [6,9–11], решения которого подробно исследованы в этих работах.

При условии (8) уравнение (9) имеет автомодельное решение в виде сильно асимметричного импульса

$$\tilde{\rho}(z) = \begin{cases} \rho_p \exp[(Z - Z_0)C_{V0}\Psi_0 / 2\Psi_{\infty}C_{V\infty}] & Z \leq Z_0, \\ 0, & Z > Z_0, \end{cases} \quad (12)$$

бегущего со скоростью  $w = w_p = \beta\Xi_{\infty}\Psi_{\infty}/2(2\Psi_{\infty} - \Psi)$ . Импульс (12) имеет разрывной фронт и экспоненциальный спад возмущения за фронтом (рис. 2).  $Z = \xi - wY$ ,  $Z_0$  соответствует положению фронта. Как показано в [11], учет конечной вязкостно-теплопроводностной диссипации приводит к соответствующему конечному сглаживанию переднего фронта. Амплитуда импульса  $\rho_p = 2w_p/\Psi_{\infty} = \beta\Xi/(2\Psi_{\infty} - \Psi_0)$ .



**Рис. 2.** Магнитоакустический автоволновой импульс.

Важно, что амплитуда, скорость, форма полученного магнитоакустического импульса определяются только параметрами тепловыделяющей среды, величиной и направлением вектора индукции магнитного поля, поэтому он является автоволной в отличие, например, от солитона, описываемого уравнением Кортевега–де Вриза–Брюгера.

Аналогичную форму импульса с положительной амплитудой имеют возмущения давления, температуры и продольной компоненты скорости  $\bar{V}_z$ . Знак амплитуды импульсов поперечных компонент возмущения скорости и магнитного поля ( $\bar{V}_x, \bar{B}_x$ ) зависит от угла  $\alpha$  и типа магнитоакустической волны (быстрой или медленной):

$$\frac{\bar{V}_x}{c_{\infty f,s}} = \frac{c_{az}^2 \sin \alpha}{\cos \alpha (c_{az}^2 - c_{\infty f,s}^2)} \rho_p, \quad \frac{\bar{B}_x}{B_0} = -\frac{c_{\infty f,s}^2 \sin \alpha}{(c_{az}^2 - c_{\infty f,s}^2)} \rho_p.$$

Поперечные компоненты  $\bar{V}_y, \bar{B}_y$  и продольная компонента  $\bar{B}_z$  не претерпевают возмущений.

В заключение подчеркнем, что широкий спектр и форма автоволнового магнитоакустического импульса не позволяют для его описания использовать нелинейные магнитоакустические уравнения, получаемые в ограниченных частотных диапазонах, например уравнение Бюргера

с нелинейным источником, полученное в высокочастотном диапазоне в [4].

Работа частично поддержана Минобрнауки РФ, государственное задание на выполнение работ на 2012–2014 годы, шифр 2.560.2011, и ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.“, ГК № 14.740.11.0999, 14.740.11.1140, соглашения 14.В37.21.0767, № 14.132.21.1423, 14.132.21.144, и грантами РФФИ 13-01-97001 р\_поволжье\_а, 13-01-97005 р\_поволжье\_а, 12-01-31229 мол\_а и НИР № ГР 01201156352.

## Список литературы

- [1] Кисляков А.Г., Зайцев В.В., Шкелев Е.И., Кисляков К.Г. // Вестник Нижегородского университета им. Н. Лобачевского. Сер. Радиофизика. 2011. № 4 (1). С. 76–88.
- [2] Heuvaerts J. // *Astron. & Astrophys* 1974. V. 37. P. 65–73.
- [3] Nakariakov V.M., Mendoza-Briceño C.A., Ibáñez S., Miguel H. // *Astrophysical Journal*. 2000. V. 528. Iss. 2. P. 767–775.
- [4] Chin R., Verwichte E., Rowlands G., Nakariakov V.M. // *Physics Plasmas*. 2010. V. 17. Iss. 3. P. 032 107-12.
- [5] Field G.B. // *Astrophysical Journal*. 1965. V. 142. P. 531–567.
- [6] Molevich N.E., Zavershinsky D.I., Galimov R.N., Makaryan V.G. // *Astrophysics and Space Science*. 2011. V. 334. Iss. 1. P. 35–44.
- [7] Parker E.N. // *Astrophysical Journal*. 1953. V. 117. P. 431–436.
- [8] Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. // *ЖЭТФ*. 1988. Т. 94. № 3. С. 128.
- [9] Макарян В.Г., Молевич Н.Е. // *Письма в ЖТФ*. 2003. Т. 29. В. 18. С. 11–15.
- [10] Макарян В.Г., Молевич Н.Е. // *Изв. РАН. МЖТ*. 2004. № 5. С. 181–191.
- [11] Makaryan V.G., Molevich N.E. // *J. Plasma Sourc. Sci. Techn.* 2007. V. 16. N 1. P. 124–131.