01

# Функция распределения релятивистских зарядов в окрестности циклотронного резонанса

© В.Н. Комаров, А.В. Прозоркевич

Саратовский государственный университет,
410012 Саратов, Россия
e-mail: komarov_vn@mail.ru

(Поступило в Редакцию 4 июля 2013 г.)

Решением релятивистского бесстолкновительного кинетического уравнения получена функция распределения зарядов по проекциям импульсов в заданном поле циркулярно поляризованной высокочастотной поперечной электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного однородного магнитного поля с фазовой скоростью $u > c$. В пределах однозначности резонансной кривой анализируются особенности энергии, связанные в нелинейностью циклотронного резонанса для разных значений фазовой скорости. Приводятся некоторые функции респределения.

## Введение

Полный интеграл релятивистского бесстолкновительного кинетического уравнения был получен в [1]. Применение неоднородного продольного магнитного поля для поддержания релятивистского циклотронного резонанса рассмотрено в [2]. В [3] на основе релятивистского уравнения движения анализируется относительное изменение энергии одиночного заряда в поле циркулярно поляризованной волны, распространяющейся вдоль постоянного однородного магнитного поля с фазовой скоростью, не равной скорости света в вакууме. Гамильтониан релятивистского заряда и его преобразования, взаимодействие полей в частицами приведены в [4]. Особенности релятивистского гамильтониана анализируются в [5]. Кривая нелинейного резонанса с учетом релятивистских эффектов получена в [6].

Задача состоит в нахождении функции распределения релятивистских зарядов в плазме без столкновений в поле циркулярно поляризованной плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль постоянного однородного магнитного поля с фазовой скоростью $u > c$. Предполагается наличие тяжелых частиц с другим знаком электрического заряда в качестве компенсирующего фона, частота поля волны намного превосходит частоту столкновений и больше релятивистской ларморовской частоты. Пренебрегается потерей энергии на излучение и силой радиационного торможения.

## Функция распределения

Предположим, что циркулярно поляризованная электромагнитная волна задана векторным потенциалом

$$\overline{\mathbf{A}}(\xi) = -\frac{cE}{\omega}\left(\bar{\mathbf{i}}\sin\xi - g\bar{\mathbf{j}}\cos\xi\right), \quad \xi = \omega t - kz, \quad g^2 = 1, \tag{1}$$

а постоянное однородное магнитное поле направлено вдоль оси $z$, $\overline{\mathbf{H}} = (0, 0, H)$ и существует всегда. Электромагнитная волна включается адиабатически при $t_0 = -\infty$, так что выполняется условие $\partial E/\partial t \ll E/T$, где $T$ — период изменения поля волны, и в установившемся режиме имеет вид (1). Функция распределения без поля волны должна совпадать с релятивистким максвелловским распределением

$$f_0(p) = Z_0 \exp(-\varepsilon_0/k_{\mathrm{B}}T),$$

$$Z_0 = n[4\pi m^2 c k_{\mathrm{B}} T K_2(mc^2/K_{\mathrm{B}}T)]^{-1}, \tag{2}$$

$\varepsilon_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2 + c^2p_z^2}$ — энергия без поля, $p$ — поперечный импульс. Функция распределения с учетом поля волны определяется бесстолкновительным кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{\mathbf{r}}} + \overline{\mathbf{F}}\,\frac{\partial f}{\partial \overline{\mathbf{p}}} = 0, \tag{3}$$

которое имеет в качестве характеристической систему уравнений Гамильтона

$$\frac{d\overline{\mathbf{r}}}{dt} = \overline{\mathbf{v}}, \quad \frac{d\overline{\mathbf{p}}}{dt} = \overline{\mathbf{F}}. \tag{4}$$

Некоторые интегралы этой системы были найдены в [6] при условии постоянства амплитуды волны:

$$\Psi_3 = \varepsilon - up_z,$$

$$2Ap\sin\theta = g(p^2 - p_0^2) + \frac{2eH}{k(u^2-c^2)}\left(\sqrt{\Psi_3^2 + (u^2-c^2)(m^2c^2+p^2)} - \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2-c^2)(m^2c^2+p_0^2)}\right) + 2C, \tag{5}$$

$$t = \frac{2u^2}{\omega(u^2-c^2)}\left[\int\limits_{X_0}^{X} \frac{X\,dX}{\sqrt{f_4(X)}} - \Psi_3\,\frac{c}{u}\int\limits_{X_0}^{X} \frac{dX}{\sqrt{f_4(X)}}\right] + I_i,$$

$X = \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)}$, $\theta = g\xi - \varphi$, $A = \frac{eE}{\omega}$, $p_0$ — начальное значение поперечного импульса, $f_4(X)$ — многочлен четвертой степени [6].

Любая дифференцирующая функция от интегралов будет точным решением уравнения (3). Задание начального распределения устраняет этот произвол. Решение задачи Коши будет единственным, если коэффициенты уравнения непрерывны вместе со своими частными производными по $p_i$ [7]. Выразим продольный импульс из $\Psi_3$:

$$p_z = \frac{1}{u^2 - c^2} \times \left[ -u\Psi_3 + \sqrt{c^2\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^4 + c^2p^2)} \right]. \quad (6)$$

Знак $+$ перед корнем выбирается в соответствии с конечным пределом при $u \to c$. Зная поперечный начальный импульс $p_0$ и продолный $p_z$, можно составить релятивистскую энергию

$$\varepsilon = \frac{ucX - \Psi_3 c^2}{u^2 - c^2}. \quad (7)$$

Полученная функция от интегралов называется полным интегралом уравнения в частных производных первого порядка [7]. Появление постоянного продольного магнитного поля не меняет вид интеграла $\Psi_3$.

Далее нужно заменить интегралы их выражением при произвольном значении независимой переменной. В [1] полный интеграл уравнения представлен как функция распределения по интегралам движения. Кинетическое уравнение в качестве переменных содержит проекции импульсов, и функция распределения должна зависеть от них [8]. То, что полный интеграл кинетического уравнения зависит от двух констант, а не от трех, отражает аксиальную симметрию задачи.

Поперечный импульс легко выразить из второго интеграла системы (5). Уточним значение константы $2C$. Известен интегнал $\overline{\mathbf{p}} + e\overline{\mathbf{A}}/c = \mathrm{const}$, поэтому $\overline{\mathbf{p}}^2 + 2e\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}}/c + (e\overline{\mathbf{A}}/c)^2 = \overline{\mathbf{p}}_0^2$. Если $H = 0$, то из (5) $2Ap\sin\theta = g(p^2 - p_0^2) + 2C$. Сравнивая последние равенства, получим $2C = g(e\overline{\mathbf{A}}/c)^2$. Здесь учтено, что

$$2Apg\sin\theta = -2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}(\xi)\overline{\mathbf{p}}. \quad (8)$$

Перепишем интеграл $2C$ из (5) в других обозначениях

$$2Apg\sin\theta = -2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}} = \frac{X^2 - X_0^2}{u^2 - c^2} + \frac{2eHg}{k(u^2 - c^2)}(X - X_0) + \left(\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\right)^2, \quad (9)$$

где $X_0 = X(p = p_0)$. Отсюда следует

$$X_0 = -\frac{eHg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{eHg}{k} + X\right)^2 + (u^2 - c^2)\left[2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}} + \left(\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\right)^2\right]}. \quad (10)$$

Если $A = 0$, то $X = X_0$, что соответствует знаку $+$ перед корнем. Подставляя начальные значения $X_0$ и $\Psi_3$ в (7), получим энегию в произвольный момент времени

$$\varepsilon_{\mathrm{AH}} = \frac{1}{u^2 - c^2}\left\{c^2(up_z - \varepsilon) + uc\left(-\frac{eHg}{k} + \sqrt{\left(\frac{eHg}{k} + \frac{u}{c}\varepsilon - cp_z\right)^2 + (u^2 - c^2)\left[2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}} + \left(\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\right)^2\right]}\right)\right\}, \quad (11)$$

где учтено, что $X = u\varepsilon/c - cp_z$. Если $A = 0$, то $\varepsilon_{\mathrm{AH}} = \varepsilon$; если $H = 0$, то получим известный результат [9].

В слабом поле волны возможно разложение под корнем, тогда приближенно можно записать

$$\varepsilon_{\mathrm{AH}} = \varepsilon + \frac{uc}{2}\frac{2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}}}{\frac{eHg}{k} + \frac{u}{c}\varepsilon - cp_z}. \quad (12)$$

Отметим, что

$$\frac{eHg}{k} + \frac{u}{c}\varepsilon - cp_z = \frac{\varepsilon}{kc}\left(\frac{eHc}{\varepsilon}g + \omega - kv_z\right), \quad (13)$$

и приближение (12) справедливо вдали от резонанса. При $u \to c$ после раскрытия неопределенности в (11) получим точную формулу

$$\varepsilon_{\mathrm{AH}} = \varepsilon + \frac{c^2}{2}\frac{2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{c^2}\overline{\mathbf{A}}^2}{\frac{eHg}{k} + \varepsilon - cp_z}. \quad (14)$$

Здесь амплитуда волны не ограничена, как в (12). В знаменателе появляется инвариант $\Psi_3$, условия линейного резонанса сохраняются длительное время.

На рис. 1 показана зависимость энергии $\varepsilon_{\mathrm{AH}}$ (11) от модуля поперечного импульса $p$ при разных значениях напряженности постоянного магнитного поля. Амплитуда $eE/\omega = 10^{-16}$ g cm/s, $p_z = 0$, $\varepsilon \approx mc^2$, $m$ — масса покоя электрона, значение фазы $\theta = 1.5$, фазовая скорость волны $u = 1.5c$, для квадратов $eH/k = -7 \cdot 10^{-6}$ erg, для кругов — в 2 раза меньше, для треугольников в 4 раза меньше, чем для квадратов.

На рис. 2 фазовая скорость волны $u = 1.1c$, остальные данные прежние. Амплитудная характеристика нелинейного циклотронного резонанса имеет вид [6]

$$A^2 = \left[g + \frac{eHu}{\omega\sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)}}\right]^2 p^2, \quad A = \frac{eE}{\omega}, \quad (15)$$

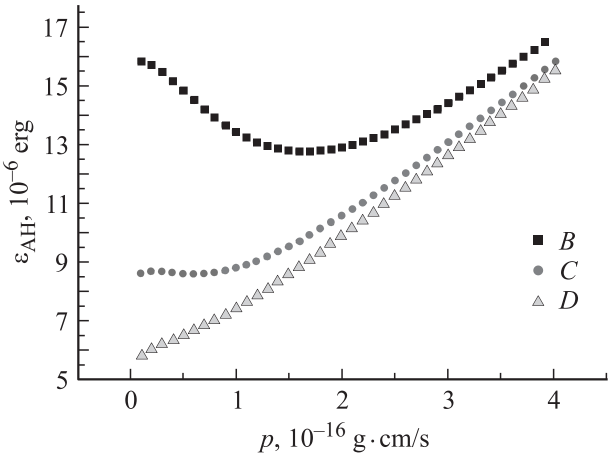


**Рис. 1.** Зависимость энергии заряда от поперечного импульса при $u = 1.5c$.

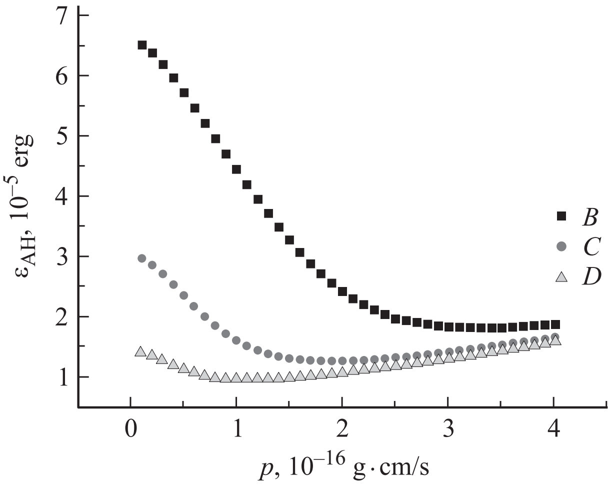


**Рис. 2.** Зависимость энергии заряда от поперечного импульса при $u = 1.1c$.

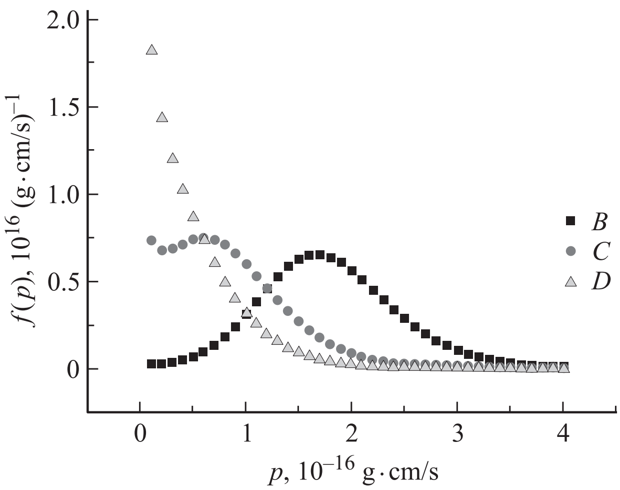


**Рис. 3.** Функции распределения.

и циклотронная частота зависит от величины поперечного импульса. Разность $u^2 - c^2$ определяет долю нелинейности в циклотронной частоте. Из сопоставления рис. 1 и 2 видно, как увеличение нелинейности ограничивает энергию.

На рис. 3 показана нормированная функция распределения, соответствующая энергии рис. 1. Значение температуры выбиралось из условия $k_{\mathrm{B}}T = mc^2$.

## Плотности токов

Функция распределения $f(p_x, p_y, p_z, \xi)$ позволяет вычислить плотности токов. Она сложно зависит от импульсов, и ее упрощение возможно для слабого поля волны и далеко от резонанса. После разложения до второго порядка

$$\varepsilon_{\mathrm{AH}} \approx \varepsilon + \frac{uc}{2}\,\frac{2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{c^2}\overline{\mathbf{A}}^2}{\frac{eHg}{k} + \frac{u}{c}\,\varepsilon - c\,p_z} - \frac{uc}{8}\,\frac{(u^2-c^2)\left(2\frac{e}{c}\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}}\right)^2}{\left(\frac{eHg}{k} + \frac{u}{c}\,\varepsilon - c\,p_z\right)^3}. \tag{16}$$

Нормировочную константу также разложим до второго порядка

$$\frac{1}{Z} \approx \frac{1}{Z_0}\left(1 - \frac{Z_1}{Z_0} - \frac{Z_2}{Z_0} + \frac{Z_1^2}{Z_0^2}\right).$$

В первом порядке нормировочной константы $Z^{-1}$ после интегрирования нечетной функции по $p_x$ и $p_y$, получим $Z_1 = 0$. Разложение функции распределения до второго порядка имеет вид

$$f \approx \frac{\exp(-\frac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}T})}{Z_0}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{k_{\mathrm{B}}T} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^2 - \frac{\varepsilon_2}{k_{\mathrm{B}}T} - \frac{Z_2}{Z_0}\right),$$

$\varepsilon_i$ — соответствующий порядок поправки энергии. Плотность поперечного тока

$$j_y = en\langle v_y\rangle = enc^2 \int \frac{p_y}{\varepsilon}\,\frac{\exp(-\frac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}T})}{Z_0}\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{k_{\mathrm{B}}T}\right) d\overline{\mathbf{p}}.$$

Под интегралом в первом слагаемом стоит нечетная по $p_y$ функция, и он равен нулю.

Для интегрирования оставшегося слагаемого проще перейти в сферическую систему координат с осью $z$ вдоль волнового вектора. Интегрирование по углу $\varphi$ проводится точно. Интегрирование по углу $\theta$ также проводится точно и приводит к двум слагаемым, одно из которых содержит $\ln(a+1)/(a-1)$, где

$$a = \frac{1}{cr}\left(\frac{eHg}{k} + \frac{u}{c}\sqrt{m^2c^4 + c^2r^2}\right), \quad a > 1.$$

Проводя разложение $\ln(a+1)/(a-1)$ в ряд, получим приближенно

$$\int \frac{\exp\left(-\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\sqrt{m^2c^4+c^2r^2}\right) r^4 dr}{\sqrt{m^2c^4+c^2r^2}^2\left[\frac{eHg}{k\sqrt{m^2c^4+c^2r^2}} + \frac{u}{c}\right]}.$$

При слабом релятивизме циклотронная частота может быть разложена в ряд

$$\frac{eHg}{k\sqrt{m^2c^4+c^2r^2}}+\frac{u}{c}\approx\frac{1}{kc}\left[\omega+\frac{eHg}{mc}-\frac{eHgr^2}{2m^3c^3}\right].$$

Первые два слагаемых в скобке показывают разность частот $\omega-\omega_{\mathrm{H}}$ при $e<0$, третье слагаемое учитывает изменение релятивистской циклотронной частоты при изменении импульса. Если эти изменения малы ($r^2<m^2c^2$), и вдали от резонанса существует малый параметр $\Delta\omega_{\mathrm{H}}(p)/(\omega-\omega_{\mathrm{H}})$.

Проведем по нему разложение, переходя к новой переменной $q=\sqrt{m^2c^4+c^2r^2}$. Полученные интегралы будут содержать в знаменателях первую степень $q$. Их можно упростить, если провести дифференцирование по параметру $y=-1/k_{\mathrm{B}}T$. Тогда для первого интеграла получим

$$\frac{d}{dy}\,\frac{I}{3m^3c^6}=-\frac{K_2(y)}{y^2}.$$

Для функций Макдональда выполняется тождество

$$(d/dx)\big(x^{-n}K_n(x)\big)=-x^{-n}K_{n+1}(z),$$

поэтому

$$yd(I/3m^3c^6)=-K_2(y)/y=d(K_1/y).$$

Интегрируя последнее равенство с учетом того, что $K_1(y)$ содержит $\exp(y)$ и меняется быстрее $y^1$, получим

$$I\approx 3mc^2(k_{\mathrm{B}}T)^2K_1(mc^2/k_{\mathrm{B}}T).$$

Другой интеграл с множителем $H$ вычисляется подобно первому и составляет $15m^2c^4(k_{\mathrm{B}}T)^3K_2(mc^2/k_{\mathrm{B}}T)$. В итоге плотность поперечного тока

$$j_y\approx en\langle v_y\rangle=-\frac{3}{2}\,\frac{e^2nE\cos\xi}{m\left(\omega+\frac{eHg}{mc}\right)K_2\left(\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)}$$
$$\times\left[K_1\left(\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)+\frac{5}{2}\,\frac{eHg}{\omega+\frac{eHg}{mc}}\,\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m^2c^3}K_2\left(\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\right].\quad(17)$$

Поправка на нелинейность резонанса пропорциональна $k_{\mathrm{B}}T/mc^2$ и для электрона при доступных температурах мала.

Плотность продольного тока

$$j_z=en\langle v_z\rangle$$
$$=c^2\int\frac{p_z}{\varepsilon}\,\frac{\exp(-\frac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}T})}{Z_0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1}{k_{\mathrm{B}}T}\right)^2-\frac{\varepsilon_2}{k_{\mathrm{B}}T}-\frac{Z_2}{Z_0}\right]d\overline{\mathbf{p}}.\quad(18)$$

Слагаемые первого порядка содержат нечетные функции по $p_x$ и $p_y$ и при интегрировании обращаются в нуль. Поле волны и постоянное магнитное поле должны быть слабыми, чтобы не приводить к рождению частиц $eA/c\ll mc$, $eH/k\ll mc^2$. При достижимых температурах энергия теплового движения мала $k_{\mathrm{B}}T\ll mc^2$. Эти условия позволяют провести оценку вклада слагаемых в $j_z$. Первое слагаемое с полем из разложения (18) равно

$$\frac{1}{(k_{\mathrm{B}}T)^2}\,\frac{\left(\frac{e}{c}\,\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}}\right)^2}{\varepsilon^2}\approx\frac{p^2}{m^2c^4},$$

второе и третье слагаемые соответственно

$$\frac{\left(\frac{e}{c}\,\overline{\mathbf{A}}\right)^2}{k_{\mathrm{B}}T\varepsilon}\approx\frac{p}{mc^2},\quad\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}\,\frac{\left(\frac{e}{c}\,\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}}\right)^2}{\varepsilon^3}\approx\frac{p^3}{\varepsilon^3}.$$

Последнее слагаемое из (18) имеет вид

$$\frac{Z_2}{Z_0}\approx\int\frac{\exp(-\frac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}T})}{Z_0}\,\frac{1}{2(k_{\mathrm{B}}T)^2}\,\frac{\left(\frac{e}{c}\,\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}}\right)^2}{\varepsilon^2}\,d\overline{\mathbf{p}}$$
$$\approx\frac{1}{mc^2}\left(\frac{e}{c}\,\overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{p}}\right)^2.$$

Основной вклад вносит второе слагаемое. Интеграл

$$\int\frac{p_z}{\varepsilon}\,\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\,\frac{\left(\frac{e}{c}A\right)^2}{\frac{eHg}{k}+\frac{u}{c}\,\varepsilon-cp_z}\,d\overline{\mathbf{p}}$$

подсчитывается в описанной последовательности и дает плотность продольного тока

$$j_z\approx\frac{enue^2E^2}{2m^2c^2\omega^2K_2\left(\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\left(\frac{u}{c}+\frac{eHg}{kmc^2}\right)^2}$$
$$\times\left[K_0\left(\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)+\frac{5}{\frac{u}{c}+\frac{eHg}{kmc^2}}\,\frac{eHg}{k}\,\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m^2c^4}K_2\left(\frac{mc^2}{k_{\mathrm{B}}T}\right)\right].\quad(19)$$

Если магнитного поля нет, то плотности токов переходят в ранее полученные в [9] с точностью до численных множителей.

## Заключение

Получена функция распределения релятивистских зарядов в заданном высокочастотном поле циркулярно поляризованной поперечной электромагнитной волны, распространяющейся вдоль однородного постоянного магнитного поля с фазовой скоростью $u>c$. Увеличение плотности газа приводит к большему отклонению фазовой скорости волны от скорости света в вакууме. Возрастает нелинейность в релятивистской циклотронной частоте. Плотный газ заряженных частиц труднее нагреть из-за расстроечного механизма ограничения амплитуды колебаний. В плотности тока поправка на нелинейность релятивистской циклотронной частоты содержит параметр $k_{\mathrm{B}}T\ll mc^2$, который для электрона при температуре $T\approx10^6\,\mathrm{K}$ имеет значение $1.7\cdot10^{-4}$ и дает малый вклад в плотность тока при достижимых температурах.

В циркулярно поляризованной волне напряженности электрического и магнитного полей свою величину не меняют, и плотность электромагнитной энергии постоянна вдоль волнового вектора, постоянна и концентрация зарядов. Поэтому плотность продольного тока не содержит переменной составляющей. Фазовая скорость волны постоянна, как и предполагалось, при формулировке задачи. Чтобы не учитывать квантовых эффектов, работа электрического поля на комптоновской длине волны должна быть намного меньше энергии покоя заряда $eEh \ll m^2c^3$. Частота волны ограничивается условием отсутствия рождения частиц $h\omega \ll mc^2$.

## Список литературы


[1] *Давыдовский В.Я., Сапогин В.Г.* // Физика плазмы. 1975. Т. 5. Вып. 2. С. 446–448.

[2] *Андреев Ю.А., Давыдовский В.Я., Даниленко В.Н.* // ЖТФ. 1978. Т. 48. Вып. 10. С. 2184–2188.

[3] *Roberts C.S., Buchbaum S.J.* // Phys. Rev. 1964. Vol. 135. N 2A. P. 381–389.

[4] *Cohen B.I., Cohen R.H., Mc Cay Nevins W., Rognlien T.D.* // Rev. Mod. Phys. 1991. Vol. 63. N 4. P. 949–990.

[5] *Litvak A.G., Sergeev A.M., Suvorove E.V., Tokman M.D., Khazanov I.V.* // Phys. Fluids B. Vol. 5. N 12. P. 4347–4345.

[6] *Комаров В.Н.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 6. С. 75–79.

[7] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 3. М.: Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит. 1981. 550 с.

[8] *Комаров В.Н., Смолянский С.А.* // Теоретическая и математическая физика. 1987. Т. 72. № 2. С. 296–305.

[9] *Амиров Р.Х., Комаров В.Н., Прозоркевич А.В., Смолянский С.А.* Вопросы теоретической и ядерной физики. 1987. Изд. СГУ, Саратов, С. 32–39.