

01;04

Новая формулировка критерия Бома в терминах ионно-звуковых волн

© А.Е. Дубинов, Л.А. Сенилов

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИ экспериментальной физики, Саров

E-mail: dubinov-ae@yandex.ru

Поступило в Редакцию 14 мая 2011 г.

Проведен критический анализ формулировок критерия Бома, регламентирующего существование стационарного заряженного приэлектродного слоя в плазме. Показано, что общепринятая формулировка критерия, основанная на сравнении скорости ионного дрейфа со скоростью ионно-звуковых волн, представляет собой сравнение параметров разных плазм, а его использование приводит к методически ошибочным выводам. Получена новая формулировка критерия, ограничивающего скорость ионного дрейфа как снизу, так и сверху.

В 1950-х гг. Д. Бом получил целый ряд первоклассных результатов в области физики плазмы. Так, например, его именем были названы аномально быстрая бомовская диффузия плазмы поперек магнитного поля, дисперсионное уравнение Бома–Гросса, описывающее обращение затухания Ландау, а также критерий Бома, регламентирующий существование стационарного заряженного приэлектродного слоя в плазме.

В данной работе критически рассмотрена и проанализирована современная общепринятая, так называемая „ионно-звуковая формулировка“ этого критерия.

Сформулируем основные допущения, использованные Бомом при выводе критерия в [1]. Он рассматривал задачу о стационарной структуре заряженного слоя для плазмы, которая состоит из безынерционных электронов, распределенных по Больцману, и холодных ионов, набегających на слой с дрейфовой скоростью V_{0i} .

Современная схема вывода критерия заключается в следующем (по [2]). Объединив уравнение непрерывности и интеграл движения для ионной компоненты с уравнением Пуассона, можно свести задачу к анализу следующего простого дифференциального уравнения для

безразмерных переменных:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 1/\sqrt{1 + 2\Phi/A^2} - \exp(-\Phi) = \mathcal{F}(\Phi), \quad (1)$$

в котором принято

$$\Phi = e\varphi/kT_e, \quad s = x/\lambda_D = x(4\pi n_0 e^2/kT_e)^{1/2}, \quad A = \sqrt{m_i V_{0i}^2/kT_e}$$

и обозначено: $\pm e$ — электрические заряды иона и электрона; m_i — масса иона; n_0 — концентрация невозмущенной (квазинейтральной) плазмы; T_e — электронная температура; k — постоянная Больцмана, λ_D — электронная длина Дебая. После умножения обеих частей уравнения (1) на $d\Phi/ds$, интегрирования и надлежащего выбора постоянной интегрирования можно получить закон сохранения

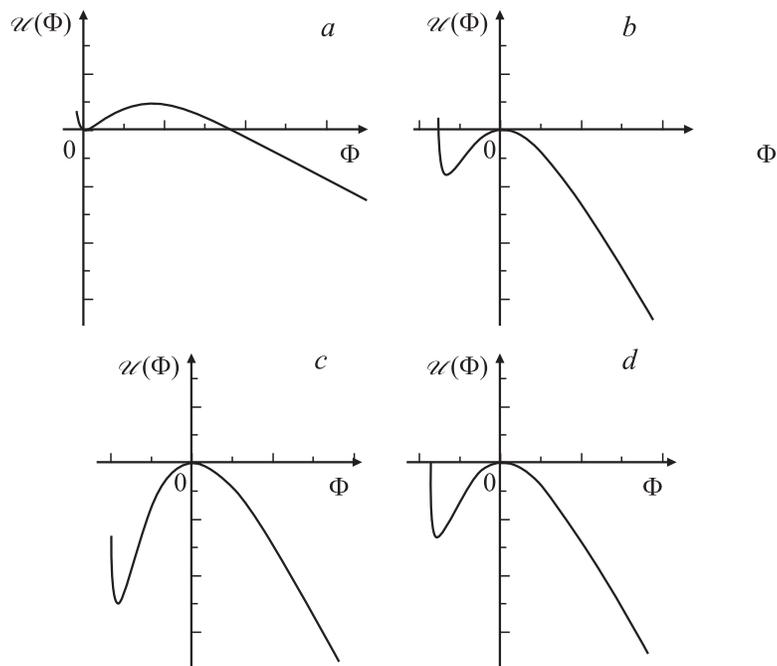
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 = 2A^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2\Phi}{A^2}} - 1\right) + 2[\exp(-\Phi) - 1] = -\mathcal{U}(\Phi). \quad (2)$$

Проанализировав правую часть (2), Бом показал, что физический смысл могут иметь решения этого уравнения лишь при $A > 1$, т.е. при

$$V_{0i} \geq \sqrt{kT_e/m_i}. \quad (3)$$

В противном случае решения носят осциллирующий характер, что нефизично. Неравенство (3) и есть тот самый критерий Бома, который составляет основу теории взаимодействия плазмы с заряженной стенкой.

Действие критерия (3) можно легко проиллюстрировать с помощью так называемого метода псевдопотенциала Сагдеева [3], часто применяемого при анализе нелинейных ионно-звуковых волн. Для этого положим, что (1) является уравнением движения некой псевдочастицы в силовом поле $\mathcal{F}(\mathcal{U})$, в котором переменная Φ играет роль ее псевдокоординаты, а s — ее псевдовремени. В такой интерпретации уравнение (2) принимает смысл закона сохранения энергии псевдочастицы, движущейся в псевдопотенциале $\mathcal{U}(\Phi)$. Тогда, например, при $A = 1/2$ (т.е. при $V_{0i} = (1/2)\sqrt{kT_e/m_i}$) псевдопотенциал вблизи точки равновесия будет иметь форму ямы (см. рисунок, *a*), которая и приводит к осцилляторному движению псевдочастицы, начинающей движение из точки $\Phi = 0$, а при $A = 3/2$ вместо ямы псевдопотенциал принимает форму горба (см. рисунок, *b*). В этом случае возможны два решения, соответствующие „скатыванию“ псевдочастицы с вершины горба влево



Графики псевдопотенциала $\mathcal{U}(\Phi)$ (2) при: a — $A = 1/2$; b — $A = 3/2$; c — $A = 1.7$; d — $A = 1.58$.

и вправо и описывающие профиль слоя вблизи отрицательно и положительно заряженных электродов соответственно.

Кто-то уже достаточно давно обратил внимание на то, что правая часть неравенства (3) представляет собой выражение для скорости ионно-звуковых волн в плазме с холодными ионами и безынерционными бальмановскими электронами (нам не удалось найти ту первую публикацию, в которой это было замечено). Но в настоящее время общепринята следующая формулировка критерия Бома (например, см. [2]): „... скорость входящих в слой ионов должна превышать скорость звука...“:

$$V_{0i} \geq V'_s. \quad (4)$$

При этом особо подчеркивают, что ионы должны быть обязательно сверхзвуковыми [4].

Существует неисчислимое количество книг, учебников, статей, в которых под критерием Бома понимается именно такая „ионно-звуковая“ формулировка (4) (например, [5–10]). Более того, во многих работах теория слоя развивалась для других, более сложных моделей плазмы. И везде выходило, что для существования стационарного заряженного слоя необходимо, чтобы среднemasсовая скорость входа частиц в слой превышала скорость ионного звука. Так получалось и в работах авторов [11–14].

Многочисленны попытки (см., например, [15,16]) увидеть в критерии (4) физический смысл: почему же скорость входящих ионов должна быть именно больше скорости ионного звука, не имели успеха; они, скорее, представляли собой математическое обоснование наличия границы.

Оказывается, формулировка критерия Бома в форме (4) в терминах ионно-звуковых волн не может иметь физического смысла, так как она основана на методически неверном сравнении. Убедиться в этом можно достаточно просто. Для этого напомним, что выражение для скорости ионного звука $V_s' = \sqrt{kT_e/m_i} = \omega_i \lambda_D$ выводится из следующего дисперсионного уравнения:

$$\frac{\omega_i^2}{\omega^2} = \frac{1}{\lambda_D^2 \kappa^2} = 1, \quad (5)$$

где ω_i — ионная плазменная частота, κ — волновое число. Уравнение (5), как известно, получено для плазмы с холодными и неподвижными (!) ионами и безынерционными электронами. Таким образом, скорость дрейфа ионов в (4) сравнивается со скоростью звука для другой плазмы, в которой ионы не дрейфуют! Вот, оказывается, почему условие (4) не может иметь физического смысла: в нем в левой и в правой частях фигурируют параметры разных плазм (это и символизирует штрих у скорости звука в (4)). Недавно было указано [16], что критерии, выведенные из сравнения величин для разных плазм, могут привести к неверным выводам.

Покажем, как можно избежать этой методической ошибки. Для этого необходимо воспользоваться дисперсионным соотношением для плазмы с холодными дрейфующими ионами и безынерционными бoльцмановскими электронами:

$$\frac{\omega_i^2}{(\omega - V_{0i}\kappa)^2} - \frac{1}{\lambda_D^2 \kappa^2} = 1. \quad (6)$$

Тогда скорость ионного звука будет выражаться формулой (теперь уже без штриха):

$$V_s = \omega_i \lambda_D + V_{0i}. \quad (7)$$

Прибавляя V_{0i} к обеим частям неравенства (3), после несложных преобразований запишем критерий Бома (3) в новой форме

$$V_{0i} \geq \frac{V_s}{2}. \quad (8)$$

Таким образом, для стационарного существования заряженного слоя скорость набегающих ионов не обязана быть сверхзвуковой. Она может быть и дозвуковой!

Полученная граница скоростей, равная половине скорости ионного звука, разделяет периодические решения от непериодических для обоих знаков заряда электродов. В математическом смысле это такая же граница, как и скорость ионного звука в нелинейных теориях ионно-звуковых волн, которая разделяет периодические решения и солитоны. При этом делитель 2 в правой части (8) обязан своим происхождением направленному дрейфу ионов. Важно, что так же, как и для ионно-звуковых волн, вид условия (8) не изменится, если мы выберем другую модель плазмы.

Итак, мы показали, что для стационарного существования заряженного слоя скорость набегающих ионов может быть дозвуковой, так как она ограничена снизу скоростью, меньшей, чем скорость ионного звука. Но для V_{0i} должна существовать не только нижняя граница (8), но и верхняя, которая, по крайней мере, также меньше V_s . Как ее найти?

Поступим так же, как поступают при нахождении максимальной скорости ионно-звуковых солитонов. На рисунке *c* показан профиль псевдопотенциала $\mathcal{U}(\Phi)$ при $V_{0i} = 1.7\sqrt{kT_e/m_i}$. Сравнивая рисунки *b* и *c*, можно заметить, что с ростом V_{0i} левый конец графика опускается и при каком-то крайнем значении скорости дрейфа график перестает пересекать горизонтальную ось. Тогда для случая, показанного на рисунке *c*, невозможно построить непрерывную траекторию псевдочастицы, вышедшей с вершины горба влево. Действительно, любая такая траектория должна где-то оборваться и перейти в комплексную плоскость, когда подкоренное выражение в (2) станет отрицательным. Для максимальной возможной скорости V_{0i} левый конец псевдопотенциала упирается в горизонтальную ось. Эта крайняя ситуация показана на рисунке *d*. Скорость V_{0i} , при которой это происходит, для рассматриваемой модели

можно определить точно, если учесть, что для левого конца графика подкоренное выражение равно нулю. Тогда искомая скорость является корнем следующего известного трансцендентного уравнения [3]:

$$\exp(A^2/2) - A^2 - 1 = 0, \quad (9)$$

а его точное решение есть [17]:

$$V_{0i} = \omega_i \lambda_D \sqrt{-1 - 2W_{-1}[-\exp(-1/2)/2]} \approx 1.58\omega_i \lambda_D, \quad (10)$$

где $W_{-1}(\dots)$ — отрицательная действительная ветвь функции Ламберта [17,18]. Прибавляя к обеим частям равенства (10) $V_{0i} \sqrt{-1 - 2W_{-1}[-\exp(-1/2)/2]}$, после несложных преобразований получаем точное значение верхней границы:

$$V_{0i} \leq \frac{\sqrt{-1 - 2W_{-1}[-\exp(-1/2)/2]}}{1 + \sqrt{-1 - 2W_{-1}[-\exp(-1/2)/2]}} V_s \approx 0.61 V_s. \quad (11)$$

Объединим (8) и (11) и получим новое корректное выражение критерия существования стационарного заряженного слоя, примыкающего к электроду:

$$0.5V_s \leq V_{0i} \leq 0.61V_s. \quad (12)$$

Из полученного критерия следует:

1. Входящая в новый критерий (12) скорость ионного звука V_s в точности соответствует той модели плазмы, которую рассматривал Д. Бом в [1].

2. Диапазон скоростей ионного дрейфа, для которых существует заряженный слой с однонаправленным движением ионов, оказался весьма узким.

3. Нижняя граница является абсолютной, так как она одна и та же для всех моделей плазмы.

4. Верхняя граница является относительной, так как точные выражения для нее различны для разных моделей плазмы.

5. Нижняя граница разделяет периодические решения и непериодические.

6. Превышение верхней границы приводит к отражению ионов от потенциального барьера и к формированию виртуального анода.

Таким образом, в работе проведен критический анализ общепринятой ионно-звуковой формулировки критерия Бома существования

заряженного приэлектродного слоя. Показано, что эта формулировка для стационарного состояния слоя ионы должны иметь скорость дрейфа, превышающую скорость звука, — лишена физического смысла. Ошибочность этого вывода основана на сравнении параметров различных моделей плазмы. Получен новый критерий, который свободен от указанного противоречия. Полученный критерий ограничивает скорость ионного дрейфа сверху и снизу, причем возможный интервал скорости ионов целиком лежит в дозвуковой области.

Список литературы

- [1] *Bohm D.* // The characteristics of electrical discharges in magnetic fields. NY: MacGraw-Hill, 1949. P. 77–86.
- [2] *Чен Ф.* Введение в физику плазмы. М.: Мир, 1987.
- [3] *Веденов А.А., Велухов Е.П., Сагдеев Р.З.* // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82–100.
- [4] *Murakami M., Nishihara K.* // Phys. Fluids B. 1993. V. 5. N 9. P. 3441–3446.
- [5] *Sheridan T.E., Goree J.A.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 1989. V. 17. N 6. P. 884–888.
- [6] *Riemann K.-U., Tsendin L.D.* // J. Appl. Phys. 2001. V. 90. N 11. P. 5487–5490.
- [7] *Severn G.D., Wang H., Ko E., Hershkowitz N.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. N 14. P. 145001(1–4).
- [8] *Tskhakaya D.D., Eliasson B., Shukla P.K., Kuhn S.* // Phys. Plasmas. 2004. V. 11. N 8. P. 3945–3954.
- [9] *Hershkowitz N.* // Phys. Plasmas. 2005. V. 12. N 5. P. 055502(1–11).
- [10] *Riemann K.-U., Seebacher J., Tskhakaya D.D., Kuhn S.* // Plasma Phys. Control. Fusion. 2005. V. 47. N 11. P. 1949–1970.
- [11] *Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 129. N 1. С. 197–206.
- [12] *Alterkop B.A., Dubinova I.D., Dubinov A.E., Boxman R.L.* // Contrib. Plasma Phys. 2007. V. 47. N 3. P. 190–201.
- [13] *Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. В. 7. С. 63–69.
- [14] *Дубинов А.Е., Сенилов Л.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. В. 6. С. 46–52.
- [15] *Severn G.D.* // American J. Phys. 2007. V. 75. N 1. P. 92–94.
- [16] *Дубинов А.Е.* // Физ. плазмы. 2009. Т. 35. N 11. С. 1070–1072.
- [17] *Dubinov A.E., Dubinova I.D.* // J. Plasma. Phys. 2005. V. 71. N 5. P. 715–728.
- [18] *Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M.* // Canadian J. Phys. 2000. V. 78. N 9. P. 823–831.