

04

## Простые аналитические формулы для оценки параметров положительного столба электроотрицательного тлеющего разряда при наличии галогенов в составе газовой смеси

© А.П. Головицкий

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: alexandergolovitski@yahoo.com

(Поступило в Редакцию 25 октября 2013 г.)

В простом предположении о независимости от координат скоростей плазмохимических процессов проведен асимптотический анализ уравнений непрерывности для плазмы положительного столба электроотрицательного разряда постоянного тока низкого и среднего давлений. Новым является детальный учет наличия ионной диффузии для случая доминирования ион-ионной рекомбинации среди механизмов гибели отрицательных ионов. Полученные несложные аналитические выражения позволили с точностью не хуже 15–25% оценить геометрические параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц в названной плазме, а также ее энергетические параметры, не прибегая к сложному численному моделированию.

### Введение

При наличии галогенов низкотемпературная плазма положительного столба (ПС) тлеющего разряда постоянного тока низкого и среднего давлений (до 40 Торр), как и плазма любого неизотермичного электроотрицательного (ЭО) разряда, расслаивается в поперечном к протеканию тока направлении на области с разным ионным составом. Ее периферийная область („оболочка“) практически не содержит отрицательных ионов (ОИ) и представляет собой электрон-ионную ( $e-i$ ) плазму, для которой характерны близкий к амбиполярному режим диффузии плазмы и наличие значительного поперечного электрического поля  $E_x$ , направленного наружу. В центральной же области плазмы („сердцевине“ или „объеме“) концентрации ионов — и отрицательных  $n_n$ , и положительных  $n_p$  — намного превышают концентрацию электронов  $n_e$ , т.е. плазму можно назвать ион-ионной ( $i-i$ ). В сердцевине при сильной электроотрицательности поперечное поле  $E_x$  близко к нулю и имеет место близкая к свободной диффузия электронов при почти плоском пространственном распределении их концентрации; величина последней намного меньше, чем  $n_p$  и  $n_n$ . В узкой области перехода от  $i-i$ - к  $e-i$ -плазме имеют место сильные изменения концентраций ионов [1–8].

Особенностью разрядов с галогенами является преобладание молекулярных положительных ионов и доминирование ион-ионной диссоциативной рекомбинации по реакции (пример для хлора)  $Cl_2^+ + Cl^- \rightarrow 3Cl$  среди процессов гибели ОИ [5,6,8].

Изложенные результаты были получены посредством сложного численного моделирования плазмы [5–9], являющегося на сегодняшний день самым мощным средством исследования физических процессов в многокомпонентной ЭО-плазме. Современные численные модели способны обеспечить даже количественную точность

расчета параметров плазмы в сопоставлении с данными эксперимента, включая и характеристики излучения плазмы [9], однако при рассмотрении на практике конкретных разрядов необходимо приспосабливать модель к условиям этих разрядов. Поэтому многие исследователи вынуждены создавать свои собственные более или менее сложные модели, что является весьма трудоемким и времязатратным делом. Для практики представляет интерес получить простые, легкие в обращении, но дающие удовлетворительную точность аналитические соотношения, способные адекватно описать физические процессы в исследуемых плазмах.

Подобные аналитические соотношения, приведенные в [1,2,10–13], позволяют легко и, как показано в [12,13], с приемлемой точностью оценить параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц и энергетические параметры плазмы ПС ЭО тлеющего разряда низкого и среднего давлений, не прибегая к численному моделированию. К сожалению, названные соотношения получены лишь для случая, когда механизмом гибели ОИ является отлипание, как для разрядов в присутствии кислорода. Некоторые соотношения для рекомбинационного механизма гибели ОИ приведены в [6,14,15], но они получены для пренебрежимо малых ионных температур, т.е. без учета влияния ионной диффузии, что, как показано в настоящей работе, является существенным ограничением.

Целью настоящей работы является получение по возможности простых аналитических соотношений, позволяющих быстро и с приемлемой точностью оценить параметры пространственных распределений концентраций заряженных частиц в плазме ПС тлеющего разряда низкого и среднего давлений в ЭО-разрядах с присутствием галогенов, а также энергетические параметры названной плазмы без численного моделирования. Практическую ценность работы определяет, в частно-

сти, то, что тлеющий разряд в смеси инертных газов и галогенов является перспективной активной средой эффективных источников мощного ультрафиолетового излучения [9,16,17]. Основной ход рассуждений направлен на поиск наиболее простых соотношений, выяснение их точности и уточнение условий их практического применения.

## Исходные предпосылки

Положим ион-ионную рекомбинацию основным механизмом гибели ОИ и примем квазинейтральность плазмы  $n_e + n_n = n_p$ . Исходная стационарная система для поперечных потоков заряженных частиц  $\Gamma_j$  и их дивергенций имеет вид

$$\begin{cases} \nabla \Gamma_e = (v_i - v_a)n_e, \\ \nabla \Gamma_p = v_i n_e - \rho_i n_n n_p, \\ \nabla \Gamma_n = v_a n_e - \rho_i n_n n_p, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Gamma_j = -D_j \nabla n_j + z_j n_j \mu_j E_x, \quad (2)$$

$$\Gamma_p - \Gamma_n - \Gamma_e = 0. \quad (3)$$

Граничные условия задачи:  $n_e(x_W) = n_p(x_W) = n_n(x_W) = 0$ ,  $\Gamma_n(x_W) = 0$ ,  $\nabla n_e(0) = \nabla n_p(0) = \nabla n_n(0) = 0$ . Здесь  $x_W$  — координата стенки;  $T_j$ ,  $D_j$ ,  $\mu_j$ ,  $z_j$  — температуры, коэффициенты диффузии, подвижности и знак заряда частиц  $j$ -го сорта; индексы  $e$ ,  $p$ ,  $n$  соответствуют электронам, положительным и отрицательным ионам;  $E_x$  — поперечное к протеканию тока поле, вызванное пространственным зарядом;  $v_i$ ,  $v_a$  — частоты ионизации и прилипания,  $\rho_i$  — коэффициент ион-ионной рекомбинации. В реальности указанные коэффициенты и частоты в конечном итоге определяются продольным электрическим полем столба  $E_z$ , являющимся собственным числом задачи. В излагаемой ниже простой 1D-модели принято, что собственным числом является частота ионизации  $v_i$ , а  $v_a$ ,  $\rho_i$ ,  $D_j$ ,  $\mu_j$  являются заданными константами. Параметр  $T_e$  определим как  $T_e = eD_e/\mu_e$ , для максвелловского распределения электронов по энергиям он совпадает с электронной температурой.

Если  $T_e \gg T_i$ , а концентрация электронов не слишком мала, то при  $\mu_e n_e \gg \mu_p n_p$ ,  $\mu_n n_n$  поле  $E_x$ , согласно (2) и (3), соответствует больцмановскому:  $E_x \cong -\frac{T_e}{ex_W} \frac{\nabla n_e}{n_e}$ . Исключим  $E_x$  и далее введем безразмерную координату  $X = x/x_W$  для плоской геометрии (ПГ); для цилиндрической геометрии (ЦГ) будет  $X = r/x_W$ , где  $x_W \equiv R_t$  — радиус трубки с плазмой. Обозначим  $\tau_j = T_j/T_e$ ,  $D_{aj} = \mu_j T_e/e$ . Введем приведенные диффузионные частоты  $D_{aj}^* = \mu_j T_e/(ex_W^2)$ , а также приведенные безразмерные частоты ионизации  $\nu = v_i/D_{ap}^*$ , прилипания  $\alpha = v_a/D_{an}^*$  и рекомбинации  $\eta = n_{e0}\rho_i/D_{ap}^*$  ( $n_{e0}$  — электронная концентрация в центре плазмы). Нормируем концентрации заряженных частиц на  $n_{e0}$  и

введем обозначения  $n = n_e/n_{e0}$ ,  $N = n_n/n_{e0}$ ,  $P = n_p/n_{e0}$ ,  $\mu = \mu_p/\mu_n$ . Тогда из (1)–(3) можно получить

$$-\Delta N \tau_n + \nabla \left( \frac{N}{n} \nabla n \right) \approx \alpha n - \mu \eta NP, \quad (4)$$

$$-\Delta P \tau_p - \nabla \left( \frac{P}{n} \nabla n \right) \approx \nu n - \eta NP. \quad (5)$$

Производные здесь и далее берутся в ПГ по безразмерной координате  $X = x/x_W$ , а в ЦГ — по  $X = r/R_t$ .

## Слабая ионная диффузия

При  $\tau = T_i/T_e \rightarrow 0$  можно пренебречь первыми членами левых частей (4) и (5). Сложив эти уравнения, получим

$$\Delta n \approx -(\alpha + \nu)n + (\mu + 1)\eta NP. \quad (6)$$

В периферийной оболочке  $e$ - $i$ -плазмы ОИ практически отсутствуют, и можно пренебречь вторым членом правой части (6). Тогда (6) совпадает с соответствующим уравнением, полученным в [12] для случая отлипания. Собственно, ввиду малости концентрации ОИ в оболочке для нее несущественно, каков механизм гибели ОИ в объеме. Поэтому для оболочки можно воспользоваться формулами, полученными в [12]:

$$n(X) \approx n_1 \sin \left[ \frac{\pi}{2\delta} (1 - X) \right], \quad (7)$$

$$\delta \cong \frac{\pi}{2} \frac{1}{2\sqrt{\nu + \alpha}}, \quad (8)$$

где  $\delta$  — толщина оболочки, а величина  $n_1$  определяется из шивки  $n(X)$  на границе оболочка–сердцевина. Если величина  $\tau$  конечна, но все же остается  $\tau \ll 1$ , то можно воспользоваться выражением из [13]

$$\delta \approx \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\nu + \alpha}} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arccos(0.005^\tau) \right], \quad (9)$$

подставив его в (7). Формулы (7)–(9) получены для ПГ, но, согласно численным расчетам [12], если оболочка тонкая (при  $\delta \leq 0.35$ ), то погрешность использования (7) и (8) для ЦГ при вычислениях  $\delta$  и  $n(X)$  в оболочке не превышает 10%. Обозначим за  $X_0 = 1 - \delta$  координату границы раздела  $e$ - $i$ - и  $i$ - $i$ -плазм.

В сердцевине ПС-разряда ( $i$ - $i$ -плазма) при  $\tau \rightarrow 0$  выполняется

$$\nabla \left( \frac{N}{n} \nabla n \right) \approx \alpha n - \mu \eta NP, \quad (10)$$

$$\nabla \left( \frac{P}{n} \nabla n \right) \approx -\nu n + \eta NP. \quad (11)$$

Допустим, что электроотрицательность разряда сильная (т.е.  $N(0) \equiv N_0 \gg 1$ ) и что в сердцевине  $N \approx P \gg n$ .

Таблица 1.

Параметр	$\nu$	$\alpha$	$\eta$	$N_0$	$g$	$\beta$
Данные модели [8]	30.3	5.83	$1.1 \cdot 10^{-3}$	136	0.19	0.018

Тогда левые, а значит, и правые части уравнений (10) и (11) будут примерно равны, т.е.  $(\alpha + \nu)n \approx (\mu + 1)\eta N^2$ , откуда получаем

$$N \approx \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{(\mu + 1)\eta}} \sqrt{n} = N_0 \sqrt{n}, \quad \text{где } N_0 = \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{(\mu + 1)\eta}}, \quad (12)$$

т.е. профили ионов в сердцевине подобны между собой, но в отличие от случая отлипания [12] они не подобны профилю электронов. Отметим, что (12) совпадает с выражением для  $N_0$  из [6] при  $N_0 \gg 1$  и при  $\mu = 1$  (в [6] вместо  $N_0$  использовано обозначение  $F_0$ ). Из (10), учитывая (12), а также, что  $\nabla(\nabla n / \sqrt{n}) = 2\Delta(\sqrt{n})$ , получим

$$\Delta N \approx -\frac{1}{2N_0^2} \frac{\mu\nu - \alpha}{\mu + 1} N^2. \quad (13)$$

Из (13) следует, что коль скоро  $\nabla N(0) = 0$ ,  $N(0) = N_0$ , а  $N_{X>0} < N_0$ , то должно быть  $\Delta N < 0$ , а значит, должно выполняться

$$\mu_p \nu > \mu_n \alpha. \quad (14)$$

Соотношение (14) впервые получено в [6]. Обозначив  $N^* \approx N/N_0$  и

$$g = \sqrt{\frac{1}{2N_0} \frac{\mu\nu - \alpha}{\mu + 1}}, \quad (15)$$

а также введя новую независимую переменную  $\xi = gX$ , перейдем от (13) к следующему уравнению, не содержащему никаких параметров:

$$\Delta N^* \approx -(N^*)^2, \quad (16)$$

с начальными условиями  $N^*(0) = 1$ ,  $\nabla N^*(0) = 0$ .

Точное решение (16) представляет собой функцию, обратную к неполному эллиптическому интегралу первого рода; это решение весьма сложно для практического использования. Разложение решения (16) в ряд по степеням  $\xi$  выглядит как  $N^*(\xi) \approx 1 - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^4}{12} - \frac{\xi^6}{72} + \dots$  (ПГ);  $N^*(\xi) \approx 1 - \frac{\xi^2}{4} + \frac{\xi^4}{32} - \frac{\xi^6}{288} + \dots$  (ЦГ). Учет первых двух членов этих рядов

$$N^*(\xi) \approx 1 - \frac{\xi^2}{2} \quad (\text{ПГ}) \quad \text{или} \quad N^*(\xi) \approx 1 - \frac{\xi^2}{4} \quad (\text{ЦГ}) \quad (17)$$

обеспечивает отклонение от точного решения (16) не более 1% при  $\xi \leq 0.55$  для ПГ и при  $\xi \leq 0.8$  для ЦГ.

Информация о величинах релевантных параметров в реальных разрядах приведена в табл. 1 для примера ПС тлеющего разряда постоянного тока в смеси 6 Torr Хе и 0.25 Torr Cl<sub>2</sub> в трубке радиусом 6 mm при токе 2 mA. Значения параметров получены усреднением по сечению

разряда соответствующих величин из данных модельных расчетов по [5]. При малых токах (до 8 mA) диссоциация молекул хлора электронным ударом не очень велика, и такой разряд можно считать сильно электроотрицательным ( $N_0 \gg 1$ ). Из табл. 1 следует, что величина  $g$  из (15), а значит, и  $\xi$  из (17) для разрядов с хлором гораздо меньше, чем 0.5 (что обусловлено большой величиной  $N_0$ ). Следовательно, для оценки  $N(X)$  в сердцевине можно воспользоваться формулой (17), т.е.

$$N(X) \approx N_0 \left( 1 - \frac{1}{4N_0} \frac{\mu\nu - \alpha}{\mu + 1} X^2 \right) \quad (\text{ПГ}),$$

$$N(X) \approx N_0 \left( 1 - \frac{1}{8N_0} \frac{\mu\nu - \alpha}{\mu + 1} X^2 \right) \quad (\text{ЦГ}).$$

Для  $n(X)$ , согласно (12), получим  $n(X) = (N/N_0)^2$ , т.е. для ПГ  $n(X) \approx (1 - \frac{1}{4N_0} \frac{\mu\nu - \alpha}{\mu + 1} X^2)^2$ . При  $N_0 \gg 1$  можно принять

$$n(X) \approx 1 - \beta X^2, \quad (18)$$

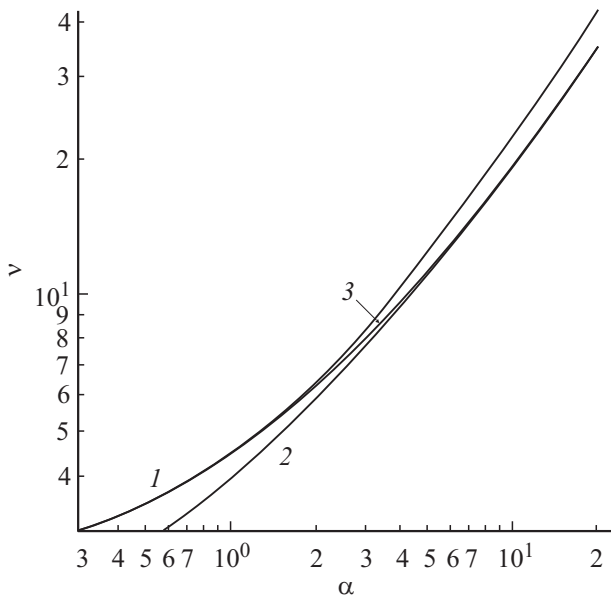
$$\beta = \frac{1}{2N_0} \frac{\mu\nu - \alpha}{\mu + 1} \quad (\text{ПГ}) \quad \text{или} \quad \beta = \frac{1}{4N_0} \frac{\mu\nu - \alpha}{\mu + 1} \quad (\text{ЦГ}). \quad (19)$$

Для оценки приведенной частоты ионизации  $\nu$  рассмотрим потоки на границе раздела  $e$ - $i$ - и  $i$ - $i$ -плазм. При малости ионной диффузии безразмерный поток отрицательных ионов, текущий в сердцевину и нарабатываемый в оболочке, согласно (7) и (8) (при  $\delta \leq 0.35$ , когда оболочку можно полагать плоской и в ЦГ), есть  $\frac{|\Gamma_n|}{D_{an}^* n_{e0xw}} \approx n(X_0) \frac{\alpha}{\sqrt{\nu + \alpha}}$ . Оценка там же для текущего из сердцевины в оболочку потока положительных ионов в соответствии с (11) есть  $\frac{\Gamma_p}{D_{ap}^* n_{e0xw}} \approx \nu \int_0^{1-\delta} n(X) dX - \eta \int_0^{1-\delta} N(X) P(X) dX$  (ПГ). При сильной электроотрицательности  $P \approx N \ll n$  и по (12)  $N \approx N_0 \sqrt{n}$ . Тогда для ПГ  $\frac{\Gamma_p}{D_{ap}^* n_{e0xw}} \approx \frac{\nu\mu - \alpha}{\mu + 1} \int_0^{1-\delta} n(X) dX$ . Поскольку в области границы  $N \approx P$ , а потоки  $\Gamma_p$  и  $\Gamma_n$  текут в одном и том же поле, то должно выполняться равенство  $|\Gamma_n|/\mu_n \approx \Gamma_p/\mu_p$ , т.е.

$$n(X_0) \frac{\alpha}{\sqrt{\nu + \alpha}} \approx \frac{\nu\mu - \alpha}{\mu + 1} \int_0^{1-\delta} n(X) dX. \quad (20)$$

Из (20) с учетом (18) можно получить аналитические соотношения, связывающие между собой величины  $\nu$ ,  $\alpha$  и  $\eta$  для случая  $\tau \rightarrow 0$  и  $N_0 \gg 1$ . В принципе, как и из соотношений Шоттки для электроположительной (ЭП) плазмы, отсюда можно было бы оценить  $\nu$ , а затем и электронную температуру плазмы ПС ЭО-разряда, но полученные трансцендентные соотношения будут весьма сложны.

Если ограничиться случаем  $\alpha \gg \eta$ , то в соответствии с (14) и  $\nu \gg \eta$ , а в сердцевине профиль электронной концентрации близок к плоскому (см. (18), (19)). При



**Рис. 1.** Зависимость  $\nu(\alpha)$  при  $\mu = 0.77$  и при  $\tau \rightarrow 1$ : 1 — расчет по (22), 2 — расчет по (23), 3 — точное решение уравнения (21).

этом  $n(X_0) \approx n(0) = 1$ , а соотношение (20) перейдет для ПГ в

$$\alpha \approx \frac{\nu\mu - \alpha}{\mu + 1} (\sqrt{\nu + \alpha} - \pi/2). \quad (21)$$

Выражение для точного решения (21) относительно  $\nu$  является громоздким и трудным для анализа. Асимптотические представления этого решения выглядят следующим образом (ПГ):

$$\nu \approx \frac{\pi^2}{4} + \left( \frac{4}{\pi} \frac{\mu + 1}{\mu} - 1 \right) \alpha \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0, \quad (22)$$

$$\nu \approx \frac{\pi - 1}{2} + \frac{\alpha}{\mu} + \sqrt{\frac{\mu + 1}{\mu}} \alpha \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Сопоставление с точным решением (21) показало, что применение простых формул (22) при  $\alpha \leq 2.8$  и (23) при  $\alpha > 2.8$  ведет к абсолютному отклонению  $\nu$  от точного решения не более 4% при любом  $\alpha$  (рис. 1).

### „Вычислительный эксперимент“

С целью верификации аналитических выражений, полученных в настоящей работе ранее и далее, был проведен „вычислительный эксперимент“, т.е. выполнялось численное решение уравнений (1)–(3). Если обозначить  $F_j = \Gamma_j / (D_{aj}^* x_w n_{e0})$ , то (1)–(3) можно преобразовать к виду

$$\frac{dF_p}{dX} + \gamma \frac{F_p}{X} = \nu n - \eta N(N + n), \quad (24)$$

$$\frac{dF_n}{dX} + \gamma \frac{F_n}{X} = \alpha n - \eta N(N + n) \mu_p / \mu_n, \quad (25)$$

$$\frac{dn}{dX} = - \frac{n}{n(1 + \tau_p) + N(1 + \mu_n/\mu_p)} \left\{ F_p - F_n \mu_n / \mu_p + \frac{\mu_n \tau_n / \mu_p - \tau_p}{n \tau_n (1 + \tau_p) + N(\tau_n + \tau_p)} \left[ F_n (n + n \tau_p + N) + F_p N \right] \right\}, \quad (26)$$

$$\frac{dN}{dX} = - \frac{1}{n \tau_n (1 + \tau_p) + N(\tau_n + \tau_p)} [F_n (n + n \tau_p + N) + F_p N]. \quad (27)$$

Здесь  $\gamma = 0$  для ПГ и 1 для ЦГ. Система (24)–(27) сходна с аналогичной системой из [7], однако в настоящей работе она получена для случая, когда  $\mu_p \neq \mu_n$  и  $\tau_p \neq \tau_n$ . Система (24)–(27) численно решалась как задача на собственные значения, в качестве которых были избраны  $N(0)$  (отношение концентраций ОИ и электронов в центре разряда) и приведенная частота ионизации  $\nu$ . Детали вычислительного эксперимента описаны в [12].

### Учет конечной ионной диффузии

Результаты сложных численных моделей [5,7–11] показывают, что когда величина  $\tau$  не является пренебрежимо малой, наличие ионной диффузии, во-первых, сказывается на форме профиля ионной концентрации, сглаживая ее резкие изменения. Во-вторых, ионная диффузия приводит к частичному проникновению ОИ со стороны сердцевины в оболочку, т.е. к сокращению размера обедненной отрицательными ионами пристеночной области  $e$ - $i$ -плазмы. Логично предположить, что ионная диффузия не окажет заметного влияния на профили концентраций ионов, если диффузионная длина ионов  $\lambda \ll 1$ .

Диффузионную длину ОИ для разрядов с присутствием галогенов можно оценить как  $\sqrt{\frac{D_n}{\rho_i n_n}}$ , а в приведенном масштабе  $\lambda \approx \sqrt{\frac{\tau_n}{\mu \eta N_0}}$ . Используя (12) и (22) или (23), можно сформулировать качественный критерий малости влияния ионной диффузии как  $\tau_n \ll \sqrt{\eta \left( \frac{\pi^2}{4} + \frac{4}{\pi} \frac{\mu + 1}{\mu} \alpha \right)}$  (при  $\alpha \leq 2.8$ ) или как  $\tau_n \ll \sqrt{\eta \left( \frac{\pi - 1}{2} + \frac{\mu + 1}{\mu} \alpha + \sqrt{\frac{\mu + 1}{\mu}} \alpha \right)}$  (при  $\alpha > 2.8$ ). Чем меньше  $\alpha$  и  $\eta$ , тем при меньших величинах  $\tau$  сказывается влияние ионной диффузии, это подтверждается результатами вычислительного эксперимента (табл. 2). Величины  $\rho_i$  для галогенов находятся в пределах  $(1.5-7) \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{s}$  [18–20], а величина  $\eta \approx (3-20) \cdot 10^{-4}$ . Тогда, например, при  $\alpha = 0.5$  получим  $\tau_n \ll 0.05$ , т.е. для пренебрежения ионной диффузией величина  $T_i$  должна быть в ряде случаев ниже комнатной температуры! Даже если, как в [5], принять  $T_i$  равной температуре газа, то она в реальных разрядах может доходить до 1500 К [21], что, как продемонстрировано в [5,6–11], уже вызывает заметные изменения профилей концентраций ионов в сравнении с теоретическим случаем  $T_i \rightarrow 0$ . А если учесть нагрев

Таблица 2.

$\alpha$	$\tau$	$\nu^{(num)}$	$\nu^{(SD)}$	$\nu^{(MD)}$	$\nu^{(SD)}$	$X_0^{(num)}$	$X_0^{(SD)}$	$X_0^{(MD)}$	$X_0^{(num)}$	$X_0^{(SD)}$	$X_0^{(MD)}$	$N_{\tau_0}^{(num)}$	$N_{\tau_0}^{(SD)}$	$N_{\tau_0}^{(MD)}$	$N_{\tau_0}^{(MD)}$
			(38) + (50)	(46) + (47)	(41)	$\sim 1$	(38)	(47)		(37)	(30) + (47)		(39)	(42)	(48)
8	0.2	<b>404</b>	<b>379</b>	790	<b>373</b>	<b>0.996</b>	<b>0.997</b>	<b>1.26</b>	<b>1.23</b>	<b>1.48</b>	<b>1.48</b>	<b>219</b>	<b>239</b>	<b>238</b>	534
8	0.1	<b>215</b>	<b>190</b>	273	<b>182</b>	<b>0.996</b>	<b>0.99</b>	<b>0.991</b>	<b>1.52</b>	<b>1.46</b>	<b>1.60</b>	<b>225</b>	<b>241</b>	<b>238</b>	343
8	0.05	<b>120</b>	<b>94.6</b>	121	<b>87.2</b>	<b>0.99</b>	<b>0.98</b>	<b>0.98</b>	<b>1.86</b>	<b>1.73</b>	<b>1.84</b>	<b>225</b>	<b>244</b>	<b>238</b>	262
8	0.01	<b>43.2</b>	<b>26.4</b>	40.2	<b>11.0</b>	<b>0.95</b>	<b>0.82</b>	<b>0.93</b>	<b>3.09</b>	<b>2.48</b>	<b>3.05</b>	<b>210</b>	<b>353</b>	<b>238</b>	207
8	0.001	<b>24.5</b>	<b>63.4</b>	23.2	<b>-6.1</b>	<b>0.82</b>	<b>0.3</b>	<b>0.81</b>	<b>7.72</b>	<b>3.43</b>	<b>7.65</b>	<b>182</b>	<b>576</b>	<b>238</b>	179
1	0.2	<b>142</b>	<b>140</b>	684	<b>134</b>	<b>0.998</b>	<b>0.99</b>	<b>0.996</b>	<b>0.97</b>	<b>0.95</b>	<b>1.42</b>	<b>78.0</b>	<b>85.4</b>	<b>84.2</b>	473
1	0.1	<b>75.0</b>	<b>72.5</b>	189	<b>66.3</b>	<b>0.984</b>	<b>0.97</b>	<b>0.988</b>	<b>1.15</b>	<b>1.12</b>	<b>1.45</b>	<b>81.0</b>	<b>86.7</b>	<b>84.2</b>	255
1	0.05	<b>41.3</b>	<b>39.1</b>	62.5	<b>32.7</b>	<b>0.96</b>	<b>0.943</b>	<b>0.964</b>	<b>1.37</b>	<b>1.33</b>	<b>1.52</b>	<b>82.8</b>	<b>89.2</b>	<b>84.2</b>	123
1	0.01	<b>14.5</b>	<b>13.3</b>	14.2	<b>5.73</b>	<b>0.83</b>	<b>0.78</b>	<b>0.81</b>	<b>2.05</b>	<b>1.89</b>	<b>1.99</b>	<b>87.4</b>	<b>108</b>	<b>84.2</b>	95.2
1	0.001	<b>8.79</b>	<b>13.8</b>	8.44	<b>-0.3</b>	<b>0.57</b>	<b>0.357</b>	<b>0.542</b>	<b>3.96</b>	<b>2.77</b>	<b>3.75</b>	<b>96.7</b>	<b>203</b>	<b>84.2</b>	98.5
0.1	0.2	<b>48.2</b>	<b>48.5</b>	669	<b>42.5</b>	<b>0.96</b>	<b>0.96</b>	<b>0.996</b>	<b>0.72</b>	<b>0.71</b>	<b>1.42</b>	<b>24.6</b>	<b>27.8</b>	<b>26.6</b>	468
0.1	0.1	<b>26.8</b>	<b>27.3</b>	175	<b>21.2</b>	<b>0.94</b>	<b>0.92</b>	<b>0.99</b>	<b>0.85</b>	<b>0.83</b>	<b>1.43</b>	<b>26.0</b>	<b>28.9</b>	<b>26.6</b>	241
0.1	0.05	<b>16.1</b>	<b>16.7</b>	50.8	<b>10.5</b>	<b>0.88</b>	<b>0.86</b>	<b>0.96</b>	<b>0.99</b>	<b>0.97</b>	<b>1.43</b>	<b>27.7</b>	<b>31.0</b>	<b>26.6</b>	130
0.1	0.01	<b>7.8</b>	<b>8.7</b>	9.2	<b>2.0</b>	<b>0.64</b>	<b>0.623</b>	<b>0.69</b>	<b>1.34</b>	<b>1.34</b>	<b>1.51</b>	<b>33.8</b>	<b>42.7</b>	<b>26.6</b>	58.7
0.1	0.001	<b>6.1</b>	<b>11.0</b>	6.32	<b>0.11</b>	<b>0.33</b>	<b>0.27</b>	<b>0.313</b>	<b>2.1</b>	<b>1.93</b>	<b>1.97</b>	<b>55.0</b>	<b>84.8</b>	<b>26.6</b>	61.5

ионов полем, то  $T_i$  могут доходить до тысяч кельвин [11], при этом величины  $\tau$  достигают 0.1–0.2.

Попытки учета ионной диффузии для рекомбинационного механизма гибели ОИ предпринимались лишь в немногих работах. В [7] численно решалась (при  $\mu_p = \mu_n$  и  $\tau_p = \tau_n$ ) система, сходная с (24)–(27). Были получены качественные профили концентраций заряженных частиц для  $\tau > 0$  без привязки к реальным разрядам. В работах [5], посвященной численному моделированию разряда в  $CF_4$ , и [9], где моделировался разряд в смеси  $Xe + Cl_2$ , были выявлены отмеченные выше особенности влияния ионной диффузии, но теоретических положений сформулировано не было. Из результатов работ [5,7–11,21] однозначно вытекает, что теории ЭО-разрядов, разработанные для случая  $\tau \rightarrow 0$ , имеют лишь условную практическую ценность и что если мы хотим хотя бы приблизительно описывать реальные разряды, то необходимо учитывать влияние ионной диффузии. Однако теоретических исследований этого влияния до сих пор проведено не было.

Ограничимся случаем большой электроотрицательности, когда  $N_0 \gg 1$  и в объеме  $N \approx P \gg n$ . Допустим, как и в [13], что ионная диффузия мало влияет на профиль концентрации электронов в сердцевине, т.е. для  $n(X)$  и при  $\tau > 0$  будут выполняться (18), (19), причем для сильно электроотрицательных разрядов  $\beta \ll 1$  (табл. 1). Численное моделирование подтверждает правомерность данного допущения (рис. 2, а). Сложив (4) и (5), получим для сердцевины

$$\Delta N \tau_S \approx (\mu + 1)\eta N(N + n) - (\nu + \alpha)n - \Delta n, \quad (28)$$

где  $\tau_S = \tau_p + \tau_n$ . Условия  $N \approx P \gg n$  и  $\beta \ll 1$  позволяют упростить (28) до  $\Delta N \tau_S \approx (\mu + 1)\eta N^2 - (\nu + \alpha)n$ , а затем подстановкой  $\chi = \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{N_0 \tau_S}} X$ ,  $Y(\chi) = N(\chi)/N_0$  — до не

зависящего ни от каких параметров уравнения

$$\Delta Y(\chi) = Y^2(\chi) - 1. \quad (29)$$

Переменную  $\chi$  можно представить как  $\chi = \sqrt{(\mu + 1)/2\mu^2} X/\lambda$  (при  $\mu = 1$ ,  $\chi = X/\lambda$ ), т.е. по физическому смыслу  $\chi$  является координатой, выраженной в диффузионных длинах ионов. Граничные условия задачи (29)  $Y'(0) = 0$  и  $Y(\chi_0) = 0$ , где

$$\chi_0 = \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{N_0 \tau_S}} X_0, \quad (30)$$

а  $X_0$  — такое приведенное расстояние от центра, где  $N(X_0)$  при  $\tau_S > 0$ , можно положить равной нулю (рис. 2). Под  $N_0$ , как и ранее (см. (12)), имеем в виду величину  $N_0 = \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{(\mu + 1)\eta}}$ , но при  $\tau_S > 0$  она не будет совпадать с  $N(0)$ . Для  $N(0)$  при  $\tau_S > 0$  введем обозначение  $N_{\tau_0}$ .

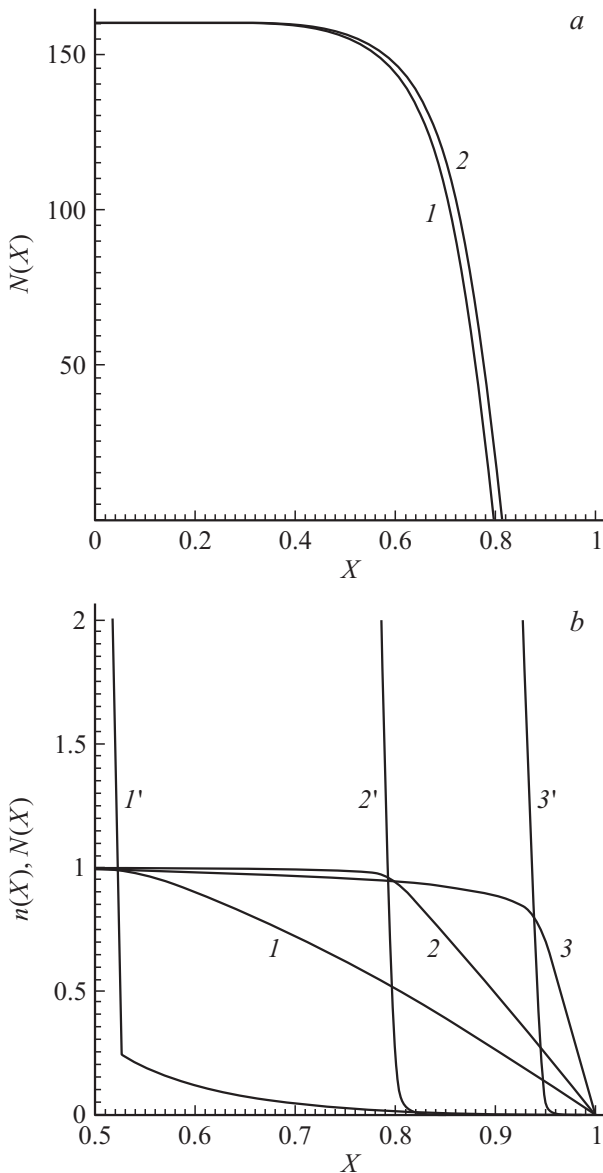
Точное решение (29) сложно и затруднительно для анализа. Поэтому был проведен анализ асимптотического поведения решения (29) в предельных случаях ( $Y \rightarrow 1$  или  $Y \rightarrow 0$ ), что позволило получить нижеследующие простые выражения для  $Y(\chi)$ .

Для больших, хотя и меньших единицы, величин  $\tau$  (т.е. при сильной ионной диффузии) и незначительных  $\chi_0$  реализуется случай  $Y \ll 1$ , а решение (29) выглядит как

$$Y(\chi) \approx \frac{\chi_0^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\chi}{\chi_0} \right)^2 \right] \quad (\text{ПГ}),$$

$$Y(\chi) \approx \frac{\chi_0^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{\chi}{\chi_0} \right)^2 \right] \quad (\text{ЦГ}). \quad (31)$$

В действительности формулы (31) дают отклонение от результатов вычислительного эксперимента не более 10% при  $\chi_0 < 1$  для ПГ или  $\chi_0 \leq 1.9$  для ЦГ.



**Рис. 2.** Приведенные концентрации отрицательных ионов и электронов: *a* — проверка выполнения (18) при  $\tau > 0$ ; 1 — вычислительный эксперимент, 2 — решение (28) при подстановке туда (18), величины  $\nu$  и  $N_{0r}$  взяты из модели; *b* — проверка выполнения (33) при  $\tau > 0$ , пример для  $\alpha = 1$ ,  $\eta = 5.5 \cdot 10^{-4}$ ; 1, 2, 3 —  $n(X)$  при  $\tau_p = \tau_n = \tau = 0.001, 0.01$  и  $0.05$  соответственно, 1', 2', 3' —  $N(X)$  при соответственно тех же  $\tau$ .

Для  $0 < \tau \ll 1$  (т.е. при умеренной ионной диффузии) и больших величинах  $\chi_0$  реализуется случай  $Y \sim 1$ , а решение (29) выглядит как

$$Y(\chi) \approx 1 - \frac{\text{ch}(\sqrt{2}\chi)}{\text{ch}(\sqrt{2}\chi_0)} \quad (\text{ПГ}), \quad Y(\chi) \approx 1 - \frac{I_0(\sqrt{2}\chi)}{I_0(\sqrt{2}\chi_0)} \quad (\text{ЦГ}), \quad (32)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. При  $\chi_0 \geq 1$  для ПГ или  $\chi_0 > 1.9$  для ЦГ формулы (32) дают отклонение не более 7%. Выраже-

ния (31) и (32) работоспособны, естественно, лишь при  $0 \leq X \leq X_0$ , т.е. в *i-i*-плазме, за ее пределами при  $X_0 \leq X \leq 1$  переменную  $Y(\chi)$  следует полагать равной нулю.

Кроме того, вычислительный эксперимент показывает, что при  $\tau > (5-10) \cdot 10^{-3}$  переменная  $n(X)$  при  $X_0 \leq X \leq 1$ , т.е. в оболочке, зависит от  $X$  практически линейно (рис. 2, *b*), а формула (7) при подстановке туда (9) не вполне соответствует действительности. Это связано с диффузионным проникновением ОИ со стороны *i-i*-плазмы в оболочку и с нейтрализацией ими поля оболочки вблизи границы с сердцевинкой, т.е. вблизи максимума синусоидальной зависимости (7), там, где поле  $E_x$  слабо. Формула же (9) получена в [13] как первое приближение, т.е. без учета влияния проникших в оболочку ОИ на поле в ней. Опираясь на данные вычислительного эксперимента, примем, что в оболочке

$$n(X) \approx (1 - X)/(1 - X_0), \quad \nabla n(X) \approx -1/(1 - X_0), \quad (33)$$

но координата границы *i-i*- и *e-i*-плазм  $X_0$  полагается неизвестной и далее подлежит расчету.

Если  $0 < \tau < 1$ , то ОИ не попадают на стенки и гибнут исключительно в плазме. Средние по поперечному сечению плазмы скорости рождения и гибели ОИ должны быть равны. Это означает

$$\begin{aligned} \nu_a \int_0^{x_w} n_e(x) dx &= \rho_i \int_0^{x_w} n_p(x) n_n(x) dx \quad (\text{ПГ}), \\ \nu_a \int_0^{R_i} n_e(r) r dr &= \rho_i \int_0^{R_i} n_p(r) n_n(r) r dr \quad (\text{ЦГ}). \end{aligned} \quad (34)$$

В оболочке мало отрицательных ионов, а в сердцевине при сильной электроотрицательности имеет место  $n_n \approx n_p \gg n_e$ , профиль же электронов почти плоский  $n_e \approx n_{e0}$ . Следовательно, (34) можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\mu\eta} a &\approx \int_0^{x_0} N^2(X) dX \quad (\text{ПГ}) \\ \text{или} \quad \frac{\alpha}{\mu\eta} a &\approx \int_0^{x_0} N^2(X) X dX \quad (\text{ЦГ}), \end{aligned} \quad (35)$$

где  $a = \int_0^1 n(X) dX = (1 + X_0)/2$  (ПГ) или  $a = \int_0^1 n(X) X dX = (1 + X_0 + X_0^2)/6$  (ЦГ). Переходя к переменной интегрирования  $\chi$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\mu\eta} a &\approx N_0^2 \sqrt{\frac{N_0 \tau_S}{\nu + \alpha}} \int_0^{\chi_0} Y^2(\chi) d\chi \quad (\text{ПГ}), \\ \frac{\alpha}{\mu\eta} a &\approx N_0^3 \frac{\tau_S}{\nu + \alpha} \int_0^{\chi_0} Y^2(\chi) \chi d\chi \quad (\text{ЦГ}). \end{aligned} \quad (36)$$

Далее рассмотрим по отдельности случаи сильной диффузии (когда  $\chi < 1$  для ПГ или  $\chi_0 \leq 1.9$  для ЦГ и профиль концентрации ОИ описывается выражением (31)) и умеренной диффузии (когда  $\chi_0 \geq 1$  для ПГ или  $\chi_0 > 1.9$  для ЦГ, а профиль ОИ описывается выражением (32)).

### Сильная ионная диффузия

Подставив (31) в (36), после ряда преобразований получим

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \left( \frac{15\alpha}{2\mu\eta} a \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{\tau_S}} \right)^{1/5} \quad (\text{ПГ})$$

$$\text{или } \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \left( \frac{96\alpha}{\mu\eta} a \frac{\nu + \alpha}{\tau_S} \right)^{1/6} \quad (\text{ЦГ}).$$

При  $a \geq 0.7$  для ПГ или  $a \geq 0.3$  для ЦГ, что соответствует  $0.4 \leq X_0 < 1$ , величины  $\chi_0$  и  $X_0$  с погрешностью не более 5–10% можно оценивать и по более простым формулам

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \left( \frac{15\alpha}{2\mu\eta} \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{\tau_S}} \right)^{1/5} \quad (\text{ПГ})$$

$$\text{или } \chi_0 = \frac{1}{\sqrt{N_0}} \left( \frac{48\alpha}{\mu\eta} \frac{\nu + \alpha}{\tau_S} \right)^{1/6} \quad (\text{ЦГ}), \quad (37)$$

$$X_0 \approx \left[ \frac{15\alpha}{2\mu\eta} \left( \frac{\tau_S}{\nu + \alpha} \right)^2 \right]^{1/5} \quad \text{ПГ}$$

$$\text{или } X_0 \approx \left[ \frac{48\alpha}{\mu\eta} \left( \frac{\tau_S}{\nu + \alpha} \right)^2 \right]^{1/6} \quad \text{ЦГ}. \quad (38)$$

При этом из (31) следует

$$N_{\tau_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{15\alpha}{2\mu\eta} \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{\tau_S}} \right)^{2/5} \quad (\text{ПГ})$$

$$\text{или } N_{\tau_0} = \frac{1}{4} \left( \frac{48\alpha}{\mu\eta} \frac{\nu + \alpha}{\tau_S} \right)^{1/3} \quad \text{ЦГ}. \quad (39)$$

В случае, когда  $\alpha \geq 1$  и  $\tau > 0.05$ , ионный профиль практически доходит до стенки;  $X_0 \rightarrow 1$  (табл. 2). Тогда из (31) получаются следующие простые формулы:

$$\chi_0 = \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{N_0 \tau_S}}, \quad N_{\tau_0} = N_0 Y_0 \approx \frac{\nu + \alpha}{2\tau_S} \quad (\text{ПГ})$$

$$\text{или } N_{\tau_0} \approx \frac{\nu + \alpha}{4\tau_S} \quad (\text{ЦГ}). \quad (40)$$

Приравняв выражения для  $N_{\tau_0}$  (40) и (39), получим в итоге простые формулы

$$\nu \approx \tau_S \sqrt{\frac{15\alpha}{2\mu\eta}} - \alpha \quad (\text{ПГ}) \quad \text{или} \quad \nu \approx \tau_S \sqrt{\frac{48\alpha}{\mu\eta}} - \alpha \quad (\text{ЦГ}), \quad (41)$$

а также

$$N_{\tau_0} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15\alpha}{2\mu\eta}} \quad (\text{ПГ}), \quad N_{\tau_0} \approx \sqrt{\frac{3\alpha}{\mu\eta}} \quad (\text{ЦГ}). \quad (42)$$

Соотношения для  $\nu$  при  $X_0 < 1$  будут получены ниже (см. (49) и (50)).

### Умеренная ионная диффузия

В ПГ, согласно (32),  $\int_0^{\chi_0} Y^2(\chi) d\chi = \frac{\chi_0}{2} [3 - \text{th}^2(\sqrt{2}\chi_0)] - \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{th}(\sqrt{2}\chi_0)$ . Подстановка этого выражения в (36) дает сложное трансцендентное уравнение относительно  $\chi_0$ . Ниже разберем случай, когда можно положить  $\text{th}(\sqrt{2}\chi_0) \approx 1$  (при  $\chi_0 \geq 1.4$  уклонение не более 4%). Тогда  $\int_0^{\chi_0} Y^2(\chi) d\chi \approx \chi_0 - \frac{3}{2\sqrt{2}}$ , и из (36) можно получить

$$X_0 \approx \left( \frac{\alpha}{2\mu\eta N_0^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N_0 \tau_S}{\nu + \alpha}} \right) / \left( 1 - \frac{\alpha}{2\mu\eta N_0^2} \right). \quad (43)$$

С другой стороны, из (24) следует  $F_p(1) = \nu(1 + X_0)/2 - \eta \int_0^{X_0} N^2(X) dX$ , а из (26)  $F_p(1) \approx (1 + \tau_p)/(1 - X_0)$ . Из этих равенств с учетом (35) следует простое соотношение

$$X_0 \approx \sqrt{1 - 2 \frac{1 + \tau_p}{\nu - \alpha/\mu}}. \quad (44)$$

Величину  $N_{\tau_0}$  для умеренной диффузии, согласно (32), можно вычислить для ПГ как

$$N_{\tau_0} \approx \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{(\mu + 1)\eta}} \left[ 1 - \frac{1}{\text{ch}(\sqrt{2}\chi_0)} \right]. \quad (45)$$

Решив совместно (43) и (44) численно, можно найти значение  $\nu$  при известных  $\alpha, \eta, \tau_p$  и  $\tau_n$ . После этого по (44) вычисляется величина  $X_0$ .

В ЦГ, согласно (32),  $\int_0^{\chi_0} Y^2(\chi) \chi d\chi = 1 + \chi_0^2 - \left[ 1 + \frac{\chi_0}{\sqrt{2}} \frac{I_1(\sqrt{2}\chi_0)}{I_0(\sqrt{2}\chi_0)} \right]^2$ . Когда работает (32), то  $\chi_0 > 1.9$  (см. выше) и можно использовать асимптотическое представление  $1 + \chi_0^2 - \left[ 1 + \frac{\chi_0}{\sqrt{2}} \frac{I_1(\sqrt{2}\chi_0)}{I_0(\sqrt{2}\chi_0)} \right]^2 \approx \frac{1}{2} + \frac{\chi_0^2}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \chi_0$  (уклонение не более 15%). Тогда из (36) получим

$$\frac{\alpha}{\mu} (1 + X_0 + X_0^2) \approx 3 \frac{\nu + \alpha}{\mu + 1} \left( \frac{N_0 \tau_S}{\nu + \alpha} + X_0^2 - \frac{3}{\sqrt{2}} X_0 \sqrt{\frac{N_0 \tau_S}{\nu + \alpha}} \right). \quad (46)$$

Из (24) следует  $F_p(1) = \nu(1 + X_0 + X_0^2)/6 - \eta \int_0^{X_0} N^2(X) X dX$  или, учтя (35),  $F_p(1) = (\nu - \alpha/\mu) \times (1 + X_0 + X_0^2)/6$ . С другой стороны, из (26) имеем

$F_p(1) \approx (1 + \tau_p)/(1 - X_0)$ . Приравняв приведенные выражения для  $F_p(1)$ , получим простое равенство

$$X_0 \approx \sqrt[3]{1 - 6 \frac{1 + \tau_p}{\nu - \alpha/\mu}}. \quad (47)$$

Отметим, что (44) и (47) получены независимо от характера ионной диффузии. Поэтому для сильной диффузии величины  $X_0$ , даваемые (44) и (47), должны быть близки к тем, что дает (38). Вычислительный эксперимент показывает, что это действительно имеет место.

Согласно (32), величина  $N_{\tau_0}$  для умеренной диффузии в ЦГ может быть вычислена как

$$N_{\tau_0} \approx \sqrt{\frac{\nu + \alpha}{(\mu + 1)\eta}} \left[ 1 - \frac{1}{I_0(\sqrt{2}\chi_0)} \right]. \quad (48)$$

Подстановка (47) в (46) дает в итоге достаточно сложное алгебраическое выражение, из которого при известных  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\tau_p$  и  $\tau_n$  можно численно найти значение  $\nu$  в ЦГ.

## Анализ собственных чисел задачи

Выясним, какие физические процессы определяют величины собственных чисел  $N_{\tau_0}$  и  $\nu$ .

Примечательно сходство выражений для  $N_{\tau_0}$  в случае слабой ионной диффузии при  $\tau \rightarrow 0$  —  $N_0 \propto \sqrt{(\nu + \alpha)/\eta}$  (см. (12)) и в противоположном предельном случае сильной диффузии при больших величинах  $\tau$  и  $X_0 \rightarrow 1$  —  $N_{\tau_0} \propto \sqrt{\alpha/\eta}$  (см. (42)).

Выражение (12) отражает тот факт, что при сильной электроотрицательности концентрации положительных и отрицательных ионов в сердцевине примерно равны ( $N \approx P \gg n$ ), а поскольку в случае  $\tau \rightarrow 0$  поперечное поле  $E_x$  в сердцевине мало, единственным механизмом гибели и тех, и других является их взаимная рекомбинация. Ионы обоих сортов можно считать „запертыми“ в объеме, а (12) соответствует равенству совместной скорости рождения положительных и отрицательных ионов и скорости их совместной гибели.

Выражение (42) для величины  $N_{\tau_0}$  в случае сильной ионной диффузии при сравнительно больших  $\tau$  (но при  $\tau < 1$ ) и при  $X_0 \rightarrow 1$ , кроме сходства с (12), интересно еще и тем, что оно не содержит ни приведенной частоты ионизации  $\nu$ , ни ионной температуры! Независимость  $N_{\tau_0}$  от  $\tau$  в названном случае подтверждается вычислительным экспериментом (табл. 2). Режим сильной диффузии реализуется при условиях, когда ионная температура настолько велика, что диффузионное устранение преобладает над ион-ионной рекомбинацией и является главным механизмом гибели положительных ионов всюду в плазме. Как показано в [8], это часто выполняется в реальных разрядах при наличии хлора в смеси газов. При этом форма ионных профилей, определяемая в названных условиях балансом положительных ионов, при  $X_0 \rightarrow 1$ , согласно (29), стабилизируется в

виде  $1 - X^2$  и не зависит от  $\tau$ , сами же ионные профили представимы как  $P(X) \approx N(X) \approx N_{\tau_0}(1 - X^2)$ . Однако пока  $\tau < 1$  ионные температуры все же не настолько велики, чтобы ОИ смогли в заметном количестве преодолеть пристеночный потенциальный барьер, они остаются „запертыми“ и гибнут лишь в объеме. Средняя по сечению плазмы скорость гибели ОИ, как и при  $\tau \rightarrow 0$ , определяется одной только ион-ионной рекомбинацией и при этом она равна средней скорости рождения ОИ посредством прилипания электронов. Последняя не зависит от  $\tau$  (в сердцевине профиль электронов близок к плоскому, а „оболочка“ тонка:  $X_0 \rightarrow 1$ ), и обе скорости не зависят от  $\nu$ . А поскольку средняя скорость рекомбинационной гибели при сильной электроотрицательности и постоянстве формы ионных профилей пропорциональна  $N_{\tau_0}^2$ , то величина  $N_{\tau_0}$  также не должна зависеть ни от  $\tau$ , ни от  $\nu$ .

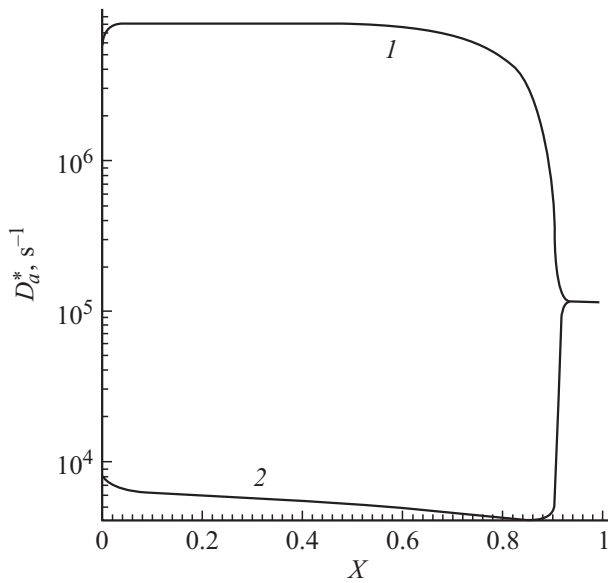
Таким образом, сходство (12) и (42) объясняется тем, что в обоих крайних случаях величина  $N_{\tau_0}$  определяется балансом „запертых“ в объеме ионов. Или (для  $\tau \rightarrow 0$ ) и положительных, и отрицательных в равной мере, или (для больших  $\tau$  при сильной диффузии и  $X_0 \rightarrow 1$ ) только отрицательных, ибо положительные ионы уходят из сердцевины за счет мощного диффузионного устранения, по сравнению с которым рекомбинационной гибелью последних можно пренебречь.

Для практических расчетов по полученным выше формулам требуется вначале определить значения исходных параметров, таких как  $\alpha$ ,  $\eta$ ,  $\tau_p$ ,  $\tau_n$ ,  $\mu$ . Ионные температуры можно оценить (с учетом нагрева ионов полем) по формулам, приведенным в [22], величины  $\mu_p$  и  $\mu_n$  — по данным [23], а значения коэффициентов рекомбинации  $\rho_i$  можно взять из [17–19]. Необходимую для расчета параметра  $\eta$  величину  $n_{e0}$  несложно оценить из эксперимента. Величины  $\nu_a$  (как, кстати, и  $\nu_i$ ), а также  $D_e$  и  $\mu_e$  можно вычислить, воспользовавшись free программой BOLSIG [24], задавая состав газовой смеси, а также оцененную, например, из эксперимента величину  $E/N$ .

Однако в состав параметров  $\nu$ ,  $\alpha$  и  $\eta$  входит приведенная диффузионная частота  $D_{ap}^*$  (в  $\alpha$  входит  $D_{an}^*$ , но  $D_{an}^* = D_{ap}^*/\mu$ ). Если  $\nu_i$  задается как известная величина, то входящий в  $\nu$ , а также в  $\alpha$  и в  $\eta$  параметр  $D_{ap}^*$  принимает роль собственного числа задачи.

Представляет интерес выяснить физический смысл величины  $D_{ap}^* = D_{ap}/x_W^2$ . Формально величина  $D_{ap}^* = T_e \mu_p / e$  совпадает с коэффициентом амбиполярной диффузии двухкомпонентной ЭП-плазмы, но на первый взгляд не вполне ясно, какое отношение он имеет к изучаемой ЭО-плазме, к которой в целом понятие амбиполярной диффузии неприменимо. Впрочем, во внешней оболочке  $e$ - $i$ -плазмы ОИ практически отсутствуют, и имеет место направленное к стенке совместное движение электронов и положительных ионов. И если для них совпадут эффективные коэффициенты диффузии, определяемые как  $D_{aj} = -\frac{\Gamma_j}{dn_j/dx}$ ,  $j = e, p$  (в ЭП-плазме





**Рис. 3.** Полученные при помощи модели [8] величины  $D_{ae}^*$  (1) и  $D_{ap}^*$  (2) для разряда в смеси, соответствующей парциальным давлениям напуска 6 Torr Xe и 0.25 Torr Cl<sub>2</sub> при токе 2 мА, радиус трубки 6 мм.

$D_{ap}$  и  $D_{ae}$  совпадают по величине и отождествляются с коэффициентом амбиполярной диффузии), то в оболочке можно будет принять аналогию амбиполярной диффузии [1,2,8]. В таком случае параметр  $D_{ap}^*$  можно будет вычислить как  $D_{ap}^* = -\frac{\Gamma_p}{x_w^2 dn_p/dx}$ .

Из рис. 3 видно, что в сердцевине ЭО-плазмы величины  $D_{ap}^*$  и  $D_{ae}^*$  различаются на порядки; там ни о какой амбиполярной диффузии говорить нельзя, нельзя и отождествить объемные  $D_{ap}$  и  $D_{ae}$  с коэффициентом такой диффузии. Однако на рис. 3 видно, что в оболочке имеет место  $D_{ap}^* \approx D_{ae}^*$ , и в оболочке аналогия амбиполярной диффузии допустима (впервые на это указано в [1]). Попадающий в оболочку поток положительных ионов нарабатывается в сердцевине плазмы:  $\Gamma_p = v_i \int_0^{x_0} n_e(x) dx - \rho_i \int_0^{x_0} n_p(x) n_n(x) dx$  (для ПГ, здесь  $x_0$  — абсолютная координата границы между  $i$ - $i$ - и  $e$ - $i$ -плазмой). В сердцевине  $n_p \approx n_n \gg n_e$  и  $n_e \approx n_{e0}$ , а в оболочке  $n_p \approx n_e \gg n_n$  и в соответствии с (33)  $\frac{dn_p}{dx} \approx -\frac{n_{e0}}{x_w - x_0}$ . Тогда  $D_{ap}^* \approx \frac{x_0(x_w - x_0)}{x_w^2} \times \left( v_i - \frac{\rho_i}{x_0 n_{e0}} \int_0^{x_0} n_n^2(x) dx \right)$ , откуда, учтя (35), получим

$$v - \frac{\alpha}{2\mu} \frac{X_0 + 1}{X_0} \approx \frac{1}{X_0(1 - X_0)} \quad (\text{ПГ}). \quad (49)$$

Аналогичные выкладки в ЦГ дают

$$v - \frac{\alpha}{3\mu} \frac{1 + X_0 + X_0^2}{X_0^2} \approx \frac{2}{X_0(1 - X_0)} \quad (\text{ЦГ}). \quad (50)$$

Для случая, когда  $v \gg \alpha$  или  $v_i \gg v_a$  (такой случай реализуется, например, для разрядов в смесях галогена

с инертным газом при преобладании последнего), выражения (49) и (50) можно записать как

$$v_i = D_{ap}/\Lambda_n^2, \quad (51)$$

где  $\Lambda_n = \sqrt{x_0(x_w - x_0)}$  для ПГ или  $\Lambda_n = \sqrt{r_0(R_i - r_0)/2}$  для ЦГ. По внешнему виду (51) сходно с соотношением Шоттки для ЭП-плазмы:  $v_i = D_{ap}/\Lambda^2$ . Само по себе данное сходство не должно вызывать удивления, поскольку (51) получено в предположении  $v \gg \alpha$ , что означает малость потерь электронов в актах прилипания и доминирование диффузии к стенкам среди механизмов гибели электронов. В математическом плане соотношение (51) для ЭО-плазмы, однако, гораздо сложнее, так как в отличие от шоттковской  $\Lambda$  (равной  $2x_w/\pi$  для ПГ или  $R_i/2.405$  для ЦГ) величина  $\Lambda_n$  зависит от  $v_i, D_{ap}, v_a, \rho_i, \tau$  (38), (44), (47). Стоит, впрочем, отметить, что, согласно (51), ионизационно-диффузионный баланс электронов в ЭО-плазмах в отличие от ЭП-плазм определяется не поперечным размером всей плазмы в целом, а гораздо меньшим средним геометрическим размером сердцевинки ( $i$ - $i$ -плазмы) и оболочки ( $e$ - $i$ -плазмы). Поэтому можно заключить, что из-за тонкости оболочки, т.е. из-за близости  $x_0$  и  $x_w$ , будет  $\Lambda_n < \Lambda$ , а величины  $T_e$  и  $E_z$ , которые гипотетически можно определить из (51) для ЭО-разряда, окажутся больше, чем для ЭП-разряда при тех же  $x_w$ .

Подчеркнем, что формулы (49)–(51) получены независимо от характера ионной диффузии, но при условии выполнения (33), т.е. они удовлетворительно работают лишь при  $\tau > (5-10) \cdot 10^{-3}$ . Впрочем, в реальных разрядах обычно  $\tau > 0.01$ , и такое ограничение несущественно.

Для сильной ионной диффузии задача определения  $v$  посредством численного решения (49) или (50) при подстановке туда  $X_0$  по (38) хорошо обусловлена (well conditioned). Величина  $v$  в сравнении с вычислительным экспериментом определяется с точностью не хуже 15% (табл. 2). Однако аналогичная задача для умеренной диффузии, т.е. если в качестве  $X_0$  взять (44) для ПГ или (47) для ЦГ, оказывается плохо обусловленной (ill conditioned). Действительно, для ПГ формула (44) равносильна уравнению  $v - \frac{\alpha}{\mu} \approx 2 \frac{1+\tau_p}{1-X_0^2}$ . Поскольку  $X_0$  лишь немногим меньше единицы, то последнее уравнение оказывается весьма близким к (49), и численное решение его совместно с (49) дает неудовлетворительные результаты. То же справедливо и для ЦГ. Поэтому для определения  $v$  или  $D_{ap}^*$  при умеренной диффузии следует решать либо (43) совместно с (44) для ПГ, либо (47) совместно с (46) для ЦГ.

### Заключение

В табл. 2 приведены результаты как вычислительно-го эксперимента, так и расчета величин  $v, X_0, \chi_0$  и  $N_{\tau_0}$  по полученным в настоящей работе аналитическим

формулам для различных  $\alpha$  и  $\tau$  (принято  $\tau_p = \tau_n = \tau$ ). Расчеты проведены для ЦГ при  $\eta = 5.5 \cdot 10^{-4}$  и при  $\mu = 0.77$ . Под обозначением соответствующей величины в табл. 2 приведены номера формул, по которым производился расчет. Индексы „pm“, „SD“ и „MD“ означают вычислительный эксперимент, „сильная диффузия (Strong Diffusion)“ и „умеренная диффузия (Moderate Diffusion)“. При расчетах величин  $X_0$ ,  $\chi_0$  и  $N_{\tau_0}$  для различных вариантов ионной диффузии брались значения  $\nu$ , полученные из выражений для соответствующего варианта. Жирным шрифтом выделены те значения, которые согласуются с величинами, полученными в вычислительном эксперименте с погрешностью не более 25%.

Сопоставление с вычислительным экспериментом показывает, что приведенные в настоящей работе формулы при правильно определенном характере ионной диффузии (критерием которого является величина  $\chi_0$ ) позволяют обеспечить точность расчета параметров плазмы ПС ЭО-разряда не хуже 15–25% при  $\tau = T_i/T_e \geq 0.001$ . Меньшие же значения  $\tau$  для реальных разрядов, как уже упоминалось, нехарактерны.

## Список литературы

- [1] Цендин Л.Д. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 12. С. 2318–2322.
- [2] Цендин Л.Д. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 1. С. 21–28.
- [3] Rozhansky V.A., Tsendin L.D. Transport phenomena in partially ionized plasma. London & N. Y.: Taylor & Francis. 2001. 488 p.
- [4] Кудрявцев А.А., Смирнов А.С., Цендин Л.Д. Физика тлеющего разряда. СПб.: Лань, 2010. 512 с.
- [5] Volynets V.N., Lukyanova A.V., Rakhimov A.T. et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. P. 647–656.
- [6] Franklin R.N., Daniels P.G., Snell J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1993. Vol. 26. P. 1638–1649.
- [7] Franklin R.N., Snell J. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1994. Vol. 27. P. 2102–2106.
- [8] Головицкий А.П. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 3. С. 45–54.
- [9] Головицкий А.П. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 3. С. 55–64.
- [10] Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д. и др. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 70–77.
- [11] Богданов Е.А., Колобов В.И., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 8. С. 13–20.
- [12] Головицкий А.П., Цендин Л.Д. // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 3. С. 44–49.
- [13] Головицкий А.П. // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 3. С. 50–55.
- [14] Franklin R.N. // Plasm. Sourc. Sci. Technol. 2001. Vol. 10. P. 162–167.
- [15] Franklin R.N. // Plasm. Sourc. Sci. Technol. 2002. Vol. 11. P. 279–282.
- [16] Головицкий А.П., Кан С.Н. // Опт. и спектр. 1993. Т. 75. Вып. 3. С. 604–609.
- [17] Ломаев М.И., Скакун В.С., Соснин Э.А. и др. // УФН. 2003. Т. 173. Вып. 2. С. 201–217.
- [18] Yeung T.H.Y. // Proc. Phys. Soc. (London). 1958. Vol. 71. N 3. P. 341–346.
- [19] Chen H.-L., Center R.E., Trainor D.W., Fyfe W.I. // J. Appl. Phys. 1977. Vol. 48. N 6. P. 2297–2305.
- [20] Church M.J., Smith D. // J. Phys. D: Appl. Phys. 1978. Vol. 11. N 16. P. 2199–2206.
- [21] Головицкий А.П., Лебедев С.В. // Опт. и спектр. 1997. Т. 82. № 2. С. 251–255.
- [22] Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977. 384 с.
- [23] Ellis H.W., McDaniel E.W., Albritton D.L. et al. // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1978. Vol. 22. N 3. P. 179–217.
- [24] Voeuf J.P., Pitchford L.C. BOLSIG (freeware), SIGLORF (freeware). [Электронный ресурс]. Kinema Research & Software — Режим доступа: <http://www.sni.net/siglo/>.