*03*

# Условие существования стационарного течения в канале переменного сечения при подводе тепла и диссипации кинетической энергии

© *А.Ф. Латыпов*

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск
E-mail: latypov@itam.nsc.ru

*Поступило в Редакцию 28 мая 2012 г.*

Для стационарного течения газа в канале переменной площади сечения при подводе тепла и наличии диссипации кинетической энергии получено выражение для максимально допустимого приращения энтропии и условие перехода через скорость звука. Рассмотрены примеры течений.

Рассмотрим одномерное стационарное течение идеального газа в канале переменной площади сечения $F(x)$ при подводе тепла и наличии процессов диссипации кинетической энергии ($x \geqslant 0$ — продольная координата, $L$ — длина канала). Параметры поступающего в канал газа: $\mathrm{M}_\infty$ — число Маха, $p_\infty$ — давление, $T_\infty$ — температура, $a_\infty$ — скорость звука, $\rho_\infty$ — плотность, $i_{0\infty}$ — энтальпия торможения, $F_\infty$ — сечение трубки тока. Пусть в некотором сечении $F(x)$ (рис. 1) имеет место вариация числа Маха M вследствие вариации количества рассеянной кинетической энергии перед этим сечением вверх по потоку. Определим вариацию энтропии $\delta S$ при условиях сохранения полной энтальпии газа и расхода. Из соответствующих данным условиям уравнений

$$\frac{\delta T}{T} + \frac{(\gamma-1)\mathrm{M}^2}{1+0.5(\gamma-1)\mathrm{M}^2}\,\frac{\delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 0, \qquad \frac{\delta p}{p} - 0.5\,\frac{\delta T}{T} + \frac{\delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} = 0,$$

$$\frac{\delta S}{R} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\,\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta p}{p}$$

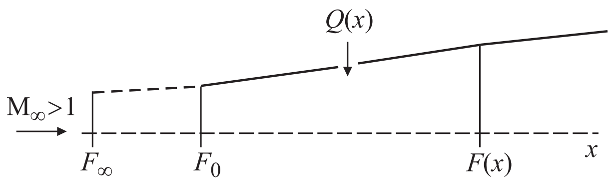


**Рис. 1.** Схема течения в канале с подводом тепла: $x$ — продольная координата, $F_\infty$ — сечение невозмущенного потока, $F_0$ — входное сечение канала, $Q(x)$ — функция мощности подводимого тепла.

получаем

$$\frac{\delta S}{r} = \frac{1 - \mathrm{M}^2}{1 + 0.5(\gamma - 1)\mathrm{M}^2}\,\frac{\delta \mathrm{M}}{\mathrm{M}} \tag{1}$$

($\gamma$ — показатель адиабаты, $R$ — газовая постоянная). Из (1) следует, что при числе Маха $\mathrm{M} = 1$ энтропия достигает максимального значения.

Зададим функцию $Q(x)$, определяющую количество подведенного тепла между входным сечением $F_0$ и сечением $F(x)$. Для безразмерных величин сохраним исходные обозначения $p = p/p_\infty$, $\rho = \rho/\rho_\infty$, $T = T/T_\infty$, $\Delta S = \Delta S/R$, $F = F/F_0$ и введем параметры $\theta = Q/i_{0\infty}$ — относительное количество подведенного тепла, $\chi = F_\infty/F_0$ — коэффициент расхода. Запишем уравнения энергии, неразрывности и приращения энтропии

$$(1+\theta)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_\infty^2\right) = T\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2\right),$$

$$\frac{p\mathrm{M}}{\sqrt{T}\mathrm{M}_\infty}\,\frac{F}{\chi} = 1, \quad p = T^{\gamma/(\gamma-1)}\exp(-\Delta S). \tag{2}$$

Исключая давление и температуру из второго уравнения в (2), получаем

$$(1+\theta)^n\,\frac{\varphi(\mathrm{M})}{\varphi(\mathrm{M}_\infty)}\,\frac{F}{\chi} = \exp(\Delta S),$$

$$\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{M}\left(\frac{2 + (\gamma-1)\mathrm{M}^2}{\gamma+1}\right)^{-1}, \quad n = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \tag{3}$$

Функции $\varphi(\mathrm{M})$ при числе Маха $\mathrm{M} = 1$ достигает максимального значения $\varphi(1) = 1$ (относительная вариация $\varphi(\mathrm{M})$ определяется выражением (1)). Полагая в (3) $\mathrm{M} = 1$, получаем максимально допустимое приращение энтропии при подводе количества тепла $Q(x)$ и наличии диссипации кинетической энергии

$$\Delta S_{\max}(x) = \ln\left(1 + \theta(x)\right)^n + \ln f(x, \mathrm{M}_\infty),$$

$$f(x, \mathrm{M}_\infty) = \frac{1}{\varphi(\mathrm{M}_\infty)} \frac{F(x)}{\chi}. \tag{4}$$

Второй член в (4) определяет максимально допустимое приращение энтропии при отсутствии подвода тепла. Для существования стационарного течения в канале необходимо выполнение условия

$$\Delta S(x) \leqslant \Delta S_{\max}(x), \quad x \in [0, L]. \tag{5}$$

Так как энтропия является аддитивной функцией, условие (5) справедливо также для двумерных и трехмерных течений. Для осредненных при условиях сохранения расхода, энергии и энтропии параметров течения невыполнение условия (5) означает, что этот поток не может быть пропущен через данное сечение. Необходимо либо увеличить площадь сечения в $\exp[\Delta S(x) - \Delta S_{\max}(x)]$ раз, либо уменьшить расход. Возможна также такая перестройка течения, при которой выполняется условие (5). Например, в экспериментах [1] при горении водорода начальный сверхзвуковой поток перестраивается таким образом, что через 25–30 ms горение происходит в дозвуковом течении.

При анализе течений в канале широко применяется метод осреднения с использованием законов сохранения энергии, расхода и полного импульса [2]. Такое осреднение увеличивает энтропию газа на $\Delta S_p$, что приводит к „паразитному“ уменьшению полного давления в $\exp(\Delta S_p)$ раз. При этом уменьшается также работоспособность газа и завышается оценка полноты сгорания топлива в камерах сгорания двигателей по результатам измерений давления в канале. Поэтому при формировании одномерного эквивалента неравномерного потока осреднение необходимо проводить при условии сохранения суммарной энтропии.

Запишем законы сохранения для элементарного объема $dx$ в размерных переменных

$$\frac{T'}{T} + (\gamma - 1)\mathrm{M}^2 \frac{V'}{V} = \frac{Q'(x)}{c_P T}, \quad \frac{p'}{p} - \frac{T'}{T} + \frac{V'}{V} = -\frac{F'(x)}{F(x)},$$

$$\frac{p'}{p} + \gamma \mathrm{M}^2 \frac{V'}{V} = -\frac{H'(x)}{RT}. \tag{6}$$

Здесь $V$ — скорость потока, $c_p$ — теплоемкость при постоянном давлении, $H(x)$ — функция диссипации кинетической энергии, штрих обозначает дифференцирование переменных по координате $x$. Определитель этой системы уравнений равен $\Delta_0 = 1 - \mathrm{M}^2$ и при $\mathrm{M} = 1$ обращается в нуль. Для того чтобы было возможным непрерывное продолжение решения в точке $x = x_*$, в которой $\mathrm{M}(x_*) = 1$, определитель, получаемый заменой какого-либо столбца в определителе $\Delta_0$ вектор-столбцом правой части уравнений (6), также должен быть равен нулю. Получаемое при этом условие имеет вид

$$\frac{Q'(x_*)}{c_P T_*} + \frac{H'(x_*)}{RT_*} - \frac{F'(x_*)}{F(x_*)} = 0. \tag{7}$$

При $x > x_*$ в зависимости от предыстории и граничных условий течение может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым. Из (6), (7) посредством предельного перехода $\mathrm{M} \to 1$ могут быть получены уравнения для продолжения решения.

Соотношения между реальными и максимально допустимыми значениями энтропии определяют разнообразие возможных течений. Рассмотрим некоторые примеры.

На рис. 2, *a* представлена схема стационарного течения с подводом тепла в сверхзвуковой поток в расширяющейся части канала. Пусть в сечении *1*, бесконечно близком слева к конечному сечению зоны подвода тепла, число Маха равно единице и выполнены условия (5), (7). Согласно (1), энтропия в этом сечении равна максимально допустимому значению. Принято также, что в соответствии с (8) за сечением *1* поток является сверхзвуковым. Такое стационарное решение уравнений (2) существует, однако оно неустойчиво. Пусть в сечении, примыкающем к сечению *1* слева, дополнительно подводится бесконечно малое количество тепла $\delta Q$. Приращения энтропии потока и ее максимально

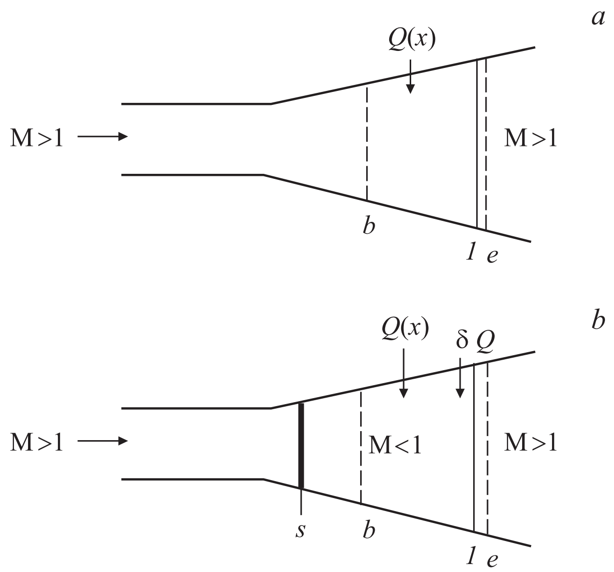


**Рис. 2.** Схемы течения в канале с подводом тепла в расширяющемся участке: *a* — неустойчивое течение; *b* — устойчивое течение; $Q(x)$ — функция мощности подводимого тепла между сечениями *b* и *e*; *x* — продольная координата; *1* — сечение, бесконечно близкое к сечению *e*; в сечении *1* число Маха равно единице; *s* — место положения скачка уплотнения.

допустимого значения в сечении *1* составляют

$$\frac{\delta S}{R} = \frac{\delta Q}{RT} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{\delta T_0}{T}, \quad \frac{\delta S_{\max}}{R} = \frac{1}{2}\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\frac{\delta\theta}{1 + \theta} = \frac{1}{2}\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\frac{\delta T_0}{T_0}. \quad (8)$$

Из (8) получаем ($T_0$ — температура торможения)

$$\frac{\delta S}{\delta S_{\max}} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}\frac{T_0}{T} > 1,$$

что свидетельствует о невыполнении условия (5), т. е. о разрушении течения. Расход через сечение *1* уменьшается, давление перед ним начинает увеличиваться, так как расход во входном сечении постоянен. По завершении переходного процесса устанавливается течение, схема которого показана на рис. 2, *b*. В некотором сечении перед зоной подвода тепла возникает прямой скачок уплотнения. При подводе тепла имеет место меньшее приращение энтропии, чем в начальном сверхзвуковом потоке, так как средняя температура, при которой подводится тепло, больше. Сумма приращений энтропии в скачке уплотнения и при подводе тепла равна максимально возможному значению в сечении *1*. Это условие определяет положение скачка уплотнения. Течение устойчиво, поскольку вариация $\pm\delta Q$ вызывает лишь вариацию положения скачка уплотнения при соблюдении условий (5) и (7). При этом вариация суммарного приращения энтропии равна вариации $\delta S_{\max}$ в сечении *1*. Допустимость вариаций $\delta Q$ произвольного знака в этом течении обусловливает возникновение гистерезиса по параметру относительного подвода тепла $\theta$, что является причиной возможных режимов со значительными колебаниями параметров потока. Численные примеры подобных течений, возникающих при импульсно-периодическом подводе энергии в канале, приведены в [3]. Для сверхзвуковых течений в длинных каналах без подвода тепла с диссипацией кинетической энергии нарушение условия (5) является причиной формирования псевдоскачковых режимов [4].

На рис. 3 приведена схема оптимальной камеры сгорания гиперзвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя [5]. Во входном сечении канала поток имеет сверхзвуковую скорость. Закон распределения подводимого тепла в канале полагается таким, что в конце цилиндрического участка и далее в расширяющейся части канала число

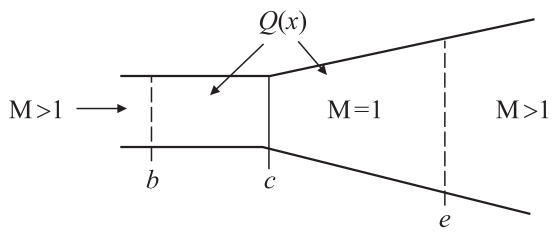


**Рис. 3.** Схема оптимальной камеры сгорания гиперзвукового прямоточного воздушно-реактивного двигателя: $Q(x)$ — функция мощности подводимого тепла между сечениями $b$ и $e$, $x$ — продольная координата; $c$ — конечное сечение цилиндрического участка канала; в зоне между сечениями $c$ и $e$ число Маха равно единице.

Маха равно единице. Однако такое течение нереализуемо вследствие его неустойчивости: слева от выходного сечения цилиндрического участка не выполняется условие (7), а в расширяющейся части при малых возмущениях нарушается условие (5).

Пусть всюду в канале $\Delta S(x) \leqslant \Delta S_{\max}(x)$, $x \in [0, L]$. В каждом сечении возможны два стационарных решения. В зависимости от предыстории и граничных условий реализуется течение с дозвуковой или (и) сверхзвуковой скоростью (например, течение в сопле Лаваля).

Таким образом, получено условие существования стационарного течения в канале переменной площади сечения: в каждом сечении энтропия не должна превышать максимального значения, определяемого числом Маха втекающего потока, относительной площадью сечения и относительным количеством подведенного тепла. Это условие справедливо для течений произвольной размерности. По сути, в каждом сечении энтропия является параметром бифуркации, т. е. при ее критическом значении возможен переход к другому режиму течения.

## Список литературы

[1] *Chalot F., Rostand P., Perrier P.* et al. Validation of global aeropropulsive characteristics of integrated configurations // N.Y. 1998 (Paper/AIAA; N 98-1624).

[2] *Крокко Л.* // Основы газовой динамики/ Под ред. С. Эммонса. М.: Изд-во ИЛ, 1963. С. 64–324. Fundamentals of Gas Dynamics. V. III. High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion / Ed. Howard W. Emmons. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1958.

[3] *Латыпов А.Ф.* // ПМТФ. 2009. Т.50. № 1. С. 3–11.

[4] *Гуськов О.В., Копченов В.И., Липатов И.И., Острась В.Н., Старухин В.П.* Процессы торможения сверхзвуковых течений в каналах. М.: Физматлит, 2008. 168 с.

[5] *Хенкин П.В.* // Газодинамика и физическая кинетика: Сб. тр. Новосибирск: Институт теоретической и прикладной механики СО АН СССР, 1974. С. 147–149.