*04*

# Диффузионный положительный столб электрического разряда в поперечном магнитном поле

© *Д.К. Ульянов, К.Н. Ульянов*

Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина, Москва
E-mail: kulyanov@vei.ru

*В окончательной редакции 8 сентября 2010 г.*

Изучено влияние поперечного магнитного поля на характеристики плоского диффузионного положительного столба. Показано, что при увеличении индукции магнитного поля распределения концентрации плазмы и потоков частиц на стенки становятся несимметричными, максимум концентрации смещается в сторону действия силы Ампера, потока ионов в направлении силы может существенно превышать поток ионов в обратном направлении. Определены зависимости параметров разряда от значения индукции. Показано, что существует максимальное значение индукции, ограничивающее сверху область магнитных полей, в которых возможно стационарное состояние положительного столба. В разрешенной для стационарного состояния области одному значению индукции соответствуют два различных режима положительного столба, отличающихся значениями энергии электронов, скорости дрейфа и напряженности электрического поля.

В поперечном магнитном поле положительный столб (ПС) свободно горящего электрического разряда изгибается в направлении действия силы Ампера. Плазма выносится из области канала разряда, а поступающий в область разряда нейтральный газ ионизуется. Такой разряд в поперечном магнитном поле применяется для создания потоков плазмы. В [1] исследовался свободно горящий разряд в поперечном магнитном поле при средних давлениях. Установлено, что стационарная форма разряда существует только в ограниченной области магнитных полей $B < B_{\max}$. При $B > B_{\max}$ разряд переходит в установившуюся нестационарную форму. Напряжение на разряде пульсирует с частотой, равной обратному времени пролета плазмой разрядного промежутка; плазма из разряда вылетает сгустками. Ускорение плазмы в поперечном магнитном поле ускорителя с замкнутым током Холла [2] при

$B > B_{\max}$ также происходит в нестационарном режиме с пульсирующим напряжением и пульсирующим выбросом плазмы. В обоих случаях достоверно не установлен механизм, переводящий стационарную форму разряда в нестационарную. Поэтому изучение электрических разрядов в поперечных магнитных полях по-прежнему остается актуальным. В настоящей работе будут теоретически изучены свойства ограниченного изолированными стенками ПС в поперечном магнитном поле. Будет покзаано, что стационарная форма такого ПС существует только при $B < B_{\max}$. Определено значение $B_{\max}$, и установлена причина перехода разряда в нестационарную форму.

Рассмотрим ограниченный изолированными стенками плоский положительный столб в поперечном магнитном поле. Будем считать, что электроны и ионы движутся в столкновительном режиме. Для описания их движения применим систему уравнения гидродинамики. В стационарном случае плотность тока на изолированную стенку равна нулю, поэтому в любом поперечном сечении плазмы столба скорости электронов и ионов равны. Ток Холла в направлении действия силы Ампера отсутствует. Будем рассматривать частично ионизованную плазму с невысокой степенью ионизации, в которой плотность атомов можно считать не зависящей от координаты. Распределения концентрации плазмы и потоков заряженных частиц можно найти из системы уравнений неразрывности и движения для электронов и ионов, которая (проекция на ось $x$) имеет вид

$$\frac{dnV}{dx} = n\nu_{ion}, \tag{1}$$

$$-enE - \frac{dp_e}{dx} - nmV(\nu_{ea} + \nu_{ion}) - \frac{1}{c}\, enV_{ez}B_y = 0, \tag{2}$$

$$enE - \frac{dp_i}{dx} - nMV(\nu_{ia} + \nu_{ion}) + \frac{1}{c}\, enV_{iz}B_y = 0. \tag{3}$$

Здесь $m$, $M$ — массы электрона и атома, $\nu_{ion}$, $\nu_{ia}$, $\nu_{ea}$ — частоты ионизации, ион-атомных и электрон-атомных столкновений, $n_e = n_i = n$, $V_{ex} = V_{ix} = V$, $V_{iz} - V_{ez} = V_z$, $B_y$ — магнитное поле, $j_z = enV_z$, $j_zB_y = F_a$ — сила Ампера, действующая на ток в поперечном направлении. В (2) пренебрегли (как это принято) инерцией электронов. В диффузионном приближении в уравнении (3) пренебрегли инерцией ионов.

Сложим (2) и (3) для исключения электрического поля $E$. Имеем

$$-k(T_e+T_i)\frac{dn}{dx}-nV\big[M(\nu_{ia}+\nu_{ion})+m(\nu_{ea}+\nu_{ion})\big]+\frac{1}{c}enV_zB_y=0. \tag{4}$$

Вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь. Продифференцируем (4) и используем (1) для исключения производной от плотности потока. Получим:

$$-D_a\frac{d^2n}{dx^2}+\frac{eV_zB_y}{Mc(\nu_{ia}+\nu_{ion})}\frac{dn}{dx}=n\nu_{ion},\quad D_a=\frac{k(T_e+T_i)}{M(\nu_{ia}+\nu_{ion})}. \tag{5}$$

Учет магнитной силы приводит к появлению в уравнении диффузии дополнительного члена, пропорционального первой производной. Запишем (5) в безразмерных $n=n^*\tilde{n}$, $x=L\tilde{x}$ переменных в виде (индекс $\sim$ в дальнейшем будем опускать)

$$\frac{d^2n}{dx^2}+a\frac{dn}{dx}+bn=0,\quad a=-\frac{eV_zB_yL}{ck(T_e+T_i)},\quad b=\frac{\nu_{ion}L^2}{D_a}. \tag{6}$$

В уравнении (6) коэффициент $a$ при певой производной отрицательный. Для нашей задачи пригодно решение с комплексными корнями характеристического уравнения. Имеем

$$n=e^{-\frac{1}{2}ax}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x),\qquad \beta=\sqrt{b-\left(\frac{a}{2}\right)^2}. \tag{7}$$

Для ПС в диффузионном приближении с достаточной точностью можно использовать граничные условия $n(0)=n(1)=0$. В этом случае $C_1=0$, $\beta=\pi$. В нашей задаче $a<0$, поэтому экспоненциальный множитель в [6] увеличивается с ростом $x$, распределение концентрации становится несимметричным, максимум концентрации при увеличении магнитной силы смещается от центра по направлению действия силы. Положение максимума $x_{\max}$ определяется соотношением $2p\,\mathrm{ctg}\,px_{\max}=a$. Значение параметра $a$ ограничено сверху значением $a^*=2\sqrt{b}$. В дальнейшем будем измерять значения $a$ в долях $a^*$, используя соотношение $a=\xi a^*=\xi 2\sqrt{b}$, где $\xi<1$. Нормируем решение (6). Имеем

$$n(x)=\frac{f^2+\pi^2}{\pi(e^f+1)}e^{fx}\sin\pi x,\quad \int\limits_0^1 n(x)dx=1,\quad f=\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \tag{8}$$

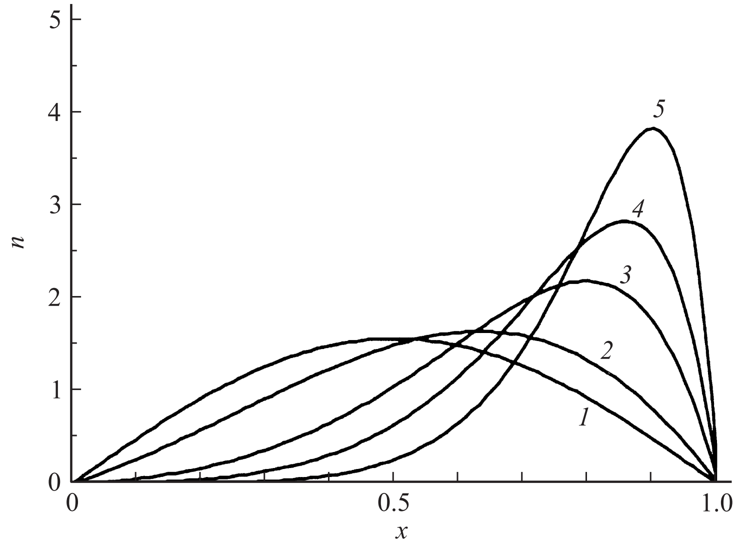


**Рис. 1.** Зависимость $n(x)$ для различных значений параметра $\xi$: *1* — 0, *2* — 0.4, *3* — 0.8, *4* — 0.9, *5* — 0.95.

На рис. 1 представлены распределения $n(x)$ для нескольких значений $\xi$. Отметим, что с ростом $\xi$ увеличивается и смещается вправо значение $n_{\max}$. Полученное из граничных условий выражение $\beta = \pi$ вместе с соотношением $a = \xi a^*$ позволяет выразить параметры $a$ и $b$ через фактор $\xi$:

$$a = -\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad b = \frac{\pi^2}{1-\xi^2}. \tag{9}$$

Найдем распределения плотностей потоков ионов и электронов из уравнения [4].

Скорость потока нормируем на характерную диффузионную скорость $V^* = D_a L^{-1}$. Используя (4), (8) и (9) для потока $j = nV$, получим

$$j = \frac{f^2+\pi^2}{\pi(e^f+1)}\, e^{fx}(f \sin \pi x - \pi \cos \pi x).$$

Потоки направлены в разные стороны относительно точки $x_0$, в которой $V(x_0) = 0$. Значение $x_0$ определяется соотношением $\operatorname{tg} \pi x_0 = \pi f^{-1}$. При $\xi = 0$ функция $f = 0$, $\operatorname{tg} \pi x_0 = \infty$, $x_0 = 0.5$, распределение потоков симметрично. При наличии магнитного поля с

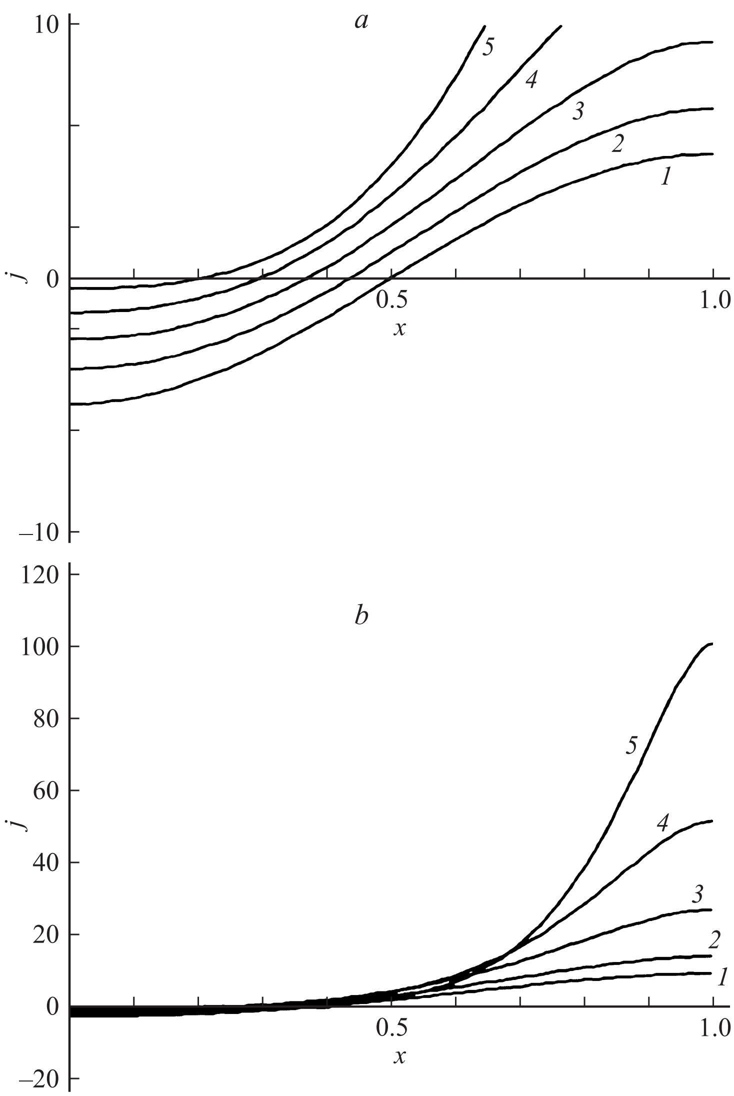


**Рис. 2.** Зависимость плотности потока $j(x)$ для различных значений параметра $\xi$: *a* — 1 — 0, *2* — 0.2, *3* — 0.4, *4* — 0.6, *5* — 0.8; *b* — 1 — 0.4, *2* — 0.6, *3* — 0.8, *4* — 0.9, *5* — 0.95.

ростом $\xi$ распределения становятся несимметричными, точка $x_0$ смещается влево по оси $x$, при $\xi \to 1$ значение $x_0 \to 0$. Распределения потоков для разных $\xi$ представлены на рис. 2. Отношение потоков $\kappa$ на правой $j(1)$ и левой $j(0)$ границах промежутка $\kappa = -\exp(f)$. При увеличении $\xi$ поток на левую границу уменьшается, а поток на правую границу увеличивается. Асимметрия потоков при $f > 1$ весьма велика. Приведенные на рис. 1 и 2 распределения концентраций и плотностей потоков соответствуют разным токам. Эти распределения можно привести к одному значению тока, если их умножить на фактор $\delta = V_z(\varepsilon_0)/V_z(\varepsilon)$, где $\varepsilon_0$ — значение $\varepsilon$ при $B_y = 0$.

Определим значение $B_y$. Используя (6) и (9), получим

$$B_y = \frac{2\pi ck(T_e + T_i)}{eV_z L} \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \tag{10}$$

$$\frac{\nu_{ion} L^2 M(\nu_{ia} + \nu_{ion})}{k(T_e + T_i)} = \frac{\pi^2}{1-\xi^2}. \tag{11}$$

Левая часть (11) пропорциональна $(n_0 L)^2$, где $n_0$ — плотность газа. Значение энергии электронов $\varepsilon = 3/2kT_e + mV_z^2/2$ увеличивается при уменьшении $n_0 L$. Левая часть (11) при увеличении $\varepsilon$ проходит через максимум при $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$. При $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ с ростом $\varepsilon$ левая часть (11) увеличивается за счет экспоненциального роста частоты ионизации. При $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$, когда сечение ионизации уменьшается как $\varepsilon^{-1}$, левая часть (11) уменьшается как $\varepsilon^{-2}$. Магнитное поле $B_y$ при $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$ увеличивается с ростом $\varepsilon$. При $\varepsilon \gg \varepsilon_{\max}$ скорость дрейфа пропорциональна $\varepsilon^{1/2}$ [3], $B_y$ пропорционально $\xi\varepsilon^{-1/2}$. В этом диапазоне $\varepsilon$ индукция магнитного поля $B_y$ уменьшается как за счет роста $\varepsilon$, так и за счет уменьшения $\xi$. Таким образом, существует значение $B_{\max}$, ограничивающее сверху диапазон магнитных полей, в котором имеет место стационарный ПС. Из выражений (10) и (11) можно определить зависимость $B_y(\varepsilon)$. В ПС с поперечным магнитным полем на электроны в направлении $z$ действует магнитная сила $F_z(x) = (e/c)V(x)B_y$, которая может повлиять на величину скорости дрейфа $V_z$. Этой силой можно пренебречь, если $V(x)\omega\tau_e \ll V_z$, где $\omega\tau_e$ — параметр Холла. Максимальное значение скорости $V(x)$ ограничено сверху скоростью ионного звука. Значение параметра Холла может быть определено по результатам расчетов зависимости $B_y(\varepsilon)$ с учетом известных из [3,4] зависимостей $\nu_{ea}(\varepsilon)$ и $\nu_{ion}(\varepsilon)$. Оказалось, что при $B \leqslant B_{\max}$ значение

$\omega\tau_e \leqslant 1$, а отношение $V(x)\omega\tau_e/V_z \ll 1$. Поэтому можно считать, что $V_z$ не зависит от координаты $x$. Таким образом, в нашем случае зависимости $V_z(E/p)$ и $\varepsilon(E/p)$ такие же, как и в разряде без поперечного магнитного поля. Из эксперимента и результатов численного моделирования для различных газов известны зависимости $\varepsilon(E/p)$, $V_z(E/p)$ и частоты ионизации $\nu_{ion} = \alpha p V_z(E/p)$, где $\alpha$ — коэффициент Таундсенда. Поэтому можно определить зависимости $V_z(\varepsilon)$ и $\nu_{ion}(\varepsilon)$ для выбранного газа. Эти зависимости следует использовать в формулах (10) и (11). Таким способом можно определить для конкретного газа при заданных значениях $n_0$ и $L$ зависимость $B_y(\varepsilon)$.

В качестве примера выполним расчет зависимости $B_y(\varepsilon)$ для гелия. Отметим, что для ПС в поперечном магнитном поле не выполняются законы подобия. В то время как в (11) входит произведение $n_0L$, в (10) входит только величина $L$. Этот факт связан с видом уравнения (5), которое содержит как вторую, так и первую производные. Поэтому при проведении расчетов необходимо задавать независимо $n_0$ и $L$. Методика расчета следующая. Определяем минимальное значение $\varepsilon_{\min}$ при $\xi = 0$ из (11). Задаемся значениями $\varepsilon$ больше $\varepsilon_{\min}$ и из (11) определяем зависимость $\xi\ (\varepsilon)$. Значение $V_z(\varepsilon)$ известно из эксперимента и расчетов. Обе эти функции используем в [10] для определения зависимости $B_y(\varepsilon)$. Зависимости $V_z$ и $\alpha/p$ от $\varepsilon$ взяты из работ [3,4] (рис. 3, *a*). Результаты расчетов $B_y$ для гелия при $n_0 = 3 \cdot 10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $L = 4\,\mathrm{cm}$ приведены на рис. 3, *b*. Обратим внимание на тот факт (рис. 3, *b*), что одному значению $B_y$ соответствуют два набора значений $\varepsilon$ и $V_z$, причем бóльшие значения относятся к области кривой $B_y(\varepsilon)$, на которой производная отрицательна.

При выводе уравнения (8) предполагалось, что $n(0) = n(1) = 0$. Определим эти значения. Величина объемного заряда $\rho$ в плазме находится из уравнения Пуассона $\mathrm{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$. Для определения $n(0)$ и $n(1)$ на границе плазмы и слоя (при $x = 0$ и $x = 1$) полагается, что $\rho(0) = en(0)$, $\rho(1) = en(1)$ [5]. Продифференцируем по $x$ уравнение (2). Имеем

$$n_{1,2} = \left(\frac{l_D}{L}\right)^{2/3} \left(\left(\frac{dn}{dx}\right)^2\bigg|_{1,2} + n_b \frac{d^2n}{dx^2}\bigg|_{1,2}\right)^{1/3},$$

$$l_D^2 = \frac{kT_e}{4\pi e^2 n^*}, \quad n^*(\varepsilon) = \delta n^*(\varepsilon_0). \tag{12}$$

Здесь $n_{1,2}$ — концентрация на левой и правой границах плазмы, производные также вычисляются на границах. Полученные выше аналити-

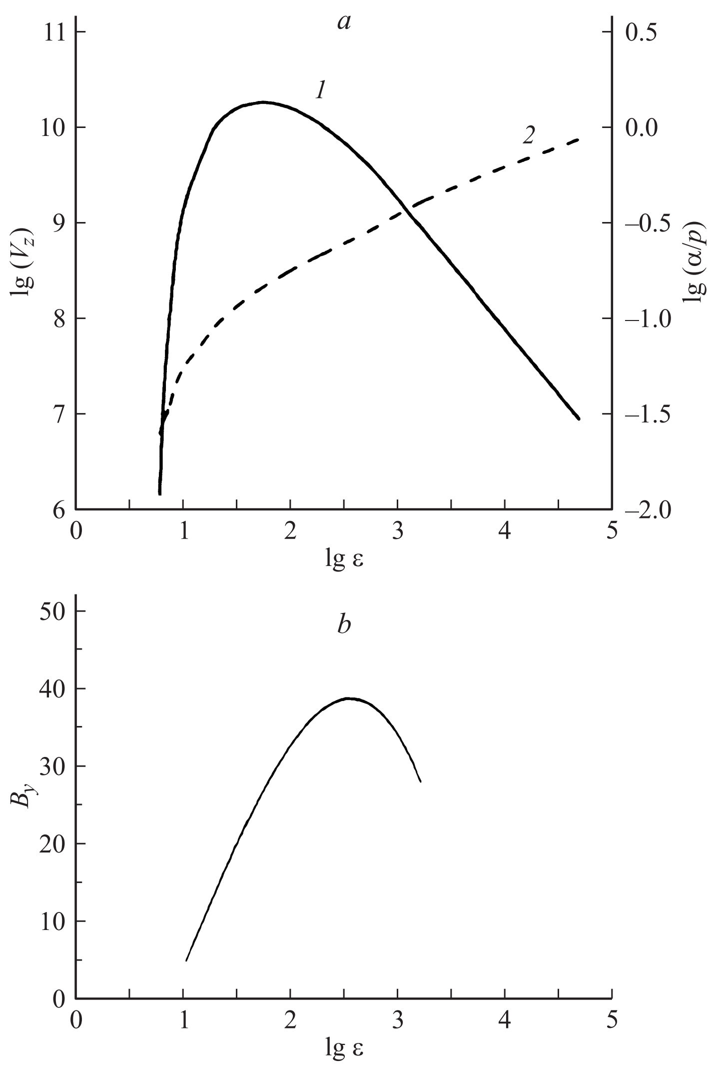


**Рис. 3.** *a* — зависимость для гелия от $\varepsilon$ [eV]: *1* — скорости дрейфа $V_z$ [cm/s], *2* — $\alpha/p[(\mathrm{Torr}\cdot\mathrm{cm})^{-1}]$; *b* — зависимость $B_y$ [mT] для гелия при $n_0 = 3\cdot10^{15}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $L = 4\,\mathrm{cm}$.

ческие решения для $n(x)$ позволяют определить значения производных. Имеем

$$n'(0) = \frac{f^2 + \pi^2}{e^f + 1}, \qquad n''(0) = n'(0)2f,$$

$$n'(1) = -n'(0)e^f, \qquad n''(1) = n'(1)2f.$$

Для определения $n_{1,2}$ необходимо задать значение тока на единицу длины по оси $y$, которое определит $n^*$ для данного $\varepsilon$. Например, при $n^* = 10^{13}\,\mathrm{cm}^{-3}$, $L = 4\,\mathrm{cm}$, $kT_e = 10\,\mathrm{eV}$ значение $(l_D/L)^{2/3} = 6 \cdot 10^{-3}$. При $\xi = 0$ значения $n(0) = n(1) = 0.017$; при $\xi = 0.5$ $n(0) = 9 \cdot 10^{-3}$, $n(1) = 3 \cdot 10^{-2}$; при $\xi = 0.9$ $n(0) = 2 \cdot 10^{-3}$, $n(1) = 8 \cdot 10^{-2}$. Значение $n(0)$ уменьшается с ростом $\xi$, а значение $n(1)$ — увеличивается, однако отношение $n(1)/n_{\max}$ всегда много меньше единицы, поэтому аналитические решения, полученные с нулевыми граничными условиями, вполне корректны.

В заключение отметим, что с помощью поперечного магнитного поля и выбора параметров внешней цепи можно в широком диапазоне (от единиц до сотен eV) изменять энергию электронов. Этот результат может оказаться полезным для получения излучения с различным спектральным составом, а также для повышения эффективности плазмохимических реакций. В работе показано, что стационарное состояние ПС с изолированными стенками возможно только при $B \leqslant B_{\max}$. Этот существенный факт связан с невозможностью обеспечить при $B > B_{\max}$ необходимый для существования стационарного ПС уровень ионизации из-за ограниченности сечения ионизациии и формы его зависимости от энергии. По этой же причине, по-видимому, невозможно обеспечить при $B > B_{\max}$ стационарный режим работы ускорителей плазмы с поперечным магнитным полем.

## Список литературы


[1] *Баранов В.Ю., Ульянов К.Н.* // ТВТ. 1968. Т. 6. № 1. С. 23–29.

[2] *Горшков О.А., Муравлев В.А., Шагайда А.А.* Холловские и ионные плазменные двигатели для космических аппаратов. М.: Машиностроение, 2008. Гл. 3. С. 88.

[3] *Ульянов К.Н.* // ТВТ. 2008. Т. 46. № 4. С. 382–390.

[4] *Ткачев А.Н., Яковленко С.И.* // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 77. В. 5. С. 264–269.

[5] *Рожанский В.А., Цендин Л.Д.* Столкновительный перенос в частично ионизованной плазме. М.: Энергоатомиздат, 1988. Гл. 2. С. 45.