

01;11

Теоретическое и численное исследование „перемежаемости перемежаемостей“ в связанных хаотических системах

© М.О. Журавлев, А.А. Короновский, О.И. Москаленко,
А.Е. Храмов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Саратовский государственный технический университет
им. Гагарина Ю.А.
E-mail: zhuravlevmo@gmail.com

Поступило в Редакцию 1 марта 2013 г.

Приводится теоретическое описание поведения хаотической системы, которая одновременно демонстрирует два типа перемежающегося поведения: перемежаемость типа I и перемежаемость кольца. Рассмотрение проведено на примере однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера, показано хорошее соответствие теоретической модели и численных результатов.

Многие процессы в природе и физике носят перемежающийся характер, когда во временной реализации исследуемой системы (при фиксированных значениях управляющих параметров) последовательно чередуются два различных динамических режима (периодические колебания внезапно сменяются хаотическими, на смену которым вновь приходит периодическая динамика; стационарное состояние прерывается колебательным движением, после чего система вновь приходит к стационарному состоянию и т.п.). Проявления перемежающегося поведения весьма разнообразны и охватывают очень широкий круг

систем, что позволяет говорить об универсальности данного явления и его фундаментальном характере [1,2].

В настоящее время существует определенная классификация типов перемежающегося поведения, в частности выделяют перемежаемость типа I–III [2], on-off перемежаемость [3–6], перемежаемость игольного ушка [7], перемежаемость кольца [8]. Необходимо отметить, что данные типы перемежающегося поведения имеют некоторое сходство между собой (наличие во временном ряду двух различных режимов, чередующихся друг с другом), однако при этом каждый тип перемежаемости обладает своими собственными особенностями и характеристиками (прежде всего, это зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Механизмы, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны.

В последнее время было установлено, что в хаотических системах возможно существование более сложного типа перемежающегося поведения, названного „перемежаемость перемежаемостей“ [9]. Отличительной особенностью данного типа перемежаемости является то, что в исследуемой системе одновременно наблюдаются два различных по характеристикам типа перемежающегося поведения. Данный тип поведения представляет несомненный интерес, поскольку представляет собой принципиально иной уровень сложности в динамике нелинейных систем.

В данной работе на примере двух связанных осцилляторов Ресслера рассматривается перемежаемость перемежающегося поведения типа I, которое имеет место ниже границы фазовой хаотической синхронизации, и перемежаемости кольца, которая наблюдается в определенном диапазоне временных масштабов. Основные уравнения, описывающие динамику двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1, & \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \varepsilon(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1, & \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2, \\ \dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c), & \dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c), \end{aligned} \quad (1)$$

где $(x_1, y_1, z_1) [(x_2, y_2, z_2)]$ — координаты ведущей (ведомой) системы, ε характеризует силу связи между осцилляторами. Значения остальных

параметров были выбраны по аналогии с предыдущими работами [9,10] следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$, $\omega_1 = 0.93$, $\omega_2 = 0.95$.

Одной из основных количественных характеристик, описывающих режим перемежающегося поведения, является распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров. В [9] было получено аналитическое выражение для подобного распределения в случае сосуществования перемежаемости кольца и перемежаемости игольного ушка. Следуя логике действий, изложенной в вышеупомянутой работе, можно получить универсальную формулу для плотности вероятности $p(\tau)$ наблюдения ламинарной фазы длительностью τ :

$$p(\tau) = \frac{1}{T_1 + T_2} \left[\int_{\tau}^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{\tau}^{\infty} [p_1(l)p_2(s)T_2 + p_1(s)p_2(l)T_1] dl + \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) [p_1(\tau)p_2(s)T_2 + p_1(s)p_2(\tau)T_1] ds \right], \quad (2)$$

где $p_{1,2}(s)$ — распределения длительностей ламинарных фаз для сосуществующих одновременно двух различных типов перемежаемостей, $T_{1,2} = \int_0^{\infty} s p_{1,2}(s) ds$ — средние длительности ламинарных фаз для этих типов.

Рассмотрение поведения связанных хаотических систем на различных временных масштабах [11,12] основано на введении непрерывного множества фаз исследуемых сигналов с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt, \quad (3)$$

с материнским вейвлетом Морле

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right), \quad (4)$$

$\Omega_0 = 2\pi$.

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)|e^{j\varphi_s(t_0)} \quad (5)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2 \quad (6)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0 \quad (7)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Следует отметить, что при использовании вейвлетного преобразования (3) для каждого временного масштаба s оказывается естественным образом определена непрерывная фаза $\varphi(s, t) = \arg W(s, t)$. Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$, являющейся непрерывной функцией временного масштаба s и времени t . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полным образом характеризует поведение связанных систем: возможно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$.

Для выбранных значений параметров синхронный режим устанавливается при значении параметра связи $\varepsilon_c \approx 0.045$, при этом синхронные временные масштабы лежат в диапазоне $s \in [s_l; s_h]$, $s_l = 4.99$, $s_h = 8.25$. Ниже границы возникновения синхронного режима на основном временном масштабе наблюдения имеет место перемежаемость игольного ушка, ниже которой при $\varepsilon < \varepsilon_t = 0.039$ наблюдается перемежаемость типа I. На граничных временных масштабах наблюдения имеет место перемежаемость кольца [10]. В то же самое время существует диапазон временных масштабов, где оба типа перемежаемости (перемежаемости типа I и кольца) существуют одновременно, т.е. реализуется „перемежаемость перемежаемостей“. Отметим, что результаты исследования одновременного сосуществования перемежаемости игольного ушка и кольца были получены ранее в работе [9], поэтому проверим корректность соотношения (2) на примере перемежаемости перемежаемостей типа I и кольца.

Используя соотношение (2) и принимая во внимание тот факт, что распределение длительностей ламинарных фаз для перемежаемости кольца подчиняется экспоненциальному закону

$$p(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \quad (8)$$

(см. [8]), а для перемежаемости типа I может быть аппроксимировано закономерностью

$$p(\tau) = \frac{A}{(D\tau)^{3/2}} \exp\left(\frac{-(z-\tau)^2}{D\tau}\right), \quad (9)$$

где A — коэффициент пропорциональности, получаемый из условия нормировки, D — интенсивность эффективного шума, z — граница ламинарной фазы, выражение (2) для перемежаемости перемежаемостей типа I и кольца можно переписать в виде

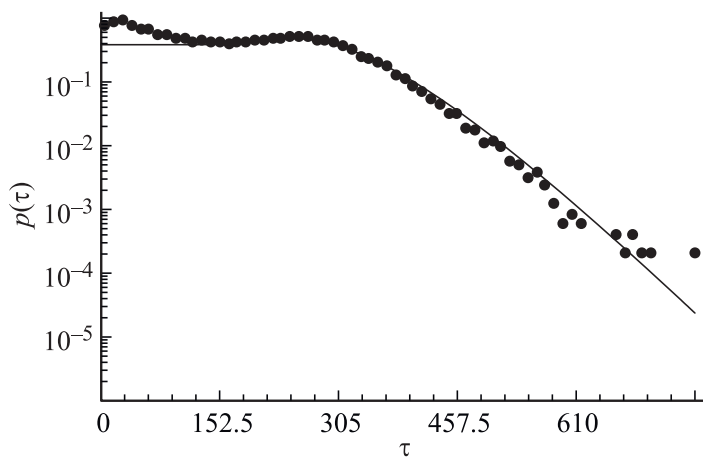
$$\begin{aligned} p(\tau) = & \frac{1}{T_1 + T_2} F_1(\tau) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_2}\right) + \frac{T_2}{T_1 + T_2} \frac{A}{(D\tau)^{3/2}} \exp\left(\frac{-(z-\tau)^2}{D\tau}\right) \\ & \times \left(\exp\left(-\frac{\tau}{T_2}\right) - \frac{\tau}{T_2} \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_2}\right) \right) + \frac{T_1}{T_1 + T_2} \exp\left(-\frac{\tau}{T_2}\right) F_2(\tau) \\ & + \frac{T_1}{T_1 + T_2} \times \frac{1}{T_2} \exp\left(-\frac{\tau}{T_2}\right) \times (F_1(\tau) - \tau F_2(\tau)), \quad (10) \end{aligned}$$

где $\Gamma(a, z)$ — неполная Γ -функция, T_1 — средняя длительность ламинарных фаз для перемежаемости типа I, T_2 — для перемежаемости кольца,

$$F_1(\tau) = \int_{\tau}^{\pi/2} \frac{A}{(Dx)^{3/2}} \exp\left(\frac{-(z-x)^2}{Dx}\right) dx, \quad (11)$$

$$F_2(\tau) = \int_{\tau}^{\pi/2} \frac{A}{(Dx)^{5/2}} \exp\left(\frac{-(z-x)^2}{Dx}\right) dx. \quad (12)$$

Плотность вероятности распределения длительностей ламинарных фаз, полученная численно для двух однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера (1), находящихся в режиме одновременного сосуществования двух типов перемежаемости, приведена на рисунке. Из



Распределение длительностей ламинарных фаз для режима одновременного сосуществования перемежаемости типа I и перемежаемости кольца для двух систем Ресслера (1) и аналитическая зависимость (10), соответствующая этому распределению. Теоретическая кривая показана сплошной линией, данные, полученные численно, — точками. Ось ординат показана в логарифмическом масштабе, $\varepsilon = 0.022$, $s = 6.4$, $T_2 = 100$, $T_1 = 259$, $z = 0.02$, $D = 0.0023$.

данного рисунка видно, что теоретическая зависимость (10), показанная сплошной линией, находится в хорошем соответствии с полученными численными результатами, которые представлены на рисунке в виде точек.

Полученное распределение при указанных значениях управляющих параметров имеет вид, нехарактерный для других известных типов перемежающегося поведения, что вместе с очень хорошим соответствием результатов численного моделирования аналитической зависимости (10) свидетельствует о том, что в рассматриваемом случае действительно имеет место перемежающееся поведение режимов перемежаемости типа I и перемежаемости кольца. Поскольку аналитическая формула (2) для плотности вероятности $p(\tau)$ распределения длительностей ламинарных фаз оказывается справедливой как для случая перемежаемости перемежаемостей типа I и кольца, рассмотренного в данной работе, так и для случая перемежаемости перемежаемостей

кольца и игольного ушка, рассмотренного в [9], можно говорить также о корректности аналитической формулы (2), записанной в общем виде.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашения № 14.В37.21.0751, 14.132.21.1426) и ФНП „Династия“.

Список литературы

- [1] Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе М.: Мир, 1991.
- [2] Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
- [3] Boccaletti S., Valladares D.L. // Phys. Rev. E. 2000. V. 62(5). P. 7497–7500.
- [4] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Europhysics Lett. 2005. V. 70(2). P. 169–175.
- [5] Москаленко О.И., Короновский А.А., Шурыгина С.А. // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7(2). С. 197–208.
- [6] Heagy J.F., Platt N., Hammel S.M. // Phys. Rev. E. 1994. V. 49(2). P. 1140–1150.
- [7] Pikovsky A.S., Osipov G.V., Rosenblum M.G., Zaks M., Kurths J. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79(1). P. 47–50.
- [8] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Kurovskaya M.K., Boccaletti S. // Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97. P. 114 101.
- [9] Журавлев М.О., Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2011. Т. 19(1). С. 109–121.
- [10] Zhuravlev M.O., Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Ovchinnikov A.A., Hramov A.E. // Phys. Rev. E. 2011. V. 83. P. 027 201.
- [11] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Chaos. 2004. V. 14(3). P. 603–610.
- [12] Hramov A.E., Koronovskii A.A. // Physica D. 2005. V. 206(3–4). P. 252–264.