10

Нелинейные акустические эффекты в резонаторе с насыщением гистерезисных потерь

© В.Е. Назаров, С.Б. Кияшко

Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

(Поступило в Редакцию 25 октября 2013 г. В окончательной редакции 20 февраля 2014 г.)

Проведено теоретическое исследование нелинейных волновых процессов в стержневом акустическом резонаторе с гистерезисной нелинейностью при его гармоническом возбуждении. Определены характеристики продольных нелинейных колебаний резонатора с жесткой и мягкой границами: амплитудно-зависимые потери, сдвиги резонансных частот и амплитуды второй и третьей гармоник. Из сравнения теоретических и экспериментальных зависимостей нелинейных акустических эффектов в резонаторе из отожженной поликристаллической меди определены параметры гистерезисной нелинейности этого материала.

Введение

В работе [1] на основе анализа результатов экспериментальных исследований эффектов дислокационного амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) в поликристаллических твердых телах было предложено гистерезисное уравнение состояния с насыщением нелинейных потерь

$$\sigma(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon}) = E\left[\varepsilon - f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})\right], \tag{1}$$

$$f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2(1+\gamma_0|\varepsilon|)} \times \begin{cases} \gamma_1\varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} > 0, \\ -\gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_1+\gamma_2)e_m\varepsilon, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ -\gamma_3\varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ \gamma_4\varepsilon^2 + (\gamma_3+\gamma_4)e_m\varepsilon, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \tag{2}$$

где σ и ε — напряжение и деформация, E — модуль упругости, $f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})$ — гистерезисная функция, $|f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})| \ll |\varepsilon|$, $|f'_\varepsilon(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})| \ll 1$, e_m — амплитуда деформации, γ_0 и γ_{1-4} — параметры гистерезисной нелинейности, $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_1+\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3+\gamma_4 \geq 0$. Из выражения (2) следует, что с ростом амплитуды e_m рост площади петли гистерезиса замедляется, с этим и связано насыщение нелинейных потерь. Кроме нелинейных потерь гистерезисная нелинейность приводит и к другим нелинейным эффектам, экспериментальное изучение их закономерностей можно использовать для определения параметров нелинейности материала.

В работе [1] были проведены теоретические исследования нелинейных эффектов, возникающих при распространении акустических волн в средах с гистерезисной нелинейностью (2), при этом было показано, что такие среды обладают нелинейной дисперсией. Более интенсивно (при прочих равных условиях) нелинейные волновые процессы протекают в резонаторах при их возбуждении на частотах, близких к резонансным, при этом из-за отражений от границ в резонаторах устанавливаются волны, имеющие не бегущую, а стоячую структуру. В высокодобротных резонаторах амплитуда резонансных колебаний значительно превышает амплитуду колебаний излучателя и может достигать достаточно высоких значений ($e_m \geq 10^{-6}$), при которых гистерезисная нелинейность поликристаллических материалов проявляется весьма заметно.

В настоящей работе проводится исследование нелинейных волновых процессов в стержневом акустическом резонаторе с гистерезисной нелинейностью при его гармоническом возбуждении. Определены характеристики продольных нелинейных колебаний резонатора с жесткой и мягкой границами: амплитудно-зависимые потери, сдвиги резонансных частот и амплитуды второй и третьей гармоник. Приведены результаты экспериментального исследования нелинейных акустических эффектов в резонаторе из отожженной поликристаллической меди. Из сравнения теоретических и экспериментальных зависимостей нелинейных эффектов определены параметры гистерезисной нелинейности этого металла.

АЗВТ и генерация гармоник в резонаторе с гистерезисной нелинейностью

Итак, исследуем нелинейные волновые процессы в стержневом резонаторе с жесткой и мягкой границами и с гистерезисной нелинейностью (2). (С таким резонатором удобно проводить экспериментальные исследования нелинейных эффектов, при этом на жесткой границе располагается пьезокерамический излучатель акустических колебаний, а на мягкой — приемник.) Подставляя (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})$ [2] и учитывая линейную диссипацию и геометрическую дисперсию продольных (вдоль оси x) акустических волн в стержне [3,4], получим одномерное волновое уравнение для продольных вдоль оси x стержня смещений

$U = U(x, t)$:

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} - \nu^2 r_0^2 [U_{tt} - C_t^2 U_{xx}]_{xx}$$
$$= -C_0^2 [f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})]_x + \alpha U_{xxt}, \qquad (3)$$

где $\varepsilon(x, t) = U_x(x, t)$ — продольная деформация, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость низкочастотной продольной волны, C_t — скорость сдвиговой волны, ρ — плотность, α — коэффициент линейной диссипации, ν — коэффициент Пуассона, $r_0 = R/\sqrt{2}$, R — радиус стержня.

Для резонатора с жесткой ($x = 0$) и мягкой ($x = L$) границами граничные условия имеют вид [2]

$$U(x = 0, t) = A_0 \cos \Omega t, \quad U_x(x = L, t) = 0, \qquad (4)$$

где A_0 и Ω — амплитуда и частота возбуждения резонатора, L — его длина. (При проведении экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов амплитуда A_0 и частота Ω колебаний границы резонатора $x = 0$ определяются амплитудой u_0 и частотой Ω электрического напряжения на пьезокерамическом излучателе, при этом $A_0 \propto u_0$.)

Отметим, что в резонаторе, описываемом волновым уравнением (3) и граничными условиями (4), имеет место два вида дисперсии: геометрическая и граничная. Из уравнений (3), (4) находим линейное дисперсионное соотношение и собственные волновые числа K_p и резонансные частоты Ω_p резонатора в низкочастотном приближении ($\Omega/\Omega_d \ll 1$):

$$K(\Omega) = \frac{\Omega}{C_0}\left[1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_d}\right)^2\right],$$

$$K_p = \frac{(2p-1)\pi}{2L} = (2p-1)K_1,$$

$$\Omega_p = \frac{\pi C_0 (2p-1)}{2L}(1 - m_p), \qquad (5)$$

где $\Omega_d = \frac{2\sqrt{1-\nu}C_0}{\nu r_0}$, $K_1 = \frac{\pi}{2L}$, $m_p = \left(\frac{\pi \nu r_0 (2p-1)}{4L\sqrt{1-\nu}}\right)^2 \ll 1$, p — номер моды, $p = 1.2.3\ldots$. Из выражений (5) видно, что при $m_p \ll 1$ собственные числа K_p и резонансные частоты Ω_p такого резонатора пропорциональны нечетным числам $2p - 1$, поэтому $2\Omega_p \neq \Omega_{p+1}, \Omega_{2p}$, но $3\Omega_p \cong \Omega_{3p-1}$. Таким образом, при возбуждении в нелинейном резонаторе с жесткой и мягкой границами колебаний на частоте $\Omega \approx \Omega_p$ возникающие в нем колебания на частоте $2\Omega \approx 2\Omega_p$ будут нерезонансными (из-за граничной дисперсии), а на частоте $3\Omega \cong 3\Omega_p$ — близкими к резонансным (из-за слабой геометрической дисперсии).

Для решения системы уравнений (1)–(4) используем замену

$$V(x, t) = U(x, t) - A_0 \cos \Omega t, \qquad (6)$$

при которой граничные условия для $V(x, t)$ становятся нулевыми

$$V(x = 0, t) = 0, \quad V_x(x = L, t) = 0. \qquad (7)$$

Будем рассматривать вынужденные колебания резонатора вблизи резонанса моды с номером p, когда почти на всей длине резонатора, за исключением области вблизи излучателя, выполняется условие $|U(x, t)|$, $|V(x, t)| \gg A_0$. Подставляя (6) в (4), получим волновое уравнение, в правой части которого находятся слагаемые, описывающие нелинейность, линейную диссипацию и внешнюю силу:

$$V_{tt} - C_0^2 V_{xx} - \nu^2 r_0^2 [V_{tt} - C_t^2 V_{xx}]_{xx}$$
$$= -C_0^2 [f(V_x, \operatorname{sign} V_{xt})]_x + \alpha V_{xxt} + A_0 \Omega^2 \cos \Omega t. \qquad (8)$$

Считая эти слагаемые малыми, будем искать решение уравнения (8) в виде, близком к решению однородного уравнения:

$$V(x, t) = V_1(x, t) + W(x, t), \qquad (9)$$

где

$$V_1(x, t) = V_0 \sin K_p x \cos \vartheta,$$

$$W(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} V^{(n)}(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} V_n(x) \sin(n\vartheta + \varphi_n)$$

— малая поправка, $|W(x, t)| \ll |V_1(x, t)|$, $|W_x(x, t)| \ll |V_{1x}(x, t)|$, $\vartheta = (\Omega_p + \delta)t + \varphi_1$, V_0, φ_1 — амплитуда и фаза колебаний на частоте Ω, $V_n(x)$ и φ_n — амплитуда и фаза колебаний на частоте $n\Omega$, $\delta = \Omega - \Omega_p$, $|\delta| \ll \Omega_p/p$.

Из выражения (9) следует, что

$$\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(x, t) + W_x(x, t) = \varepsilon_m \cos K_p x \cos \vartheta$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} V_{nx}(x) \sin(n\vartheta + \varphi_n), \qquad (10)$$

где $\varepsilon_1(x, t) = V_{1x}(x, t) = \varepsilon_m \cos K_p x \cos \vartheta$, $\varepsilon_m = V_0 K_p$ — амплитуда деформации в резонаторе на частоте $\Omega = \Omega_p + \delta$, при этом амплитуда деформации e_m в уравнении (2) определяется выражением $e_m = \varepsilon_m |\cos K_p x|$.

Подставляя (9), (10) в (8), получим неоднородное уравнение для $W(x, t)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям $W(x = 0, t) = W_x(x = L, t) = 0$:

$$W_{tt} - C_0^2 W_{xx} - \nu^2 r_0^2 [W_{tt} - C_t^2 W_{xx}]_{xx} - \alpha W_{xxt}$$
$$= -C_0^2 [f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot{\varepsilon})]_x + \alpha \Omega_p K_p^2 V_0 \sin K_p x \sin \vartheta$$
$$+ 2\delta \Omega_p V_0 \sin K_p x \cos \vartheta + A_0 \Omega_p^2 \cos(\vartheta - \varphi_1). \qquad (11)$$

Чтобы решение уравнения (11) не нарастало во времени, должно выполняться условие ортогональности его правой части собственным функциям $\sin K_p x$ оператора, стоящего в левой части. Это эквивалентно отсутствию в правой части уравнения (11) фурье-компонент с волновым числом K_p и частотой Ω. В общем виде, однако, получить аналитическое решение уравнения (11) не удается, поэтому далее мы рассмотрим два предельных случая: $\gamma_0\varepsilon_m \ll 1$ и $\gamma_0\varepsilon_m \gg 1$. В этих режимах удается получить выражения для характеристик нелинейных колебаний резонатора: амплитудно-зависимых потерь и сдвига резонансной частоты, амплитуд второй и третьей гармоник частоты накачки.

Малоамплитудный режим ($\gamma_0\varepsilon_m \ll 1$)

Вначале рассмотрим малоамплитудный режим возбуждения резонатора ($\gamma_0\varepsilon_m \ll 1$), когда $\frac{1}{1+\gamma_0|\varepsilon|} \approx \approx 1-\gamma_0|\varepsilon|$ и гистерезисную функцию $f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot\varepsilon)$ можно представить в виде

$$f(\varepsilon, \operatorname{sign}\dot\varepsilon) \cong \frac{1-\gamma_0|\varepsilon|}{2} \times \begin{cases} \gamma_1\varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \dot\varepsilon > 0, \\ -\gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_1+\gamma_2)e_m\varepsilon, & \varepsilon > 0, \dot\varepsilon < 0, \\ -\gamma_3\varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \dot\varepsilon < 0, \\ \gamma_4\varepsilon^2 + (\gamma_3+\gamma_4)e_m\varepsilon, & \varepsilon < 0, \dot\varepsilon > 0, \end{cases} \tag{12}$$

Для решения задачи о самовоздействии волны в резонаторе, т.е. для определения амплитуды ε_m деформации в резонаторе на частоте возбуждения Ω, выделим в правой части уравнения (11) колебания на собственной моде с номером p и с частотой Ω (учитывая, что $|\varepsilon_1(x,t)| \gg |W_x(x,t)|$ и $\varepsilon(x,t) \cong \varepsilon_1(x,t)$). Для этого умножим правую часть уравнения (11) на $\sin K_p x$ — собственную функцию резонатора и проинтегрируем ее по x от 0 до L, при этом для нелинейной функции имеем

$$\int\limits_0^L \int\limits_0^{2\pi} [f(\varepsilon_1, \operatorname{sign}\dot\varepsilon_1)]_x \sin K_p x \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} dx\, d\vartheta = -\pi L \left\{ \varepsilon_m^2 K_p \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} - \gamma_0\varepsilon_m^3 K_p \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \right\}, \tag{13}$$

где

$$a_1 = \frac{4}{9\pi^2}(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4) + \frac{1}{6\pi}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4),$$

$$b_1 = \frac{1}{9\pi^2}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4),$$

$$c_1 = \frac{9}{256}(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4) + \frac{1}{8\pi}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4),$$

$$d_1 = \frac{1}{64\pi}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4).$$

Приравнивая соответствующие фурье-компоненты по ϑ в правой части получившегося уравнения к нулю, получим уравнения для определения амплитуды ε_m на частоте Ω

$$a_1\varepsilon_m^2\Omega_p - c_1\gamma_0\varepsilon_m^3\Omega_p + \delta\varepsilon_m = -[\Omega_p A_0/L]\cos\varphi_1, \tag{14}$$

$$b_1\varepsilon_m^2\Omega_p - d_1\gamma_0\varepsilon_m^3\Omega_p + \alpha\Omega_p^2\varepsilon_m/2C_0^2 = -[\Omega_p A_0/L]\sin\varphi_1. \tag{15}$$

Из этих уравнений находим резонансную кривую резонатора и выражения для нелинейных сдвига резонансной частоты $\delta_{nl} = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$ и коэффициента потерь $\mu_{nl} = \mu_{nl}(\varepsilon_m)$:

$$\varepsilon_m = \frac{A_0\Omega_0/L}{\left[[\delta - \delta_{nl}(\varepsilon_m)]^2 + \frac{\Omega_p^4}{4}[\mu_p + \mu_{nl}(\varepsilon_m)]^2\right]^{1/2}}, \tag{16}$$

$$\delta_{nl}(\varepsilon_m) = -a_1\varepsilon_m[1-\gamma_0(c_1/a_1)\varepsilon_m]\Omega_p,$$
$$\mu_{nl}(\varepsilon_m) = 2b_1\varepsilon_m[1-\gamma_0(d_1/b_1)\varepsilon_m]\Omega_p^{-1}, \tag{17}$$

где $\mu_p = \alpha/C_0^2 = (\Omega_p Q_p)^{-1}$ и Q_p — коэффициент линейных потерь и добротность резонатора на частоте Ω_p. Вследствие нелинейности резонатора зависимость $\varepsilon_m = \varepsilon_m(A_0)$ является нелинейной и неявной, при этом максимальная амплитуда ε_m деформации имеет место при резонансе, когда $\delta = \delta_{nl}(\varepsilon_m)$:

$$\varepsilon_m = \frac{2A_0Q_p/L}{1+\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_p}. \tag{18}$$

Для определения амплитуды колебаний $V^{(2)}(x,t)$ в резонаторе на частоте 2Ω найдем фурье-компоненты гистерезисной функции $f(\varepsilon_1, \operatorname{sign}\dot\varepsilon)$ на этой частоте

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varepsilon_1, \operatorname{sign}\dot\varepsilon_1) \begin{pmatrix} \cos 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \varepsilon_m^2 \cos^2 K_p x - \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \gamma_0\varepsilon_m^3 |\cos^3 K_p x|, \tag{19}$$

где

$$a_2 = \frac{1}{16}(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4) + \frac{1}{6\pi}(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4),$$

$$b_2 = \frac{1}{12\pi}(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4),$$

$$c_2 = \frac{1}{5\pi}(\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4) + \frac{1}{16}(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4),$$

$$d_2 = \frac{1}{20\pi}(\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4).$$

Уравнение для смещений $V^{(2)}(x,t)$ имеет вид

$$V_{tt}^{(2)} - C_0^2 V_{xx}^{(2)} - \nu^2 r_0^2 [V_{tt}^{(2)} - C_t^2 V_{xx}^{(2)}]_{xx} - \alpha V_{xxt}^{(2)} = -C_0^2\big(\varepsilon_m^2 \cos^2 K_p x [a_2\cos 2\vartheta + b_2 \sin 2\vartheta] - \gamma_0\varepsilon_m^3 \big|\cos^3 K_p x\big| [c_2 \cos 2\vartheta + d_2 \sin 2\vartheta]\big)_x. \tag{20}$$

Для резонатора с жесткой и мягкой границами при резонансной накачке ее вторая гармоника не является резонансной (из-за граничной дисперсии), поэтому дисперсионным и диссипативным слагаемыми в уравнении (20) можно пренебречь. Решение уравнения (20) будем искать в виде суммы двух слагаемых:

$$V^{(2)}(x,t) = V^{(21)}(x,t) + V^{(22)}(x,t) = V_{21}(x)\sin(2\vartheta + \varphi_{21}) + V_{22}(x)\sin(2\vartheta+\varphi_{22}), \tag{21}$$

где смещения $V^{(21)}(x,t)$ и $V^{(22)}(x,t)$ определяются первым и вторым слагаемыми правой части уравнения (20), при этом $V^{(21)}(x=0,t)=V^{(22)}(x=0,t)=0$, $V_x^{(21)}(x=L,t)=V_x^{(22)}(x=L,t)=0$. Из уравнения (20) получаем выражения для амплитуд $V_{21}(x)$ и $V_{22}(x)$:

$$V_{21}(x)=\frac{(a_2^2+b_2^2)^{1/2}\varepsilon_m^2}{8K_p}(\sin 2K_px-2K_px\cos 2K_px),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{21}=a_2/b_2, \tag{22}$$

$$V_{22}(x)=\frac{(c_2^2+d_2^2)^{1/2}\gamma_0\varepsilon_m^3}{4K_p}\left(\left(\sin K_px-\frac{3}{5}\sin 3K_px\right)\right.$$

$$\left.\times\operatorname{sign}(\cos K_px)-\frac{16}{5}\left[\frac{1}{2}+\frac{K_px}{\pi}\right]\cos 2K_px\right),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{22}=c_2/d_2, \tag{23}$$

где в выражении для амплитуды $V_{22}(x)$ квадратные скобки означают целую часть числа $\frac{1}{2}+\frac{K_px}{\pi}$. Из выражений (21)–(23) находим амплитуду смещения $V_2(L)$ свободной границы резонатора на частоте 2Ω

$$V_2(L)=V_{21}(L)+V_{22}(L)\cos(\varphi_{21}-\varphi_{22})$$

$$=\frac{(a_2^2+b_2^2)^{1/2}}{4}\left[1-\frac{16\gamma_0}{5\pi}\,\frac{a_2c_2+b_2d_2}{a_2^2+b_2^2}\,\varepsilon_m\right]\varepsilon_m^2L. \tag{24}$$

Аналогичным образом получается уравнение для смещения $V^{(3)}(x,t)$ на частоте третьей гармоники

$$V_{tt}^{(3)}-C_0V_{xx}^{(3)}-\nu^2r_0^2[V_{tt}^{(3)}-C_t^2V_{xx}^{(3)}]_{xx}-\alpha V_{xxt}^{(3)}$$

$$=-C_0^2[\langle f(\varepsilon_1,\operatorname{sign}\dot\varepsilon_1)\rangle_{3\vartheta}+[\langle f'_\varepsilon(\varepsilon_1,\operatorname{sign}\dot\varepsilon_1)\rangle_0V_x^{(3)}]_x$$

$$=-C_0^2\big(\varepsilon_m^2\cos K_px\big|\cos K_px\big|[a_3\cos 3\vartheta+b_3\sin 3\vartheta]$$

$$-\gamma_0\varepsilon_m^3\cos^3K_px[c_3\cos 3\vartheta+d_3\sin 3\vartheta]\big)x$$

$$-C_0^2\big([a_0\varepsilon_m\big|\cos K_px\big|-\gamma_0c_0\varepsilon_m^2\cos^2K_px]V_x^{(3)}\big)_x, \tag{25}$$

где

$$\langle f(\varepsilon_1,\operatorname{sign}\dot\varepsilon_1)\rangle_{3\vartheta}=\varepsilon_m^2\cos K_px\big|\cos K_px\big|[a_3\cos 3\vartheta$$

$$+b_3\sin 3\vartheta]-\gamma_0\varepsilon_m^3\cos^3K_px[c_3\cos 3\vartheta+d_3\sin 3\vartheta],$$

$$\langle f'_\varepsilon(\varepsilon_1,\operatorname{sign}\dot\varepsilon_1)\rangle_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f'_\varepsilon(\varepsilon_1,\operatorname{sign}\dot\varepsilon_1)d\vartheta$$

$$=a_0\varepsilon_m\big|\cos K_px\big|-\gamma_0c_0\varepsilon_m^2\cos^2K_px,$$

$$a_3=\frac{1}{15\pi}(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4),$$

$$b_3=\frac{1}{60\pi}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4),$$

$$c_3=\frac{1}{15\pi}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)+\frac{1}{32}(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4),$$

$$d_3=\frac{1}{40\pi}(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4),$$

$$a_0=(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4)/2\pi+(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4)/8,$$

$$c_0=(3/16)(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4)$$

$$+(1/2\pi)(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4).$$

Частота третьей гармоники $3(\Omega_p+\delta_{nl})$ в отличие от второй близка к резонансной частоте Ω_{3p-1}, поэтому решение уравнения (25) будем искать в виде собственной моды резонатора с номером $3p-1$:

$$V^{(3)}(x,t)=V_3\sin K_{3p-1}x\sin(3\vartheta+\varphi_3), \tag{26}$$

где V_3, $\varphi_3=\text{const}$.

Умножая уравнение (25) на $\sin K_{3p-1}x$ и интегрируя его по x от 0 до L, находим выражение для амплитуды деформации $\varepsilon_3=K_{3p-1}V_3=3K_pV_3$ колебаний на частоте 3Ω при резонансном возбуждении на основной частоте

$$\varepsilon_3=\frac{8\sqrt{a_3^2+b_3^2}\left(1-\frac{15\pi}{32}\gamma_0g\varepsilon_m\right)\varepsilon_m^2\Omega_p}{5\pi\left[(3\Omega_p/Q_{3p-1})^2+4[3(1-q)\delta_{nl}(\varepsilon_m)+\Delta\Omega_{3p-1}]^2\right]^{1/2}}, \tag{27}$$

где

$$q=\frac{36a_0}{35\pi a_1}\left[1+\gamma_0\varepsilon_m\left(\frac{c_1}{a_1}-\frac{35\pi}{144}\,\frac{c_0}{a_0}\right)\right],$$

$$g=\frac{a_3c_3+b_3d_3}{a_3^2+b_3^2},\quad \Delta\Omega_{3p-1}=3\Omega_p-\Omega_{3p-1}$$

— дисперсионная расстройка частоты $3\Omega_p$ от соответствующего резонанса Ω_{3p-1}, связанная с линейной дисперсией волн в стержне и отличием граничных условий резонатора от идеальных.

В этом режиме вначале, когда $\gamma_0\varepsilon_m\lll 1$, имеют место следующие зависимости: $\delta_{nl}(\varepsilon_m)$, $\mu_{nl}(\varepsilon_m)\propto\varepsilon_m$, $V_2(L)$, $\varepsilon_3\propto\varepsilon_m^2$, а затем при увеличении ε_m должны наблюдаться отклонения от них, в частности, для $\delta_{nl}(\varepsilon_m)$ (при $c_1/a_1>0$) и $\mu_{nl}(\varepsilon_m)$ — в сторону насыщения. Здесь в резонаторе нелинейная дисперсия гистерезисного материала [1] проявляется в нелинейной расстройке $\Delta\Omega_{3p,nl}(\varepsilon_m)=3(1-q)\delta_{nl}(\varepsilon_m)$ частоты третьей гармоники от соответствующего линейного резонанса.

Сильноамплитудный режим ($\gamma_0\varepsilon_m\gg 1$)

В сильноамплитудном режиме, когда на большей части резонатора и на большей части периода волны для деформации $\varepsilon(x,t)$ выполняется условие $\gamma_0|\varepsilon|\gg 1$ и $\frac{1}{1+\gamma_0|\varepsilon|}\cong\frac{1}{\gamma_0|\varepsilon|}$, гистерезисная функция (2) имеет вид

$$f(\varepsilon,\operatorname{sign}\varepsilon)=\frac{1}{2\gamma_0}$$

$$\times\begin{cases}\gamma_1\varepsilon, & \varepsilon>0,\dot\varepsilon>0,\\ -\gamma_2\varepsilon+(\gamma_1+\gamma_2)e_m, & \varepsilon>0,\dot\varepsilon<0,\\ \gamma_3\varepsilon, & \varepsilon<0,\dot\varepsilon<0,\\ -\gamma_4\varepsilon-(\gamma_3+\gamma_4)e_m, & \varepsilon<0,\dot\varepsilon>0.\end{cases} \tag{28}$$

В этом случае задача о нелинейных колебаниях резонатора решается так же, как и в малоамплитудном режиме: резонансная кривая резонатора и максимальная амплитуда ε_m деформации определяются теми же уравнениями (16) и (18), а характеристики колебаний — следующими выражениями:

$$\delta_{nl}(\varepsilon_m) = -a_1\Omega_p = \text{const}, \quad \mu_{nl}(\varepsilon_m) = b_1\Omega_p^{-1} = \text{const}, \tag{29}$$

$$V_2(x) = \frac{2(a_2^2+b_2^2)^{1/2}\varepsilon_m L}{3\pi(2p-1)}\left(\text{sign}(\cos K_p x)\sin K_p x - 2\left[\frac{1}{2}+\frac{K_p x}{\pi}\right]\cos 2K_p x\right), \tag{30}$$

$$V_2(L) = \frac{2(a_2^2+b_2^2)^{1/2}\varepsilon_m L}{3\pi}, \quad \text{tg}\,\varphi_2 = \frac{a_2}{b_2}, \quad \varepsilon_3 = 0, \tag{31}$$

где

$$a_1 = \frac{1}{4\pi\gamma_0}\left(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4+\frac{\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4}{4}\right),$$

$$b_1 = \frac{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4}{4\pi\gamma_0},$$

$$a_2 = \frac{\gamma_1-\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4}{6\pi\gamma_0},$$

$$b_2 = \frac{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4}{6\pi\gamma_0}.$$

(В выражении (30) квадратные скобки также означают целую часть числа $\frac{1}{2}+\frac{K_p x}{\pi}$.)

Отметим, что в сильно-амплитудном режиме имеют место следующие зависимости: $\delta_{nl}(\varepsilon_m) = \text{const}$, $\mu_{nl}(\varepsilon_m) = \text{const}$, $V_2(L) \propto \varepsilon_m$, а $\varepsilon_3 = 0$. Все они связаны с насыщением гистерезисной нелинейности: $f(\varepsilon, \text{sign}\,\dot{\varepsilon}) \propto (\gamma_{1-4}/\gamma_0)\varepsilon$. В этом режиме нелинейная дисперсия приводит к тому, что вынуждающая сила для колебаний $V^{(3)}(x,t)$ в резонаторе с жесткой и мягкой границами пропорциональна $\cos 3K_p x$, а собственной функцией такого резонатора является $\sin K_{3p-1}x = \sin 3K_p x$, т.е. для колебаний $V^{(3)}(x,t)$ правая часть уравнения (11) ортогональна собственной функции этого уравнения, поэтому $\varepsilon_3 = 0$.

Нелинейные эффекты АЗВТ в резонаторе из отожженной меди

Эффекты гистерезисной нелинейности наблюдаются во многих поликристаллических материалах: металлах, сплавах, горных породах, причем часто в разных материалах они проявляются по-разному. В некоторых металлах, например в отожженной меди, даже в области не очень больших деформаций ($\varepsilon_m < 10^{-5}$) имеет место насыщение гистерезисных потерь. Здесь приведены результаты экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов АЗВТ в резонаторе из отожженной поликристаллической меди. Эксперимент проводился со стержневым резонатором с жесткой и мягкой границами. Длина стержня L составляла 30 cm, его диаметр — 8 mm.

Температура отжига стержня — 800°C, время отжига около 4 h. Резонансные частоты $F_p = \Omega_p/2\pi$ и добротности Ω_p первой и второй продольных мод резонатора составляли: $F_1 \approx 3210$ Hz, $Q_1 \approx 210$ и $F_2 \approx 9435$ Hz, $Q_2 \approx 165$. Резонансная частота $F_1 \approx 3210$ Hz соответствуют тому, что скорость C_0 низкочастотной продольной волны в стержне равна $3.8 \cdot 10^5$ cm/s. Измерения нелинейных эффектов проводились при возбуждении резонатора на его первой моде ($p = 1$). На рис. 1 показан график зависимости амплитуды деформации ε_m стержня (в резонансе) от амплитуды u_0 электрического напряжения на пьезокерамическом излучателе (u_0 в дБ относительно 1 μV, $u_0 \propto A_0$). Из рис. 1 следует, что при малых деформациях ($\varepsilon_m \le 2 \cdot 10^{-7}$) имеет место линейная зависимость ε_m от u_0 (т.е. $\varepsilon_m \propto u_0$), затем при $2 \cdot 10^{-7} < \varepsilon_m \le 2 \cdot 10^{-6}$ зависимость $\varepsilon_m = \varepsilon_m(u_0)$ становится нелинейной, а при $\varepsilon_m > 2 \cdot 10^{-6}$ опять наблюдается линейная зависимость $\varepsilon_m \propto u_0$. Такое поведение ε_m от u_0 свидетельствует о наличии нелинейных потерь в резонаторе и их насыщении. Из выражения (18) и экспериментальной зависимости $\varepsilon_m = \varepsilon_m(A_0)$ (рис. 1) определим соответствующую ей зависимость $\mu_{nl} = \mu_{nl}(\varepsilon_m)$. Учитывая, что $u_0 \propto A_0$, из выражения (18) получаем формулу для определения нелинейных потерь

$$\frac{\mu_{nl}(\varepsilon_m)}{\mu_p} = \frac{\varepsilon_{m,1}}{\varepsilon_m}\frac{u_0}{u_{0.1}} - 1, \tag{32}$$

где $\varepsilon_{m,1}$ и $u_{0.1}$ — начальные экспериментальные значения амплитуды деформации стержня и амплитуды напряжения на излучателе, когда эффекты АЗВТ пренебрежимо

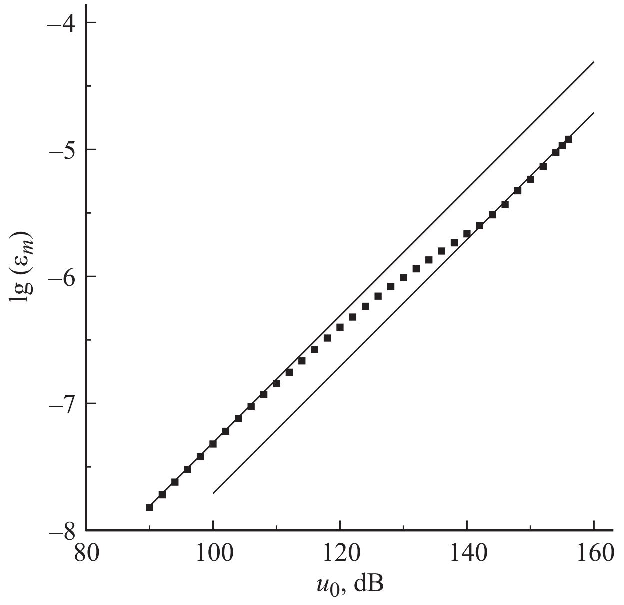

Рис. 1. Зависимость амплитуды ε_m (в резонансе) от амплитуды электрического напряжения u_0 на излучателе (в децибелах относительно 1 μV). Прямые линии соответствуют линейным зависимостям $\varepsilon_m \propto u_0$.

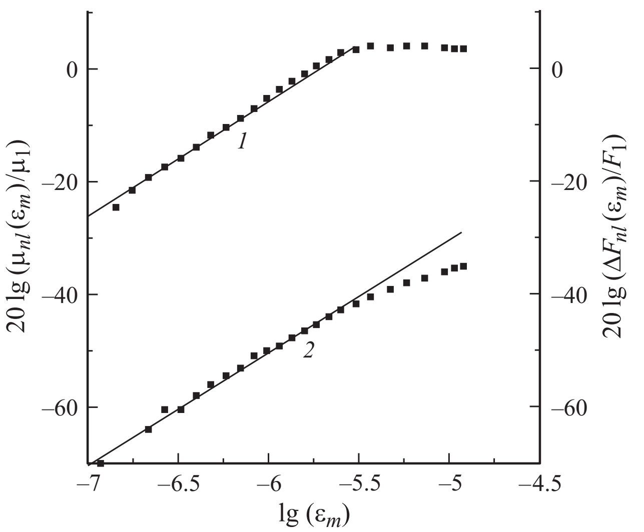

Рис. 2. Зависимости $\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_1$ (*1*) и $|\Delta F_{nl}(\varepsilon_m)|/F_1$ (*2*) от амплитуды ε_m. Прямые линии соответствуют линейным зависимостям $|\Delta F_{nl}(\varepsilon_m)|/F_1$ и $\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_1$ от ε_m.

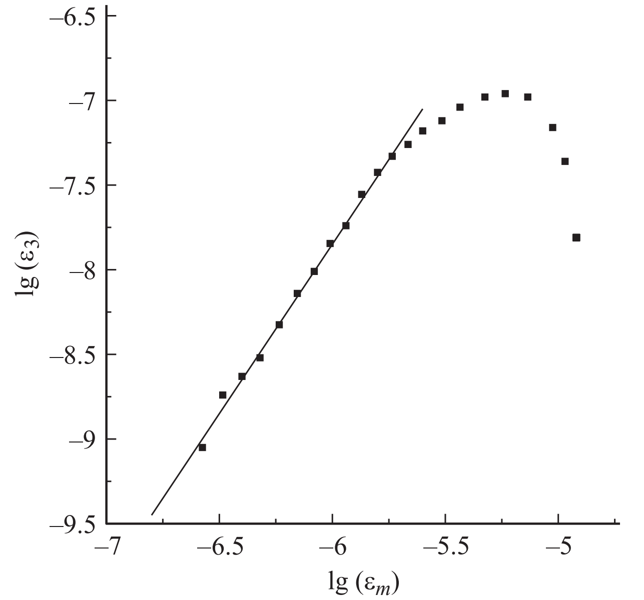

Рис. 3. Зависимость амплитуды третьей гармоники ε_3 от резонансной амплитуды ε_m. Прямая линия соответствует квадратичной зависимости ε_3 от ε_m.

малы и $\varepsilon_m \propto A_0 \propto u_0$, а ε_m и u_0 — текущие значения амплитуды деформации стержня и амплитуды напряжения на излучателе, когда эффекты АЗВТ проявляются вполне заметно, $\varepsilon_m > \varepsilon_{m,1}$, $u_0 > u_{0.1}$. Зависимость $\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_1$ от ε_m приведена на рис. 2. На этом же рисунке приведена зависимость $|\Delta F_{nl}(\varepsilon_m)|/F_1$ от ε_m, где $\Delta F_{nl}(\varepsilon_m) = 2\pi\delta_{nl}(\varepsilon_m) < 0$. Из рис. 2 видно, что вначале (при $\varepsilon_m \le 4 \cdot 10^{-6}$) $\mu_{nl}(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, $\Delta F_{nl}(\varepsilon_m) \propto \varepsilon_m$, а затем (при $\varepsilon_m > 4 \cdot 10^{-6}$) $\mu_{nl}(\varepsilon_m)$ и $\Delta F_{nl}(\varepsilon_m)$ стремятся к насыщению. Это соответствует теоретическим зависимостям (17), (29). При достаточно большой амплитуде $\varepsilon_m > 3 \cdot 10^{-7}$ в резонаторе наблюдалась генерация третьей гармоники. (Уровень второй гармоники из-за ее „нерезонансности“ был мал и недостаточен для надежного измерения.) На рис. 3 приведена зависимость амплитуды третьей гармоники ε_3 от резонансной амплитуды ε_m. Из этого рисунка видно, что зависимость ε_3 от ε_m немонотонна, при этом можно выделить три диапазона по амплитуде ε_m, в которых имеют место следующие зависимости: в первом ($3 \cdot 10^{-7} \le \varepsilon_m \le 4 \cdot 10^{-6}$) — $\varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^2$, во втором ($4 \cdot 10^{-6} \le \varepsilon_m \le 8 \cdot 10^{-6}$) $\varepsilon_3 \approx \mathrm{const}$ и в третьем ($8 \cdot 10^{-6} \le \varepsilon_m \le 10^{-5}$) ε_3 сильно уменьшается. Такое поведение ε_3 качественно соответствует теоретическим зависимостям (27), (31). Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов можно определить значения параметров гистерезисной нелинейности (2). По измеренным нелинейным потерям и сдвигу резонансной частоты в малоамплитудном режиме находим $a_1 \cong 3 \cdot 10^3$, $b_1 \approx 1.2 \cdot 10^3$, $\gamma_1 + \gamma_3 \approx 2.4 \cdot 10^4$, $\gamma_2 + \gamma_4 \cong 8 \cdot 10^4$, $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \cong 3.8 \cdot 10^3$. Значение последнего коэффициента можно независимо определить по амплитуде третьей гармоники из выражения (27), при этом он оказывается равным $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} \approx 3.7 \cdot 10^3$, что достаточно близко к значению $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$, определенному по нелинейным потерям и сдвигу резонансной частоты.

Наконец, определим параметр γ_0, ответственный за насыщение нелинейных потерь. Из выражения (18) следует, что в малоамплитудном (при $\mu_{nl}(\varepsilon_m)/\mu_p \lll 1$) и в сильноамплитудном режимах имеем соответственно следующие линейные зависимости $\varepsilon_{m,1}$ и $\varepsilon_{m,2}$ от A_0:

$$\varepsilon_{m,1} = 2A_0Q_p/L, \quad \varepsilon_{m,2} = \frac{2A_0Q_p/L}{1 + b_1Q_p}. \tag{33}$$

Из этих выражений находим $b_1Q_p = \frac{\varepsilon_{m,1}}{\varepsilon_{m,2}} - 1$. Из рис. 1 видно, что $\varepsilon_{m,1}/\varepsilon_{m,2} = 2.75$ и, следовательно,

$$\gamma_0 = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)Q_1}{4\pi[(\varepsilon_{m,1}/\varepsilon_{m,2}) - 1]} \approx 10^6.$$

Заключение

В настоящей работе проведены теоретические исследования нелинейных акустических эффектов в стержневом резонаторе с гистерезисной нелинейностью при его гармоническом возбуждении. При малых и больших амплитудах возбуждения резонатора (т.е. в режимах до и после насыщения) получены аналитические выражения для нелинейных потерь и сдвига резонансных частот, а также для амплитуд второй и третьей гармоник. Амплитудные зависимости этих эффектов свидетельствуют о сложной и разнообразной динамике нелинейных волновых процессов в резонаторах с гистерезисной нелинейностью. При малых амплитудах возбуждения резонатора нелинейная дисперсия гистерезисного материала приводит к нелинейной расстройке частоты третьей гармоники от соответствующего линейного резонанса, а при больших — нелинейная дисперсия проявляется в том, что вынуждающая сила для колебаний на частоте третьей гармоники становится ортогональной собственной функции резонатора, что в итоге приводит к сильному падению амплитуды колебаний резонатора на этой частоте. В настоящей работе приведены результаты экспериментального исследования гистерезисных эффектов в резонаторе из отожженной поликристаллической меди, согласующиеся с аналитическими результатами (что, впрочем, неудивительно, так как гистерезисное уравнение состояния строилось на основе результатов экспериментов с материалами, в которых наблюдается насыщение нелинейных потерь). Из сравнения теоретических и экспериментальных результатов определены параметры гистерезисной нелинейности отожженной меди. Их значения оказались достаточно высокими, что позволяет надеяться на возможность измерения нелинейных эффектов в резонаторах и из других гистерезисных материалов даже при не очень больших амплитудах акустических волн.

Список литературы

[1] *Назаров В.Е., Кияшко С.Б.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 3. С. 1–7.
[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
[3] *Samsonov A.M.* Strain Solution in Solids and how to construct them. London, NY: Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2001.
[4] *Дрейден Г.В., Порубов А.В., Самсонов А.М., Семенова И.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 5. С. 1–8.