

09

## **Восстановление архитектуры связей в ансамбле связанных систем с запаздыванием**

© *И.В. Сысоев, В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники  
им. В.А. Котельникова РАН  
E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

*Поступило в Редакцию 12 марта 2012 г.*

Предложен метод восстановления архитектуры и величины связей в ансамбле взаимодействующих систем с запаздыванием с произвольным числом связей между элементами ансамбля. Метод основан на реконструкции модельных уравнений элементов ансамбля и диагностике значимости связей с помощью последовательного пробного исключения или добавления коэффициентов связи в модель.

Проведение сложных систем различной природы, состоящих из нескольких взаимодействующих между собой элементов, зависит не только от свойств самих элементов, но и от характера связей между ними. Например, структура и интенсивность связей в ансамбле колебательных систем определяет возможность их синхронизации и образования различных пространственно-временных структур [1–4]. В последние годы большое внимание привлекает задача выявления наличия, структуры и характеристики связей в ансамблях многоэлементных систем по временным рядам [5–7], для решения которой используются методы, основанные на моделировании фазовой динамики. В данной работе предложен метод восстановления архитектуры и величины связей в больших ансамблях взаимодействующих систем на основе метода реконструкции

модельных уравнений элементов ансамбля. С его помощью впервые проведено восстановление априорно неизвестной архитектуры связей в большом ансамбле хаотических систем с запаздыванием со сложной структурой связей.

Рассмотрим ансамбль, состоящий из диффузионно связанных систем с запаздыванием, каждая из которых описывается уравнением следующего вида:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (1)$$

где  $i = 1, \dots, M$ ,  $M$  — число элементов в ансамбле,  $\varepsilon_i$  — параметр инерционности,  $\tau_i$  — время запаздывания,  $f_i$  — нелинейная функция,  $k_{i,j}$  — коэффициент связи.

Для определения всех коэффициентов связи в ансамбле мы предлагаем метод, основанный на реконструкции модельного уравнения (1) для каждого элемента по временным рядам. Восстановим сначала времена запаздывания. Ранее нами было установлено, что во временных реализациях изолированных ( $k_{j,j} = 0$ ) систем с задержкой вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [8]. Определив для различных значений  $\tau$  число  $N_i$  ситуаций, при которых точки хаотического временного ряда, разделенные интервалом времени  $\tau$ , одновременно являются экспериментальными, и построив зависимость  $N_i(\tau)$ , можно найти время задержки  $\tau_i$  как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [8]. Правомерность использования такого метода для восстановления  $\tau_i$  в цепочке связанных систем с задержкой обоснована в [9]. Проведенные нами исследования показывают, что этот метод определения времени запаздывания остается эффективным и для ансамблей систем (1) с произвольным числом связей между элементами при условии, что взаимодействие систем не приводит к появлению большого числа дополнительных экстремумов в хаотических временных реализациях их колебаний. Это допущение остается справедливым при слабой связи ( $k_{i,j} \ll x_i$ ) даже для глобально связанных систем (1). Отметим, что условие слабой связи и отсутствие синхронизации между элементами ансамбля является необходимым практически для всех методов выявления связей [7].

Определив  $\tau_i$ , можно восстановить параметр  $\varepsilon_i$ , нелинейную функцию  $f_i$  и коэффициенты связи  $k_{i,j}$ -й системы с задержкой (1), имея

временные ряды колебаний всех элементов ансамбля. Для этого мы предлагаем следующий подход. Запишем уравнение (1) в виде

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)) = f_i(x_i(t - \tau_i)). \quad (2)$$

Если построить зависимость левой части уравнения (2) от  $x_i(t - \tau_i)$ , то она воспроизведет функцию  $f_i$ . Поскольку заранее величины  $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$  неизвестны, будем искать их, минимизируя величину

$$L_i(\varepsilon_i, k_{i,j}) = \sum_{n=1}^{S-1} ((y_{i,n+1} - y_{i,n})^2 + (z_{i,n+1} - z_{i,n})^2), \quad (3)$$

характеризующую расстояние между точками на плоскости  $(y_i, z_i)$ , отсортированными по величине координаты  $y_i$ , где

$$y_i = x_i(t - \tau_i), \quad z_i = \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j} (x_j(t) - x_i(t)),$$

$n$  — номер точки, а  $S$  — число точек. При ошибочном выборе значений  $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$  точки на плоскости  $(y_i, z_i)$  не ложатся на одномерную кривую  $f_i$ , а значит, величина  $L_i(\varepsilon_i, k_{i,j})$  будет больше, чем при истинных  $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$ .

Для  $\varepsilon_i$  и  $k_{j,j}$  мы задаем стартовые догадки и уточняем их симплекс-методом [10], минимизируя (3), минимум которой обозначим  $L_{i,M}$ . При  $M \leq 4$  и отсутствии шума все параметры восстанавливаются с высокой точностью. Однако уже при  $M > 4$  типичной является ситуация, когда метод не позволяет выявить отсутствующие связи между элементами ансамбля. Такие связи диагностируются как слабые из-за наличия опосредованных связей через другие элементы. Избавиться от незначимых связей позволяет метод последовательного пробного исключения коэффициентов  $k_{j,j}$  из модели (1). Мы выдвигаем гипотезу отсутствия связи между двумя элементами, исключая соответствующий коэффициент связи  $k_{i,j}$  и восстанавливаем остальные параметры модели, находя при этом минимум  $L_{i,j,M-1}$  функции (3). Затем повторяем процедуру, исключая другой  $k_{i,j}$  при фиксированном  $i$ , и так далее для всех  $j = 1, \dots, M$  ( $j \neq i$ ). Наконец, мы определяем, исключение

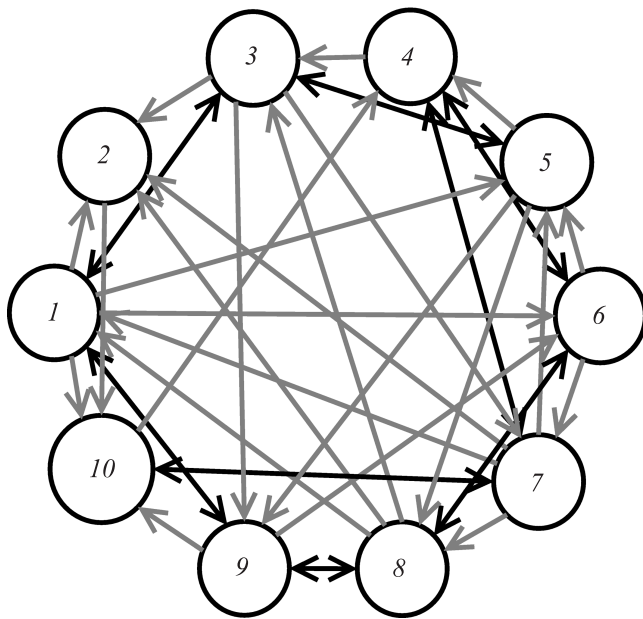
какого из  $k_{i,j}$  дает  $L_{i,M-1} = \min_j L_{i,j,M-1}$ , и оцениваем статистическую значимость величины  $L = L_{i,M-1}/L_{i,M}$ , руководствуясь следующими соображениями. При больших  $S$  разности  $y_{i,n+1} - y_{i,n}$  и  $z_{i,n+1}$  в (3) распределены по закону, близкому к нормальному, причем  $S/2$  из них можно считать независимыми, поскольку они не имеют общих координат. Кроме того,  $L_{i,M}$  зависит от  $M$  параметров модели (2), что уменьшает число независимых величин в (3) до  $S/2 - M$ . Тогда, учитывая, что сумма квадратов  $K$  независимых нормально распределенных величин распределена по закону хи-квадрат с  $K$  степенями свободы [11], получим, что распределение величин  $L_{i,M}$ , полученных при разных значениях параметров и/или наличии шума, подчиняется закону хи-квадрат с  $S/2 - M$  степенями свободы, а величин  $L_{i,M-1}$  — закону хи-квадрат с  $S/2 - M + 1$  степенями вободы.

Известно, что величина  $X$ , являющаяся отношением двух независимых случайных величин, распределенных по закону хи-квадрат со степенями свободы  $v$  и  $w$ , имеет распределение Фишера—Снедекора с функцией распределения

$$F_{v,w}(X) = B_d \left( \frac{v}{2}, \frac{w}{2} \right), \quad (4)$$

где  $B$  — неполная бета-функция, а  $d = vX/(vX + w)$  [12]. Следовательно, величина  $L$  имеет функцию распределения (4) с  $X = L$ ,  $v = S/2 - M + 1$ ,  $w = S/2 - M$ . Обозначим через  $L_{1-p}$  такое значение  $L$ , при котором  $F_{v,w}(L_{1-p}) = 1 - p$ , где  $p$  — уровень статистической значимости. Тогда, если  $L > L_{1-p}$ , то на уровне значимости  $p$  можно сделать вывод о наличии связи между элементами, а значит, все  $k_{i,j} \neq 0$ . В противном случае мы делаем вывод об отсутствии связи между соответствующими элементами и проверяем значимость остальных связей, последовательно исключая из оставшихся связей  $i$ -го элемента по одной. Процедура повторяется, пока все связи не окажутся значимыми. Такой подход позволяет восстановить архитектуру связей, параметры всех элементов и их нелинейные функции.

Если известно, что число связей между элементами ансамбля мало, для восстановления архитектуры и величины связей предпочтительнее использовать метод последовательного пробного добавления коэффициентов  $k_{i,j}$  в модель (1). Сначала найдем минимум  $L_{i,1}$  функции (3), предположив, что в уравнении (1) отсутствуют все  $k_{i,j}$  (связей нет). Затем будем вводить в (1) по одному  $k_{i,j}$ , находя минимум  $L_{i,j,2}$



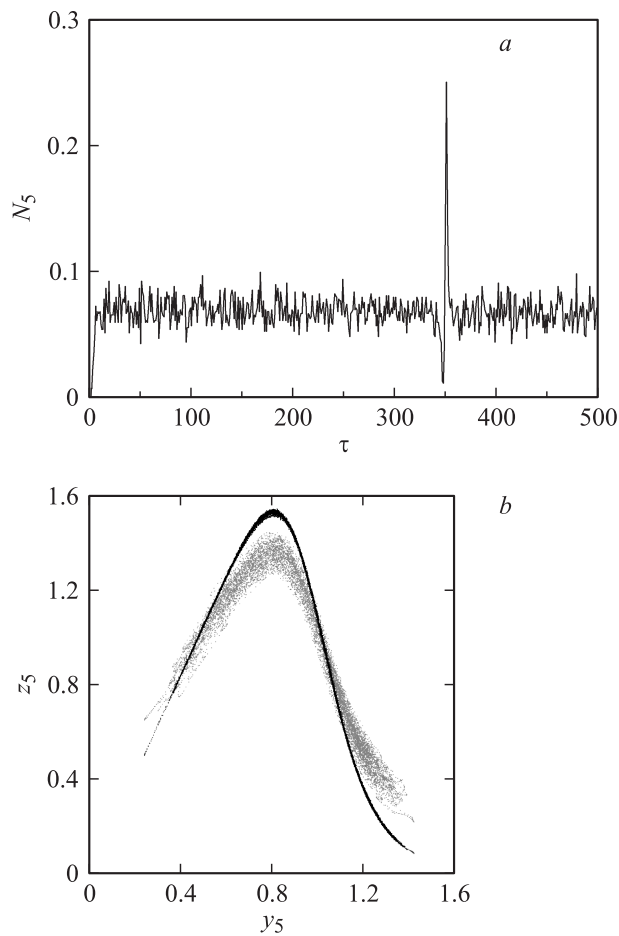
**Рис. 1.** Архитектура связей в ансамбле из 10 элементов. Из возможных 90 связей присутствует 40. Черным цветом показаны двусторонние связи, а серым — односторонние.

функции (3). Перебрав все  $j \neq i$ , найдем  $L_{i,2} = \min_j L_{i,j,2}$ . Если  $L > L_{1-p}$ , где  $L = L_{i,1}/L_{i,2}$ , а  $F_{v,w}$  построена при  $v = S/2 - 1$ ,  $w = S/2 - 2$ , то введенная связь отлична от нуля на уровне значимости  $p$ . Процедура повторяется, пока очередная добавленная в модель связь не окажется незначимой.

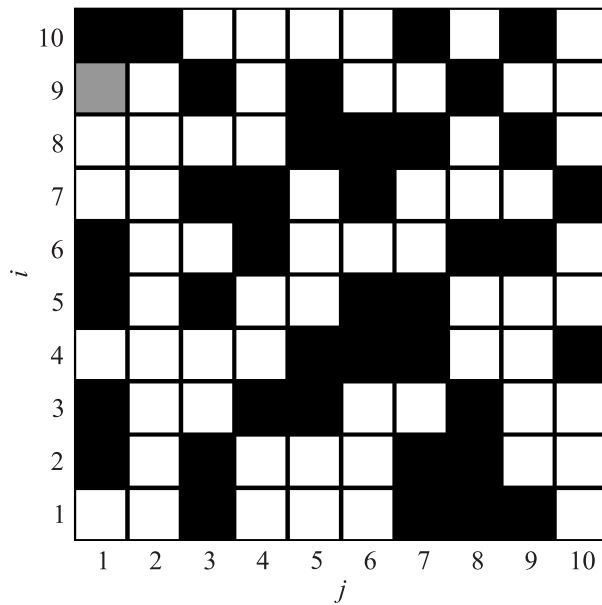
В качестве примера рассмотрим восстановление архитектуры связей в ансамбле связанных систем Маккея–Гласса, описываемых уравнением (1) с функцией

$$f_i(x_i(t - \tau_i)) = \frac{a_i x_i(t - \tau_i)}{b_i(1 + x_i^{10}(t - \tau_i))} \quad (5)$$

и  $\varepsilon_i = 1/b_i$ , на которые действует  $\xi_i(t)$  — независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2$ . Параметры элементов



**Рис. 2.** *a* — число  $N_5$  пар экстремумов временного ряда переменной  $x_5(t)$  на удалении  $\tau$  друг от друга, нормированное на общее число экстремумов в ряде,  $N_{5\min}(\tau) = N_5(348)$ ; *b* — нелинейная функция  $f_5$ , восстановленная на плоскости  $(y_5, z_5)$ , где  $y_5 = x_5(t - \tau'_5)$ ,  $z_5 = \varepsilon'_5 \dot{x}_5(t) + x_5(t) - \sum_{j=1(j \neq 5)}^{10} k'_{5,j} (x_j(t) - x_5(t))$ , при полученных при реконструкции параметрах  $\tau'_5 = 348$ ,  $\varepsilon'_5 = 8.4$ ,  $k'_{5,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, 10$ ,  $j \neq 5$  (серый цвет) и  $\tau'_5 = 348$ ,  $\varepsilon'_5 = 9.6$ ,  $k'_{5,1} = 0.111$ ,  $k'_{5,3} = 0.085$ ,  $k'_{5,6} = 0.105$ ,  $k'_{5,7} = 0.080$ ,  $k'_{5,j} = 0$ ,  $j = 2, 4, 5, 8, 9, 10$  (черный цвет).



**Рис. 3.** Диаграмма результатов восстановления архитектуры связей в ансамбле из 10 систем Маккея–Гласса, полученная на уровне значимости  $p = 0.05$  с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель. Черным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым цветом — правильно диагностированные отсутствующие связи, серым цветом — пропущенные связи.

задавались случайно: целое  $\tau_i \in [300, 400]$ ,  $\varepsilon_i \in [8, 12]$ ,  $a_i \in [0.2, 0.25]$ ,  $k_{i,j} \in [0.08, 0.12]$ ,  $\sigma_i^2 = 10^{-4}$ . При этом все элементы колеблются хаотически. Их временные ряды имеют по 10 000 точек с шагом выборки 1. На рис. 1 приведена архитектура случайно выбранных связей в ансамбле из  $M = 10$  элементов.

Результаты восстановления одного из элементов с параметрами  $\tau_5 = 348$ ,  $\varepsilon_5 = 9.5$ ,  $k_{5,1} = 0.112$ ,  $k_{5,3} = 0.085$ ,  $k_{5,6} = 0.116$ ,  $k_{5,7} = 0.090$ ,  $k_{5,j} = 0$ ,  $j = 2, 4, 5, 8, 9, 10$  иллюстрирует рис. 2. Подсчитав число  $N_5$  одновременных обращений в нуль  $\dot{x}_5(t)$  и  $\dot{x}_5(t - \tau)$  для различных значений  $\tau$ , перебираемых с шагом 1, построим зависимость  $N_5(\tau)$  (рис. 2, а). Для оценки производной по временному ряду мы исполь-

зовали локальную параболическую аппроксимацию. Минимум  $N_5(\tau)$  наблюдается при истинном времени запаздывания  $\tau = \tau_5 = 348$ .

На рис. 2, *b* серым цветом показана функция  $f_5$ , полученная при восстановлении уравнения (1) в предположении, что все элементы ансамбля не связаны между собой, а черным цветом показана функция  $f_5$ , восстановленная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель при  $p = 0.05$ . Учет архитектуры связей существенно улучшает качество восстановления нелинейной функции и точность оценки параметров модели. Погрешности их восстановления вызваны преимущественно наличием шума.

Результаты восстановления архитектуры связей во всем ансамбле, полученные с помощью метода добавления связей, приведены на рис. 3. Клетка с координатами  $(j, i)$  показывает влияние  $j$ -го элемента на  $i$ -й, кроме клеток на диагонали, не несущих никакой информации. На уровне значимости  $p = 0.05$  из 40 существующих связей (рис. 1) мы нашли 39. Пропущенной оказалась лишь 1 связь, ложных связей нет. Отметим, что при восстановлении архитектуры связей по тем же временным рядам с помощью метода исключения связей мы получили большое количество ложных связей при том же  $p$ . Метод исключения связей оказывается более эффективным при реконструкции ансамблей, в которых число имеющихся связей во много раз больше числа отсутствующих связей. Метод добавления связей, напротив, наиболее эффективен, когда число связей в ансамбле мало. Причем он хорошо работает даже в больших ансамблях ( $M = 50$ ). Рассмотренный нами случай, когда число имеющихся и отсутствующих связей сопоставимо, является наиболее сложным для реконструкции. В таких ситуациях более эффективным оказывается метод добавления связей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и гранта президента РФ, МК-4435.2012.8.

## Список литературы

- [1] *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shaleev V.D.* Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks. Singapore: World Scientific, 1995. 260 p.
- [2] *Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.* Синхронизация: фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 508 с. (*Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 432 p.).



- [3] *Bick C., Timme M., Paulikat D. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. N 24. P. 244 101.
- [4] *Temirbayev A.A., Zhanabaev Z.Z., Tarasov S.B., Ponomarenko V.I., Rosenblum M.* // Phys. Rev. E. 2012. V. 85. N 1. P. 015204.
- [5] *Timme M.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. N 22. P. 224 101.
- [6] *Tokuda I.T., Jain S., Kiss I.Z., Hudson J.L.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. N 6. P. 064 101.
- [7] *Smirnov D.A., Bezruchko B.P.* // Phys. Rev. E. 2009. V. 79. N 4. P. 046 204.
- [8] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П.* // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. В. 3. С. 515–527. (*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* // ЖЭТФ. 2005. V. 100. N 3. P. 457–467).
- [9] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36. В. 19. С. 59–67. (*Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* // Tech. Phys. Lett. 2010. V. 36. N 10. P. 902–905).
- [10] *Nedler J.A., Mead R.* // Computer J. 1965. V. 7. N 4. P. 308–313.
- [11] *Kendall M., Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics. New York: MacMillan, 1979. 748 p.
- [12] *Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Distributions. V. 2. New York: Wiley, 1995. 752 p.