

01

Пиннинг линейных вихрей и возможные расстояния между ними в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде с отличным от нуля структурным фактором

© М.А. Зеликман, К.А. Поцелуев

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: marzelik@mail.ru

(Поступило в Редакцию 11 февраля 2013 г.)

На базе условий квантования флюксоида получена система уравнений, описывающая токовую конфигурацию двух взаимодействующих линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде во всем возможном диапазоне значений структурного фактора b . Оси рассматриваемых вихрей располагаются в среднем ряду бесконечной полосы шириной 13 ячеек. Предложена методика решения этой системы, позволяющая точно рассчитывать токовые конфигурации. Рассчитаны критические значения параметра пиннинга I_d , при которых два линейных вихря еще могут удерживаться на расстоянии d ячеек между их центрами, во всем возможном диапазоне значений параметра b . Получена формула, описывающая зависимость $I_d(b)$ при различных значениях d . Исследованы зависимости максимальной силы пиннинга F от параметра I при различных значениях b . Показано, что при одном и том же значении I большим значениям b соответствуют большие максимальные силы пиннинга.

Введение

Одной из важнейших проблем в физике сверхпроводников является анализ структуры, движения и пиннинга вихрей, возникающих в образце при внесении его во внешнее магнитное поле. Для обычных сверхпроводников теория вихрей, базирующаяся на уравнениях Гинзбурга—Ландау, построена еще до создания теории БКШ [1–3]. В керамических ВТСП теоретическое описание вихрей сталкивается с некоторыми трудностями, которые вызваны гранулированностью образца. В первую очередь эти трудности связаны с ячеистой структурой среды, когда между соприкасающимися сверхпроводящими гранулами находятся диэлектрические области. В местах соприкосновения гранул друг с другом образуются джозефсоновские контакты, количество которых так велико, что такие среды иногда называют джозефсоновскими. Все эти джозефсоновские контакты являются нелинейными элементами, что сильно усложняет анализ таких сред. Токовые состояния, как экранирующие, так и вихревые, отличаются по своей структуре от существующих в обычных сверхпроводниках. Уравнения Гинзбурга—Ландау неприменимы в этой ситуации, и нужно искать другую основу для математического описания гранулированных сверхпроводников.

В [4] предложена модель гранулированного ВТСП, в которой в качестве математической основы описания используется система уравнений квантования флюксоида в ячейках [5]. Эта модель представляет собой кубическую решетку с периодом h , состоящую из сверхпроводящих проводов радиусом δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт. Как показали расчеты, такой модели, которую принято называть трехмер-

ной упорядоченной джозефсоновской средой, присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейсснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. При этом математическое описание, основанное на уравнениях квантования флюксоида в ячейках, позволяет исследовать все детали токовых конфигураций. Поэтому использование этого подхода целесообразно при анализе процессов, происходящих в реальных ВТСП.

Система уравнений, выведенных в [4], содержит два безразмерных параметра I и b , смысл которых будет понятен из дальнейшего изложения. В [6] на базе предложенного в [4] подхода были исследованы мейсснеровские токовые конфигурации во всем диапазоне возможных значений параметров I и b , а в [7] — возможные структуры и энергии уединенного линейного вихря. Важную информацию о пиннинге вихрей можно получить, анализируя возможные расстояния между двумя уединенными вихрями. При уменьшении сил пиннинга и увеличении сил отталкивания между вихрями минимально возможное расстояние между их центрами увеличивается. В [8] рассчитаны критические значения параметра пиннинга I_d , при которых два вихря еще могут удерживаться на расстоянии d ячеек между их центрами, но рассмотрение проводилось только для случая $b = 0$. Целью настоящей работы является нахождение зависимости критических значений I_d от b во всем возможном диапазоне значений параметра b .

Методика расчета и основные уравнения

Рассмотрение будем, как и в [8], проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом h , состоящую из сверхпроводящих проводов радиусом δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока J_C . Токковые распределения имеют плоскую структуру, т.е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных оси вихря и расположенных на расстоянии h друг от друга, токи распределены идентично.

Рассмотрим два параллельных линейных вихря, оси которых проходят посередине бесконечной в двух направлениях плоской пластины толщиной $(2N - 1)$ ячеек и находятся на расстоянии d ячеек друг от друга. Сечение этой картины плоскостью, перпендикулярной осям вихрей, будет представлять собой бесконечную полосу шириной $(2N - 1)$ ячеек, в среднем ряду которой находятся центры двух рассматриваемых вихрей. На рис. 1 изображен один квадрант такой конфигурации для полосы шириной 13 ячеек ($N = 7$). Точкой обозначена центральная ячейка одного из двух вихрей. Центр второго вихря расположен внизу (вне рис. 1) симметрично или центральной линии нижнего ряда ячеек, или нижней токовой линии. В первом случае расстояние d между центрами вихрей равно четному числу ячеек ($2M$), во втором случае — нечетному ($2M + 1$). Отметим, что это означает, что между центральными ячейками вихрей находится соответственно $(2M - 1)$ и $2M$ ячеек.

В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида:

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 2\pi K_m, \quad (1)$$

где $\sum_k \varphi_k^{(m)}$ — сумма скачков фазы на джозефсоновских контактах m -й ячейки, Φ_m — полный магнитный поток через m -ю ячейку, Φ_0 — квант магнитного потока, K_m — целое число, равное 1 для центральной ячейки вихря и нулю для всех остальных. Величины джозефсоновских токов $J_k = J_C \sin \varphi_k$ по мере удаления от центров вихрей убывают, причем скорость убывания возрастает с ростом величины критического тока J_C . В результате расчета мы увидим, что можно считать малыми (так что $\sin \varphi_k \approx \varphi_k$) скачки фаз на всех контактах, кроме самых больших по величине скачков фазы $\varphi_1 - \varphi_7$. Далее будем считать условие малости выполненным, если $\varphi_k < 0.5$. Участки, на которых скачки фаз не считаются малыми, на рис. 1 выделены толстыми линиями.

Чтобы избежать выписывания условий баланса токов в узлах, удобно воспользоваться методом „контурных токов“ ячеек. Пусть в каждой ячейке протекает контурный ток против часовой стрелки, равный произведению J_C на соответствующий „контурный“ скачок фазы.

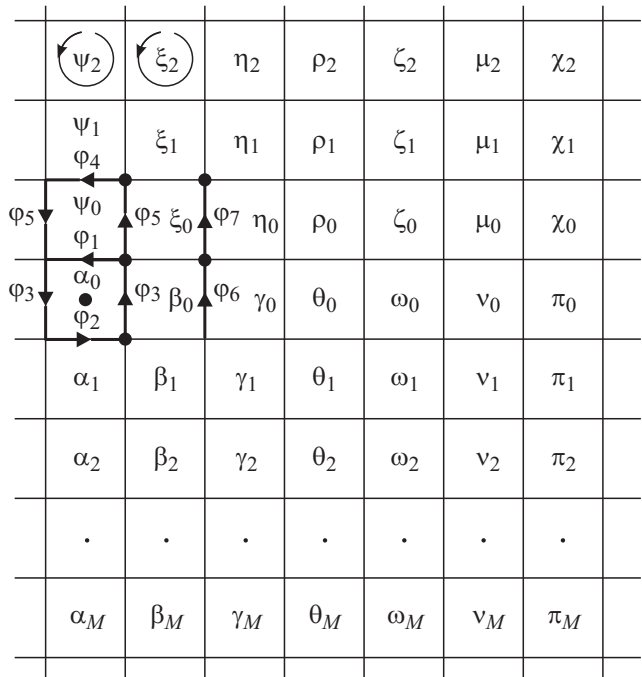


Рис. 1. Распределение скачков фазы для двух вихрей в бесконечной полосе шириной 13 ячеек в плоскости, перпендикулярной осям вихрей. В центре каждой ячейки указан ее „контурный“ скачок фазы. Все контурные токи направлены против часовой стрелки. Картина симметрично продолжается влево и вниз.

На рис. 1 указаны обозначения „контурных“ скачков фазы в каждой ячейке. Тогда значения скачков фазы φ_k на контактах (кроме $\varphi_1 - \varphi_7$) определяются как разности соответствующих „контурных“ значений.

Магнитный поток через m -ю ячейку можно записать в виде [1]

$$\Phi_m = \mu_0 S/h \left(i_m + b \sum_k J_k^m \right), \quad (2)$$

где b — коэффициент неоднородности поля из-за дискретности токового распределения вдоль оси вихря, S — площадь ячейки, i_m — контурный ток, $\sum_k J_k^m$ — алгебраическая сумма токов в контактах m -й ячейки. Далее будем считать, что структурный фактор, как и в [7], определяется выражением

$$b = \frac{1}{2\pi(1 - 2\delta/h)} \ln \frac{1 - \exp(-2\pi(1 - \delta/h))}{1 - \exp(-2\pi\delta/h)}.$$

На рис. 2,а приведен график зависимости параметра b от δ/h , из которого можно видеть, что практически значимые величины структурного фактора b , соответствующие $0.01 \leq \delta/h \leq 0.5$, находятся в диапазоне от 0.454 до 0.049.

Подставляя (2) в (1), для всех ячеек с индексами контурных токов, больше или равными 1, выше центральной ряда вихря, получим следующую систему

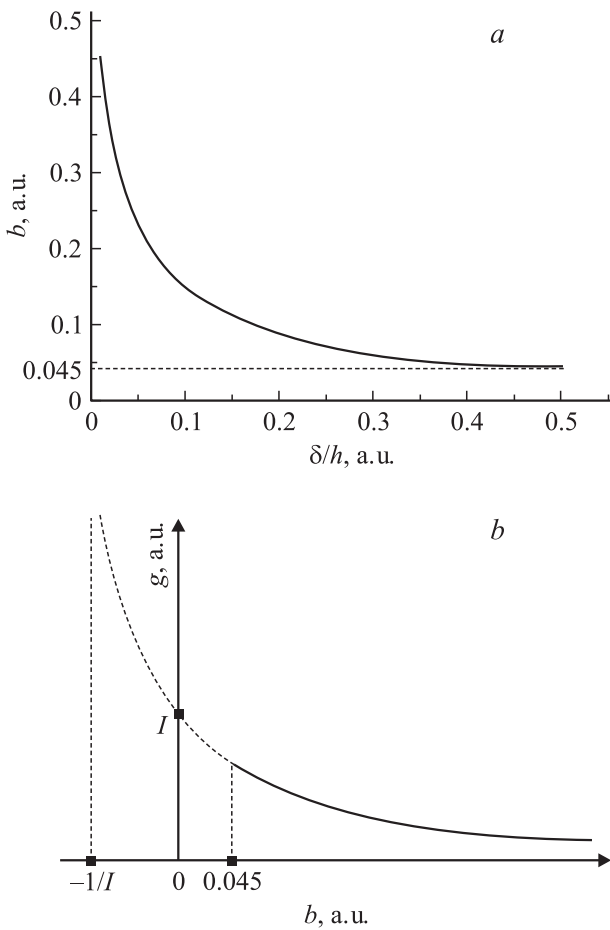


Рис. 2. *a* — зависимость параметра b от величины δ/h ; *b* — зависимость параметра g от величины b .

уравнений (для $k \geq 1$):

$$\begin{aligned} (4 + g)\psi_k - \psi_{k+1} - \psi_{k-1} - 2\xi_k &= 0 \\ (4 + g)\xi_k - \xi_{k+1} - \xi_{k-1} - \psi_k - \eta_k &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ (4 + g)\chi_k - \chi_{k+1} - \chi_{k-1} - \mu_k &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $g = I/(Ib + 1)$, а параметр пиннинга I , как и ранее, определяется выражением

$$I = 2\pi\mu_0(h - 2\delta)^2 J_C / h\Phi_0. \quad (4)$$

Величина g представляет собой „эффективное“ значение параметра пиннинга, определяющее поведение вихря в области малых скачков фазы. График зависимости g от b приведен на рис. 2, *b*. При изменении параметра I гиперболу надо передвигать горизонтально, так чтобы график пересекал ось g в точке I .

Отметим, что уравнения (3) справедливы для всех ячеек выше центрального ряда вихря, кроме ячейки с контурным током $J_C\psi_1$ (третьей снизу в левом ряду). Для этой ячейки условие квантования флюксоида при-

нимает вид

$$\begin{aligned} 3\psi_1 - \psi_2 - 2\xi_1 - \varphi_4 + I\psi_1 \\ + Ib(3\psi_1 - \psi_2 - 2\xi_1 - \sin\varphi_4) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом того, что $\sin\varphi_4 = \Psi - \psi_1$, где буквой Ψ мы обозначили „контурный“ скачок фазы в ячейке под ψ_1 (поскольку обозначение ψ_0 будет использовано для другой цели), представим (5) в виде

$$(4 + g)\psi_1 - \psi_2 - (\psi_1 + Ib\Psi + \varphi_4)/(Ib + 1) - 2\xi_1 = 0. \quad (6)$$

Введя обозначение

$$\psi_0 = (\psi_1 + Ib\Psi + \varphi_4)/(Ib + 1), \quad (7)$$

получим уравнение (6) в виде, точно соответствующем системе (3). Таким образом, переменная ψ_0 не является „контурным“ скачком фазы соответствующей ячейки. Ее введение позволило унифицировать систему уравнений. Увеличение на 1 числа переменных привело к появлению дополнительного уравнения (7).

Решение системы линейных разностных уравнений (3) ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi_k = A\lambda^k, \quad \xi_k = B\lambda^k, \quad \eta_k = C\lambda^k, \quad \rho_k = D\lambda^k, \\ \xi_k = E\lambda^k, \quad \mu_k = F\lambda^k, \quad \chi_k = G\lambda^k. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя (8) в систему (3), преобразуем ее к виду

$$\begin{pmatrix} a & -2\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & a & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & a & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ F \\ G \end{pmatrix} = (0), \quad (9)$$

где введено обозначение

$$a = (4 + I)\lambda - \lambda^2 - 1. \quad (10)$$

Раскладывая определитель n -го порядка вида (9) по первой строке, получим следующее рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n = af_n - 2\lambda^2 f_{n-1}, \quad (11)$$

$$f_n = af_{n-1} - \lambda^2 f_{n-2} \quad (12)$$

где f_n — определитель n -го порядка вида

$$f_n = \begin{vmatrix} a & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda & a & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & a \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Используя формулы (11)–(13), найдем определитель матрицы (9):

$$\Delta_7 = \lambda^7 k(k^6 - 7k^4 + 14k^2 - 7), \quad (14)$$

где $k = a/\lambda$. Приравнявая (14) к нулю, получим условия существования ненулевого решения системы (3):

$$k_1 = 0, \quad k_{2,3} = \pm 0.867767, \quad k_{4,5} = \pm 1.56366, \\ k_{6,7} = \pm 1.94985. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (10), найдем собственные числа λ_i (i от 1 до 7):

$$\lambda_i = \left(4 + I - k_i - \sqrt{(4 + I - k_i)^2 - 4}\right)/2. \quad (16)$$

Мы отбросили варианты с плюсами перед корнем в (16), так как выражения (8) в рассматриваемой геометрии не должны неограниченно возрастать с ростом k , т.е. все $|\lambda_i|$ должны быть меньше 1.

Решая систему (9), выразим коэффициенты B , C , \dots , G в (8) через A :

$$B = kA, \quad C = (k^2 - 2)A, \quad D = k(k^2 - 3)A, \\ E = (k^4 - 4k^2 + 2)A, \quad F = k(k^4 - 5k^2 + 5)A, \\ G = (k^6 - 6k^4 + 9k^2 - 2)A. \quad (17)$$

Общее решение системы (3) имеет вид (при $m \geq 0$)

$$\psi_m = \sum_{i=1}^7 A_i \lambda_i^m, \quad \xi_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i \lambda_i^m, \\ \eta_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^2 - 2) \lambda_i^m, \\ \rho_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i (k_i^2 - 3) \lambda_i^m, \\ \xi_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^4 - 4k_i^2 + 2) \lambda_i^m, \\ \mu_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i k_i (k_i^4 - 5k_i^2 + 5) \lambda_i^m, \\ \chi_m = 0.5 \sum_{i=1}^7 A_i (k_i^6 - 6k_i^4 + 9k_i^2 - 2) \lambda_i^m. \quad (18)$$

Записывая условия квантования флюксоида (1) для всех ячеек с индексами контурных токов больше или равными 1 ниже центрального ряда вихря и по аналогии с (7) вводя дополнительную неизвестную

$$\alpha_0 = (\alpha_1 + Ib\alpha + \varphi_2)/(Ib + 1) \quad (19)$$

(α_0 , как и ψ_0 , не является „контурным“ скачком фазы), получим систему уравнений, идентичную (3), для величин $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \theta_k, \omega_k, \nu_k, \pi_k$ (для $k \geq 0$). Для этих величин справедливы все формулы (8)–(17). Единственное изменение связано с тем, что нет оснований в выражениях (16) отбросить решения с плюсом перед квадратным корнем. Вместо этого появляются условия

симметричности конфигурации относительно горизонтальной оси симметрии: $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m, \theta_m, \omega_m, \nu_m, \pi_m$ описываются выражениями, аналогичными (18), с i от 8 до 14, в которых множители λ_i^m заменяются на $(\lambda_i^m + \lambda_i^{d-m})$, где d — расстояние между центрами вихрей, а набор k_i и λ_i для i от 8 до 14 тот же, что от 1 до 7.

Для нахождения 14 значений A_i ($i = 1, 2, \dots, 14$), 7 скачков фазы $\varphi_1 - \varphi_7$ и 2 контурных токов Ψ и α запишем 2 добавочных условия (7) и (19), 7 условий для токов в жирных участках на рис. 1:

$$\sin \varphi_1 = \alpha - \Psi, \quad \sin \varphi_2 = \alpha - \alpha_1, \quad \sin \varphi_3 = \alpha - \beta_0, \\ \sin \varphi_4 = \Psi - \psi_1, \quad \sin \varphi_5 = \Psi - \xi_0, \\ \sin \varphi_6 = \beta_0 - \gamma_0, \quad \sin \varphi_7 = \xi_0 - \eta_0, \quad (20)$$

а также 14 условий (1) для ячеек двух рядов с нулевыми индексами на рис. 1:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + 2\varphi_3 + I\alpha + Ib(4\alpha - 2\beta_0 - \Psi - \alpha_1) = 2\pi, \\ \varphi_6 - \varphi_3 + 2\beta_0 - \beta_1 - \xi_0 + I\beta_0 \\ + Ib(4\beta_0 - \xi_0 - \alpha - \gamma_0 - \beta_1) = 0, \\ -\varphi_6 + 3\gamma_0 - \gamma_1 - \eta_0 - \theta_0 + I\gamma_0 \\ + Ib(4\gamma_0 - \beta_0 - \gamma_1 - \eta_0 - \theta_0) = 0, \\ \varphi_4 - \varphi_1 + 2\varphi_5 + I\Psi + Ib(4\Psi - \alpha - 2\xi_0 - \psi_1) = 0, \\ \varphi_7 - \varphi_5 + 2\xi_0 - \beta_0 - \xi_1 + I\xi_0 \\ + Ib(4\xi_0 - \beta_0 - \xi_1 - \Psi - \eta_0) = 0, \\ -\varphi_7 + 3\eta_0 - \eta_1 - \rho_0 - \gamma_0 + I\eta_0 \\ + Ib(4\eta_0 - \eta_1 - \rho_0 - \gamma_0 - \xi_0) = 0, \\ (4 + g)\theta_0 - \theta_1 - \gamma_0 - \omega_0 - \rho_0 = 0, \\ (4 + g)\omega_0 - \theta_0 - \nu_0 - \xi_0 - \omega_1 = 0, \\ (4 + g)\nu_0 - \pi_0 - \omega_0 - \mu_0 - \nu_1 = 0, \\ (4 + g)\pi_0 - \nu_0 - \chi_0 - \pi_1 = 0, \\ (4 + g)\rho_0 - \eta_0 - \xi_0 - \theta_0 - \rho_1 = 0, \\ (4 + g)\xi_0 - \rho_0 - \omega_0 - \mu_0 - \xi_1 = 0, \\ (4 + g)\mu_0 - \nu_0 - \xi_0 - \chi_0 - \mu_1 = 0, \\ (4 + g)\chi_0 - \pi_0 - \mu_0 - \chi_1 = 0. \quad (21)$$

В результате получим 23 уравнения для 23 неизвестных. В [8] предлагался метод решения подобной системы, основанный на сведении ее к линейному виду, за исключением двух уравнений, решение которых проводилось численным методом. В отличие от [8], для данной системы мы будем использовать метод Ньютона, т.е. линеаризацию всех уравнений с последующим итеративным приближением к решению. Представим все немалые скачки фазы $\varphi_1 - \varphi_7$ и их синусы в виде $\varphi_k = \varphi_k^0 + \delta_k$, $\sin \varphi_k = \sin \varphi_k^0 + \cos \varphi_k^0 \delta_k$

Таблица 1.

d	k_d	$b = 0$		$b = 0.1$		$b = 0.3$		$b = 0.45$	
		I_d	$Fh/E_0\pi$	I_d	$Fh/E_0\pi$	I_d	$Fh/E_0\pi$	I_d	$Fh/E_0\pi$
1	1.570	0.934	0.575	0.805	0.492	0.635	0.387	0.550	0.331
2	0.960	0.339	0.0907	0.309	0.0843	0.263	0.0740	0.238	0.0680
3	0.593	0.140	0.0256	0.132	0.0246	0.119	0.0227	0.111	0.0215
4	0.397	0.0587	0.00886	0.0564	0.00858	0.0524	0.00809	0.0498	0.00776
5	0.288	0.0196	0.00266	0.0191	0.00260	0.0181	0.00248	0.0174	0.00239
6	—	0	—	0	—	0	—	0	—

($k = 1, 2, 3, \dots, 7$), где φ_k^0 считаем известными величинами, а δ_k являются новыми неизвестными (вместо φ_k). Получившаяся система из 23 уравнений линейна относительно всех 23 неизвестных. Решая эту систему, найдем все δ_k и вычислим новые φ_k^0 по формуле $\varphi_k^0 = \varphi_k^0 + \delta_k$. После этого проведем расчет системы с новыми φ_k^0 . Применимость такого метода расчета подтверждается результатами. Итерационная процедура сходится, т.е. с каждой следующей итерацией δ_k становятся меньше и в конце концов стремятся к нулю, что оправдывает использованное разложение синуса. Таким способом исходную систему можно решить с любой степенью точности всего за несколько шагов. При апробации метода оказалось, что для первой итерации в качестве начальных условий можно положить все φ_k^0 равными нулю. Результаты, полученные этим способом, полностью совпали с результатами, полученными методом, описанным в [8].

При величинах параметра пиннинга I , меньших некоторого критического значения I_d (индекс d соответствует числу ячеек между центрами вихрей), система не имеет решения, что означает, что при таких значениях I вихри не могут удерживаться на столь малых расстояниях. При $I > I_d$ система имеет два решения, соответствующие двум возможным конфигурациям вихрей (оба „а“ или оба „б“ [7]). При уменьшении I эти решения сближаются и при $I = I_d$ совпадают. Отметим, что может быть и еще один вариант: когда один из вихрей имеет конфигурацию „а“, а другой — „б“. В этом случае симметрия токовых распределений отсутствует, поэтому рассмотрение было бы более громоздким. Но поскольку мы интересуемся критическими значениями I_d , а, как сказано выше, при $I = I_d$ конфигурации „а“ и „б“ совпадают, то и в этом случае критическое значение будет тем же.

Результаты расчетов, их интерпретация и анализ

В табл. 1 приведены результаты расчета критических значений параметра I_d при различных расстояниях d между центрами вихрей и различных значениях b . Вычисления проводились при ширине полосы 13 ячеек ($N = 7$).

Для проверки справедливости исходных допущений рассмотрим получившуюся структуру типичной картины. Для примера на рис. 3 изображено рассчитанное распределение скачка фазы по контактам для случая $d = 5, b = 0.45$ при критическом значении $I_5 = 0.0174$. Из рис. 3 видно, что предположение о малости всех φ_k , кроме $\varphi_1 - \varphi_7$, справедливо.

На рис. 4 приведены графики зависимости I_b от b для разных расстояний d между центрами вихрей. С ростом b значения I_d убывают при всех d . Отметим, что значения I_d при $b = 0$ совпадают с полученными ранее [8].

На первый взгляд эти результаты кажутся удивительными. Ведь в исходную систему уравнений параметр b входит только в комбинации Ib , значения которой малы при всех I_d . Поэтому можно было бы ожидать, что величина I_d при $Ib \ll 1$ не зависит от b , а она, как видно из рис. 4, зависит, причем довольно заметно. Чтобы понять причину такого феномена, найдем математическое выражение, описывающее кривые рис. 4. Для этого ограничимся двумя первыми членами в разложении

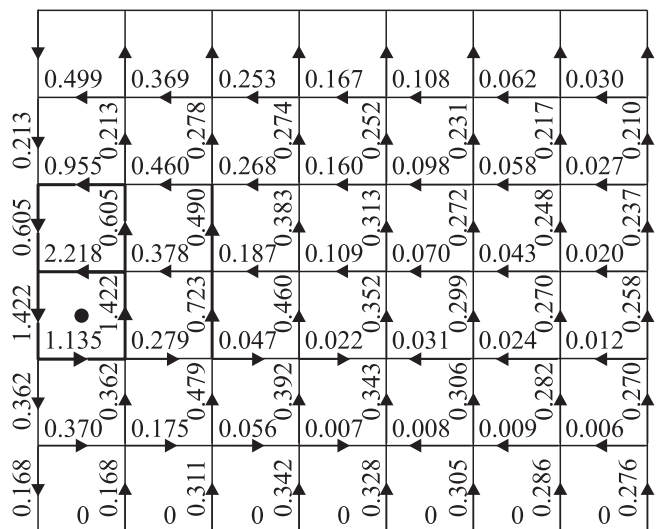


Рис. 3. Рассчитанное распределение скачков фазы по контактам для расстояния между центрами вихрей $d = 5$ при $b = 0.45$ и критическом значении $I_5 = 0.0174$. Картина симметрично продолжается влево и вниз.

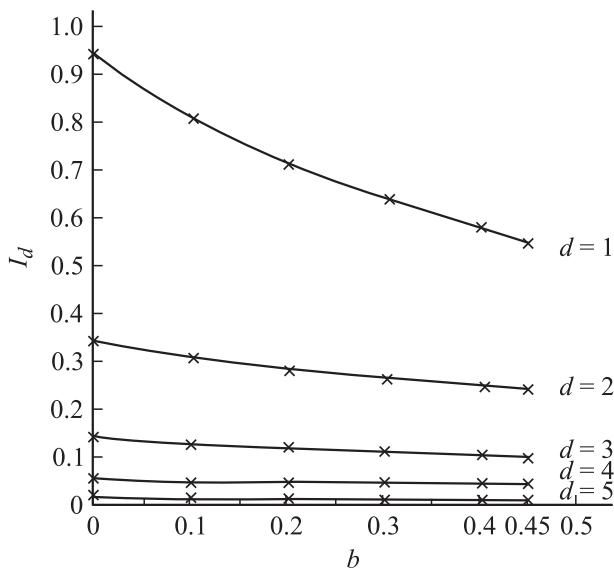


Рис. 4. Графики зависимости I_d от b для разных расстояний d между центрами вихрей. Крестики соответствуют рассчитанным значениям.

$I_d(b) = I_d(0) - k_d I_d(b)b + \dots$ Отсюда

$$I_d(b) = I_d(0)/(1 + k_d b). \quad (22)$$

Значения k_d для разных расстояний d приведены во втором столбце табл. 1. Выражение (22) очень точно описывает графики рис. 4 для всех d . Погрешности описания не превышают долей процента во всем диапазоне изменения b (от 0 до 0.45).

При $d > 5$ критическое состояние отсутствует, т.е. система имеет решения при любых, сколь угодно малых, значениях I . Этот результат подтверждает вывод работы [9] о том, что при стремлении I к нулю минимально возможное расстояние между линейными вихрями не возрастает неограниченно, как в случае плоских вихрей, а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным. Правда, в [9] предсказывается большее значение этой постоянной: $d_0 = 7-8$.

Найдем максимальную силу пиннинга вихря, т.е. такую силу, которую надо приложить к вихрю, чтобы он пришел в движение. Она равна силе, действующей на вихрь при критическом значении параметра пиннинга I_d . Для расчета этой силы воспользуемся приближением непрерывной среды. Каждый вихрь имеет центральную часть (остов) размером в несколько ячеек, в которой существенно дискретность среды, а в наружных областях зависимость φ от координат можно считать квазинепрерывной. Поскольку взаимодействие вихрей определяется их наружными областями, то при анализе условий равновесия можно использовать выражения для сил взаимодействия вихрей в непрерывной среде. В [10] рассмотрен вопрос о переходе от дискретного случая к непрерывному при малых значениях параметра пиннинга I для $b = 0$. Там показано, что вихрь в

непрерывной среде описывается теми же уравнениями, что и обычный абрикосовский [3], но роль лондоновской глубины проникновения играет величина $\lambda = h/\sqrt{I}$.

При ненулевых b в области малых скачков фазы уравнения систем (3) и (21), как легко видеть, имеют тот же вид, что и при $b = 0$, только параметр I заменяется на $g = I(b + 1)$. Проведя соответствующую замену в формулах [10], получим выражение для энергии взаимодействия двух вихрей в расчете на один вихрь

$$U_{\text{int}} = \pm E_0 \pi g K_0(r\sqrt{g}/h), \quad (23)$$

где плюс соответствует отталкиванию, а минус — притяжению, K_0 — функция Бесселя (Ганкеля) нулевого порядка от мнимого аргумента, r — расстояние между центрами вихрей, $E_0 \equiv \Phi_0^2/4\pi^2\mu_0 h^2$. Воспользовавшись тем, что $dK_0/dx = -K_1(x)$, найдем силу, действующую на вихрь со стороны другого вихря:

$$F_{\text{int}} = -\partial U_{\text{int}}/\partial r = \pm E_0 \pi / h g^{3/2} K_1(r\sqrt{g}/h). \quad (24)$$

Формула (24) позволяет найти силу взаимодействия двух уединенных вихрей в бесконечном во всех направлениях образце, однако рассмотренная геометрия, строго говоря, описывает иную ситуацию. При расстояниях между вихрями, сопоставимых с шириной полосы, считать вихри уединенными и пренебрегать границами нельзя. Влияние границ можно оценить на базе следующих соображений [8]. Легко видеть, что рассмотренная выше конфигурация эквивалентна периодической последовательности пар вихрей попеременно чередующейся ориентации. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим такую последовательность, в которой расстояние между центральными линиями соседних пар равняется $2N$ ячеек, т.е. между их центральными ячейками размещается $(2N - 1)$ ячейек. Для примера на рис. 5, *a* изображена такая конфигурация с $N = 3$ и $d = 2$. Центральные ячейки вихрей будем обозначать точками или крестиками в зависимости от их ориентации. Из симметрии картины ясно, что в ряду ячеек, расположенном посередине между центральными линиями соседних пар (на рис. 5, *a* он пересекается линией AA) все горизонтальные токи равны нулю. Поэтому структура картины между двумя такими соседними „осевыми“ вертикальными рядами (между линией AA и симметричной ей слева от вихрей) идентична рассмотренному нами случаю одной пары вихрей, расположенной в центральном ряду слоя шириной $(2N - 1)$ ячейек. Таким образом, влияние границ полосы может быть учтено и оценено как воздействие на рассматриваемые два вихря всей системы периодически расположенных дополнительных вихрей. Ситуация напоминает метод зеркального отражения в электростатике.

Проведенное выше рассмотрение справедливо лишь в том случае, если расстояние между центральными линиями соседних пар равняется четному числу ячейек. Конфигурацию рис. 5, *a* будем называть „чередующаяся (alternate) четная“ в соответствии с ориентацией

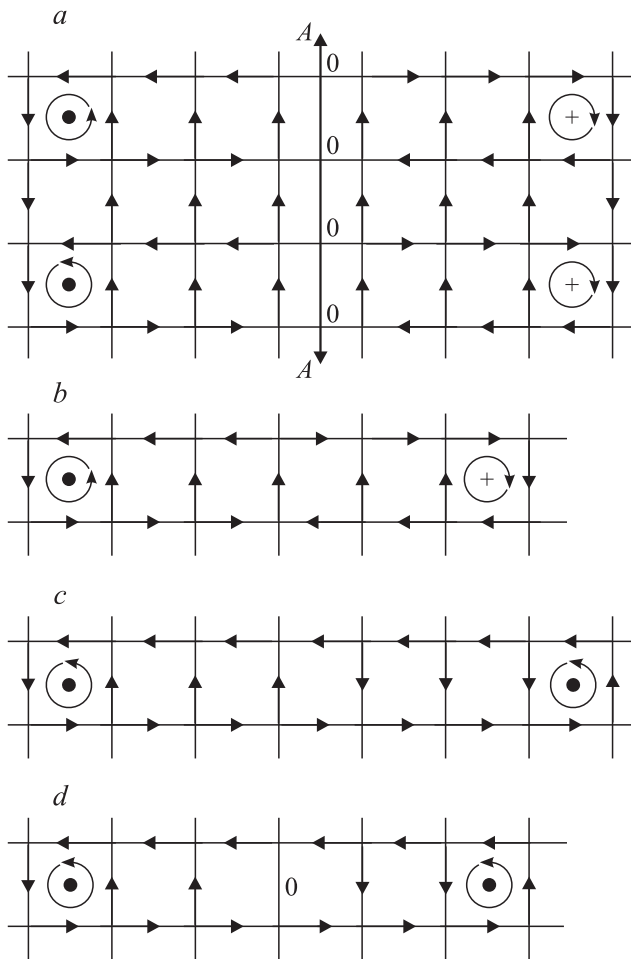


Рис. 5. Бесконечные периодические последовательности вихрей параллельной или попеременно чередующейся ориентации, эквивалентные единичному вихрю в плоской пластине толщиной в 13 ячеек и соответствующие различным граничным условиям: *a* — „чередующаяся четная“, *b* — „чередующаяся нечетная“, *c* — „параллельная четная“, *d* — „параллельная нечетная“. Точками обозначены центральные ячейки вихрей.

соседних пар. Рассмотрим также следующие конфигурации: „чередующаяся нечетная“ (рис. 5, *b*), „параллельная (parallel) четная“ (рис. 5, *c*) и „параллельная нечетная“ (рис. 5, *d*). В каждой из этих конфигураций последнее уравнение (3), а значит, и матрица (9), будут иметь свой вид, в результате чего изменятся соотношения (11)–(18). В частности, для рис. 5, *b* в матрице (6) надо заменить крайний правый элемент *a* в нижнем ряду на $(a + \lambda)$, для рис. 5, *c* — его же на $(a - \lambda)$, а для рис. 5, *d* — второй справа элемент нижнего ряда $(-\lambda)$ на (-2λ) .

Рассмотрим один из вихрей исходной пары для рассмотренной выше „чередующейся“ конфигурации. Он взаимодействует со всеми вихрями в обеих бесконечных цепочках. Но вихри из его собственной цепочки могут лишь деформировать его, но не стремятся его сдвинуть. Поэтому при рассмотрении условий его равновесия

нужно учесть только силы, действующие на него со стороны вихрей другой цепочки. Учитывая соответствующие косинусы, получим для полной величины этой силы

$$F = \frac{E_0 \pi g}{h} \sqrt{g} \left[K_1(d\sqrt{g}) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} K_1 \left(\sqrt{d^2 + (mL)^2} \sqrt{g} \right) (-1)^m \frac{d}{\sqrt{d^2 + (mL)^2}} \right], \quad (25)$$

где *d* — расстояние между центрами вихрей пары, *L* — период цепочки (величины *d* и *L* выражены в числе ячеек). В ситуации, когда параметр пиннинга равен своему критическому значению для данного расстояния *d* между вихрями, вихри уже не могут удерживаться пиннингом, т.е. формула (25) определяет максимальную силу пиннинга.

Первый член в скобках (25) соответствует взаимному отталкиванию двух рассматриваемых вихрей, а остальные члены описывают силу, действующую на вихрь со стороны границ образца. В чередующейся конфигурации эта сила направлена против силы взаимодействия вихрей пары, т.е. уменьшает ее и тем самым помогает вихрям удержаться на месте. При расчете в случае параллельных конфигураций из членов ряда (25) надо исключить $(-1)^m$. Поэтому взаимодействие вихря с границами способствует сдвигу. Эти рассуждения позволяют сделать вывод, что максимальная сила пиннинга в чередующейся конфигурации должна получиться больше, чем для уединенного вихря, а в параллельной — меньше. Пусть значение *I* меньше критического для параллельной конфигурации, т.е. два взаимодействующих вихря не могут удерживаться на данном расстоянии. Благодаря взаимодействию с границами, в чередующейся конфигурации это еще возможно. Отсюда следует, что критические значения I_d для чередующихся конфигураций меньше, чем для параллельных, при этом I_d для уединенного вихря находится между этими значениями.

Ранее мы рассмотрели чередующуюся конфигурацию с $N = 7$ и $L = 14$ (табл. 1). Теперь исследуем параллельную конфигурацию при $N = 7$ и $L = 13$. В табл. 2 приведены рассчитанные критические значения параметра I_d для этого случая. Как и ожидалось, эти значения больше, чем в случае чередующейся конфигурации (табл. 1). Отметим, что при сколь угодно больших *d* значения I_d отличны от нуля. Этот факт определяет важность рассмотрения „параллельных“ конфигураций, потому что именно они дают возможность провести расчет сил пиннинга при очень малых значениях *I*. Зависимости $I_d(b)$ при всех *d* очень хорошо описываются формулой (24), коэффициенты k_d приведены во втором столбце табл. 2. С ростом *d* значения коэффициентов k_d монотонно убывают и при достаточно больших *d* обращаются в нуль, т.е. I_d перестают зависеть от *b*.

Таблица 2.

d	k_d	$b = 0$		$b = 0.1$		$b = 0.3$		$b = 0.45$	
		I_d	$Fh/E_0\pi$	I_d	$Fh/E_0\pi$	I_d	$Fh/E_0\pi$	I_d	$Fh/E_0\pi$
1	1.570	0.934	0.575	0.805	0.492	0.635	0.387	0.550	0.331
2	0.926	0.340	0.0909	0.311	0.0847	0.265	0.0744	0.240	0.0684
3	0.536	0.144	0.0263	0.137	0.0252	0.124	0.0234	0.116	0.0223
4	0.331	0.0702	0.0103	0.0680	0.0100	0.0639	0.00959	0.0611	0.00934
5	0.211	0.0392	0.00498	0.384	0.00491	0.0369	0.00477	0.0358	0.00466
51	0	0.000364	0.0000332	0.000364	0.0000332	0.000364	0.0000332	0.000364	0.0000332

На рис. 6 для сравнения приведены графики зависимостей I_d от b для чередующихся и параллельных конфигураций при разных расстояниях между вихрями d . Кривые при $d = 1$ и $d = 2$ для обоих типов конфигураций практически совпадают и не приведены на рис. 6.

Максимальная сила пиннинга F является функцией от структурного фактора b , который, как говорилось раньше, в исходную систему уравнений входит только в комбинации Ib , значения которой малы при всех I_d . Раскладывая F в ряд по Ib и ограничиваясь членами первого порядка, получим

$$F(I, b) = F(I, 0) + kIb. \quad (26)$$

На рис. 7 изображены графики зависимостей максимальной силы пиннинга F , нормированной на величину $E_0\pi/h$, от параметра I для „чередующейся“ конфигурации с $L = 14$ при различных значениях b (табл. 1).

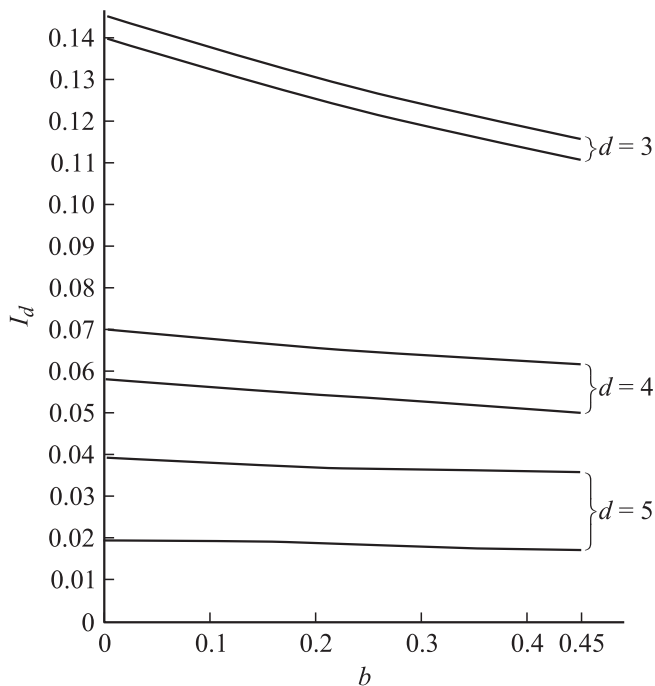


Рис. 6. Графики зависимости I_d от b для чередующихся (нижние кривые) и параллельных (верхние кривые) конфигураций при разных расстояниях между вихрями d .

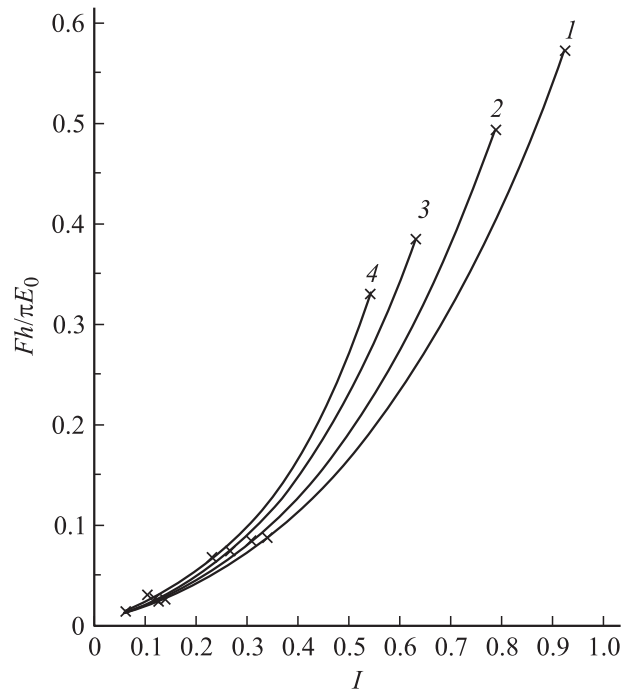


Рис. 7. Графики зависимостей максимальной силы пиннинга от параметра I для „чередующейся“ конфигурации с $L = 14$ при различных значениях b : 1 — $b = 0$, 2 — $b = 0.1$, 3 — $b = 0.3$, 4 — $b = 0.45$. Крестиками обозначены рассчитанные точки.

Легко видеть, что при одном и том же значении I большим значениям b соответствуют большие максимальные силы пиннинга (т.е. в (26) $k > 0$), причем расстояния от нижней кривой ($b = 0$) до кривых с ненулевыми значениями b примерно пропорциональны величине b . Крестики соответствуют результатам расчета, а кривые через них проведены ориентировочно. Поэтому строго рассчитать значение k для (26) не удастся, но качественное соответствие кривых выражению (26) можно обнаружить.

На рис. 8 приведены графики зависимости $F(I)$ для рассмотренных чередующейся и параллельной конфигураций при $b = 0.45$. Как и ожидалось, кривая для чередующейся конфигурации проходит выше, чем для

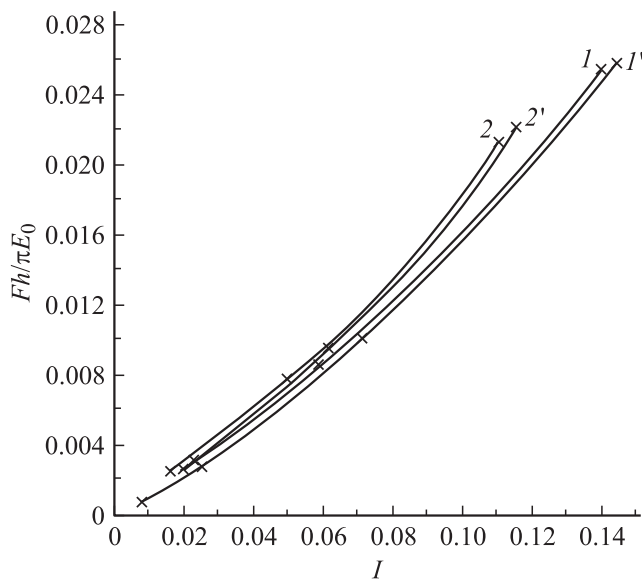


Рис. 8. Графики зависимостей максимальной силы пиннинга от параметра I для „чередующейся“ конфигурации с $L = 14$ и „параллельной“ с $L = 13$ для $b = 0$ (кривые I и I') и $b = 0.45$ (кривые 2 и $2'$). I и 2 — чередующиеся, I' и $2'$ — параллельные. Крестиками обозначены рассчитанные точки.

параллельной. Кривая для уединенного вихря в среде без границ должна проходить между этими кривыми.

Как видно из табл. 2, при больших d значения I_d перестают зависеть от величины b . Поэтому они могут быть вычислены при $b = 0$. Расчет, выполненный в [8], показывает, что для двух уединенных вихрей условие равенства максимальной силы пиннинга силе взаимодействия принимает вид

$$0.1E_0 \frac{\pi}{h} I = \frac{E_0 \pi I}{h} \sqrt{I} K_1(d\sqrt{I}). \quad (27)$$

Поскольку $K_1(x) < 1/x$, то из (27) следует, что минимальное расстояние между вихрями d_0 меньше 10 ячеек. Подобный результат был получен в [9], минимальное расстояние равнялось 7–8 ячейкам.

Таким образом, при стремлении I к нулю минимальное расстояние между двумя уединенными линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно, а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным. Этот факт говорит о том, что при стремлении I к нулю пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя.

Эти рассуждения справедливы только для уединенной пары вихрей на бесконечном расстоянии от границы, когда отсутствуют как реальные, так и „мнимые“ дополнительные вихри. Существование же дополнительных вихрей меняет ситуацию. В случае „чередующейся“ конфигурации они помогают вихрю удержаться на месте, поэтому величина d_0 становится еще меньше, что подтверждается и численным расчетом (табл. 1). В „параллельных“ конфигурациях дополнительные вихри увели-

чивают силу отталкивания, поэтому вихрю труднее удержаться. Пусть при некотором малом значении I условие равенства силы F из (27) (без множителей $(-1)^m$) силе пиннинга $0.1E_0 \frac{\pi}{h} I$ выполнено при расстоянии d между вихрями пары. На грани равновесия отношение силы пиннинга к I равно константе $0.1E_0 \pi/h$, т.е. не зависит от I и d . Оценим поведение величины F/I из (27) при уменьшении I (при $b = 0$ $g = I$). Даже если $d\sqrt{I} \ll 1$, вследствие чего первые члены в скобках в (27) пропорциональны $1/d\sqrt{I}$, то с ростом m аргумент функции $K_1(x)$ перестает быть малым, а при немалых x с уменьшением x функция $K_1(x)$ растет быстрее, чем $1/x$. Поэтому при уменьшении I величина F/I растет, и сила пиннинга не может удержать вихрь на прежнем расстоянии. Величина d возрастает, в результате чего F/I уменьшается, и вихрь может находиться в равновесии в своем новом положении. Это рассуждение не зависит от периода L . Таким образом, при любом, сколь угодно большом, периоде L (т.е. толщине пластины) при стремлении I к нулю минимально возможное расстояние между вихрями пары неограниченно возрастает, т.е. величина d_0 равна бесконечности. Иначе говоря, в случае параллельной конфигурации при сколь угодно больших значениях расстояния между вихрями d критическое значение параметра пиннинга I_d отлично от нуля. Справедливость этого утверждения подтверждается результатами расчета (табл. 2).

Заключение

На базе условий квантования флюксоида получена система уравнений, описывающая токовую конфигурацию двух взаимодействующих линейных вихрей в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде во всем возможном диапазоне значений структурного фактора b .

Предложена методика решения этой системы, основанная на том, что уже на небольшом удалении от центров вихрей скачки фазы на контактах могут считаться малыми, что позволяет перейти к линейной системе уравнений в конечных разностях. Эта система имеет разные решения в области между рассматриваемыми вихрями и в двух симметричных областях от центров вихрей до бесконечности. Сшивая эти решения в близких к центру вихря ячейках, в которых линейность уравнений нарушается, можно найти точное решение. Кроме того, используется идея приближения к точному решению путем последовательных итераций по значениям скачков фазы, которые не могут считаться малыми. Сходимость метода во всех случаях подтверждена проверкой выполнения исходных уравнений системы.

Этот метод позволяет весьма точно рассчитывать токовую конфигурацию, сечение которой плоскостью, перпендикулярной ее оси, представляет собой бесконечную полосу, в среднем ряду которой находятся центры вихрей. Ширина полосы для рассмотренных в работе случаев равна 13 ячейкам.

Показано, что при заданном расстоянии между центральными ячейками вихрей d и фиксированной величине структурного фактора b данная система имеет решение только при значениях параметра пиннинга, превышающих некоторое критическое значение $I_d(b)$.

Рассчитаны критические значения параметра пиннинга I_d , при которых два линейных вихря еще могут удерживаться на расстоянии d ячеек между их центрами, во всем возможном диапазоне значений параметра b . Получена формула, описывающая зависимости $I_d(b)$ при различных значениях d . При больших d значения I_d перестают зависеть от величины b . Поэтому они могут быть вычислены при $b = 0$.

Исследованы зависимости максимальной силы пиннинга F от параметра I при различных значениях b . Показано, что при одном и том же значении I большим значениям b соответствуют большие максимальные силы пиннинга.

При стремлении I к нулю минимальное расстояние между двумя уединенными линейными вихрями в дискретной среде не возрастает неограниченно (как для абрикосовских вихрей в непрерывной среде), а достигает некоторой конечной величины d_0 и далее остается постоянным. Этот факт говорит о том, что при стремлении I к нулю пренебречь пиннингом линейных вихрей нельзя.

Список литературы

- [1] Абрикосов А.А. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1442.
- [2] Goodman B.B. // Rev. Mod.Phys. 1964. Vol. 36. P. 12.
- [3] Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968. 279 с.
- [4] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Tech. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469.
- [5] Кулик И.О., Янсон И.К. // Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970. 272 с.
- [6] Зеликман М.А., Поцелуев К.А. // ЖТФ. 2012. Т. 82. № 5. С. 1–6.
- [7] Зеликман М.А., Поцелуев К.А. // ЖТФ. 2013. Т. 83. № 3. С. 8.
- [8] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 9. С. 65–73.
- [9] Зеликман М.А. // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 8. С. 7–15.
- [10] Zelikman M.A. // Supercond. Sci. Techn. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795–800.