Журнал технической физики, 2013, том 83, вып. 12

01

Повторное вейвлет-преобразование нестационарного сигнала с частотной модуляцией

© С.В. Божокин, И.М. Суслова

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bsvjob@mail.ru

(Поступило в Редакцию 19 февраля 2013 г.)

Предложена математическая модель нестационарного сигнала с частотной модуляцией в виде системы хаотически распределенных во времени гауссовских пиков. Получено аналитическое выражение для непрерывного вейвлет-преобразования CWT (continuous wavelet transform) модельного сигнала. Для сигналов с изменяющейся во времени последовательностью пиков проанализирован главный хребет скелетона, характеризующийся частотой $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$. Величина $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ определяется для любого момента времени t из условия максимума CWT в спектральном диапазоне MFB (main frequency band). Для частотно-модулированного сигнала, имеющего переходные участки плавного изменения частоты (тренд), а также переменные колебания частоты относительно тренда, вычислено повторное CWT функции $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$. С помощью спектральных интегралов $E_\nu(t)$ определена длительность переходных периодов сигнала. Найдены времена появления и затухания низкочастотных спектральных составляющих сигнала. Метод повторного CWT может быть применен для анализа ритмов сердца и нейронной активности, а также нестационарных процессов в квантовой радиофизике и астрономии.

Введение

Применение теории вейвлетов для изучения нестационарных сигналов, спектральные свойства которых изменяются во времени, оказалось плодотворным во многих областях науки: астрофизика, гидродинамика, физика твердого тела и плазмы, радиофизика, медицина [1–5]. Во многих случаях теория вейвлетов стала заменять традиционный подход, основанный на оконном преобразовании Фурье. Недостаток преобразования Фурье состоит в том, что выбор оптимального размера окна W требует знания характерных промежутков времени перестройки спектральных свойств сигнала. В теории вейвлетов используется адаптивное окно, изменяющее свои размеры в зависимости от исследуемой частоты сигнала. Многие работы, основанные на применении теории вейвлетов, используют численные методы [6,7], поэтому построение алгоритмов, с помощью которых можно было бы получать аналитические выражения для непрерывного вейвлет-преобразования (continuous wavelet transform, CWT), является актуальной задачей как с точки зрения теории, так и приложений.

Целью настоящей работы является разработка метода изучения спектральных свойств сигнала, имеющего сложную частотную модуляцию. Предложенная модель такого сигнала, представляющая собой систему гауссовских пиков, расположенных в произвольные моменты времени, позволяет получить аналитическое выражение для CWT. Вычисление спектральных интегралов дает возможность выполнить спектральную фильтрацию такого сигнала, определяя изменение во времени локальной плотности спектра в определенном частотном диапазоне. Определены характерные переходные времена, определяющие изменение спектральных свойств нестационарного сигнала, а также сформулированы критерии влияния граничных эффектов на вычисление CWT. Исследован скелетон CWT предлагаемой модели хаотичной системы гауссовских пиков и найдены его максимумы. Проанализирована зависимость от времени t частоты главного хребта $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$, которая показывает сложную динамику частотной модуляции сигнала в основной полосе частот (MBF — main frequency band). Метод повторного вейвлетного преобразования сигнала $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ определяет характеристики нестационарной модуляции для спектральных поддиапазонов частот (SBF — subband frequency). Вычислена динамика изменения во времени низкочастотной модулирующей частоты $f_{\text{SBF}}(t)$ и определены характерные времена возникновения и затухания определенных спектральных поддиапазонов частот SBF.

Непрерывное вейвлет-преобразование суммы гауссовских пиков

Непрерывное вейвлет-преобразование $V(\nu, t)$ (CWT) [8–10]

$$V(\nu, t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} Z(t')\psi^*(\nu(t' - t))dt' \tag{1}$$

отображает исходный сигнал $Z(t)$ на плоскость непрерывно изменяющихся аргументов — частоты ν и времени t. Знак * означает комплексное сопряжение. Функция $\psi(x)$ представляет собой материнский вейвлет, локализованный вблизи точки $x = 0$, имеющий нулевое среднее значение и обладающий единичной нормой.

Этими свойствами обладает вейвлет Морле

$$\psi(x) = D\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\exp(-i\Omega_0 x) - \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{2}\right)\right), \quad (2)$$

где параметр $\Omega_0 = 2\pi$, а значение нормировочной постоянной D

$$D = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\left(1 - 2\exp\left(-\frac{3\Omega_0^2}{4}\right) + \exp(-\Omega_0^2)\right)}}. \quad (3)$$

Для вейвлета Морле $\psi(x)$ (2) протяженность по переменной x равна $\Delta_x \approx 1/\sqrt{2}$, а протяженность частотного спектра $\Delta_\Omega \approx 1/\sqrt{2}$. Следовательно, вейвлет Морле одинаково хорошо подходит для анализа как временны́х, так и частотных особенностей исследуемого сигнала, что явилось основанием выбора именно этого материнского вейвлета. Вейвлет в выражении для CWT (2) играет роль адаптивного окна протяженностью $t - \Delta_x/\nu < t' < t + \Delta_x/\nu$, ширина которого велика для малых частот ν и мала для больших частот. Основной вклад в интеграл $V(\nu, t)$ (1) вносят составляющие сигнала $Z(t')$, которые похожи на вейвлет, центрированный в точке $t = t'$ и обладающий частотой ν. Исследование спектральных свойств сигнала выполняется с помощью анализа динамики положения максимумов (хребтов) поверхности $|V(\nu, t)|^2$. Изображение таких хребтов называют скелетоном. В работе [9] показано, что для гармонического сигнала $Z(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, где f_1 — частота в Hz, максимум величины $|V(\nu, t)|^2$ будет наблюдаться при $\nu = f_1$. Это означает, что величина $P(\nu, t) = |V(\nu, t)|^2$ определяет мгновенный спектр мощности сигнала, показывающий динамику изменения во времени спектральных свойств сигнала. Для вейвлет-преобразования справедливо соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z^2(t)dt = \frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\nu \, \frac{|V(\nu, t)|^2}{\nu}, \quad (4)$$

согласно которому величина

$$\varepsilon(\nu, t) = \frac{2}{C_\psi}\frac{|V(\nu, t)|^2}{\nu} \quad (5)$$

характеризует мгновенное распределение энергии сигнала по частотам ν (локальная плотность спектра энергии сигнала). Константа C_ψ для вейвлета Морле равна $C_\psi \approx 1.0132$ [9].

Для исследования динамики изменения различных частот нестационарных сигналов введем спектральный интеграл $E_\mu(t)$:

$$E_\mu(t) = \frac{1}{\Delta\nu}\int_{\nu_\mu - \Delta\nu/2}^{\nu_\mu + \Delta\nu/2} \varepsilon(\nu, t)d\nu. \quad (6)$$

Спектральный интеграл $E_\mu(t)$ представляет собой среднее значение локальной плотности спектра энергии сигнала, проынтегрированное по определенному интервалу частот $\mu = |\nu_\mu - \Delta\nu/2; \nu_\mu + \Delta\nu/2|$, где величина ν_μ обозначает середину интервала, а $\Delta\nu$ — его ширину. Изучая поведение спектральных интегралов по времени $E_\mu(t)$, мы выполняем своеобразную фильтрацию нашего сигнала, суммируя вклады от локальной плотности спектра $\varepsilon(\nu, t)$ лишь в определенном интервале частот μ.

Если интервал частот μ является узким $\Delta\nu \ll \nu_\mu$, то в этом случае $E_\mu(t)$ показывает как изменяется $\varepsilon(\nu_\mu, t)$ в окрестности частоты ν_μ. Если ширина $\Delta\nu \approx \nu_\mu$, то поведение $E_\mu(t)$ характеризует поведение усредненной плотности частот в диапазоне μ. Вычисляя времена нарастания и спадания $E_\mu(t)$, можно охарактеризовать степень нестационарности нашего сигнала.

Как правило, записи реальных сигналов имеют определенную продолжительность по времени. Определим влияние граничных эффектов на правильное вычисление величины $V(\nu, t)$ [11]. Граничные эффекты проявляются на левой $(0 < t < t_L)$ и правой границах $(t_R < t < T)$ промежутка наблюдения сигнала T, причем для устранения граничных эффектов на таких временах мы будем обнулять значения CWT. Учтем, что продолжительность интервалов $[0, t_L]$ и $[t_R, T]$ связана с величиной минимальной частоты $\nu_{\min}$ соотношением $t_L \approx T - t_R \approx 2\Delta_B/\nu_{\min}$, где безразмерная величина Δ_B определяет влияние границ. Для определения $\nu_{\min}$, которая может быть корректно зарегистрирована для сигнала конечной продолжительности T, потребуем, чтобы на длине временно́го промежутка $t_R - t_L$ укладывалось целое значение m периодов сигнала, имеющего частоту $\nu_{\min}$, т.е. $t_R - t_L = m/\nu_{\min}$. Промежуток наблюдения сигнала T складывается из суммы граничных участков, равной $4\Delta_B/\nu_{\min}$, и длины корректного определения CWT, равной $m/\nu_{\min}$, поэтому

$$\nu_{\min} = \frac{m + 4\Delta_B}{T}. \quad (7)$$

Учет граничных эффектов приводит к тому, что величина $\nu_{\min}$ примерно в $m + 4\Delta_B$ раз больше, чем минимальная частота $f_{\min} = 1/T$, используемая в фурье-анализе. Исследование влияния граничных эффектов показывает, что Δ_B должна удовлетворять соотношению $\Delta_B \approx 2\Delta_x$. Для материнского вейвлета Морле выберем $\Delta_B \approx 1.5$, а количество периодов $m = 7$.

Для гауссовского пика с амплитудой b_0, имеющего ширину τ_0 и локализованного по времени t в точке t_0

$$z_0(t - t_0) = \frac{b_0}{2\sqrt{\pi}\tau_0}\exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{4\tau_0^2}\right), \quad (8)$$

может быть получено аналитическое выражение для $V(\nu, t)$ (1)

$$V(\nu, t - t_0) = \frac{Db_0\nu}{a(\nu)}\exp\left(-\frac{x^2 + \Omega_0^2[a^2(\nu) - 1]}{2a^2(\nu)}\right) \times \left[\exp\left(-\frac{i\Omega_0 x}{a^2(\nu)}\right) - \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{2a^2(\nu)}\right)\right]. \quad (9)$$

В формуле (9) $x = \nu(t - t_0)$, а функция $a(\nu) = \sqrt{1 + 2\nu^2\tau_0^2}$. Рассмотрим математическую модель сложного сигнала $Z(t)$ как суперпозицию N различных гауссовских пиков, центры которых расположены на неравномерной сетке времен t_n, причем каждый пик имеет свою амплитуду b_n и ширину τ_n,

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{N-1} z_n(t - t_n). \tag{10}$$

Аналитическое выражение для CWT сигнала $Z(t)$ (1) также может быть вычислено на основании принципа суперпозиции (10)

$$V(\nu, t) = \sum_{n=0}^{N-1} V(\nu, t - t_n). \tag{11}$$

Разберем два применения этой модели. Осуществим дискретизацию произвольного непрерывного сигнала $Y(t)$, заменяя его значениями $Y_n = Y(t_n)$, взятыми в определенные моменты времени $t_0\, t_1, \ldots, t_{N-1}$, причем величина $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ называется временем дискретизации сигнала. В первом случае применения модели (амплитудная модуляция) предположим, что все гауссовские пики имеют одинаковую ширину $\tau_0 \ll \Delta t$ и будут отстоять на одинаковое расстояние Δt. Полагая все амплитуды гауссовских пиков b_n удовлетворяющими соотношениям $b_n = Y_n$, мы можем вычислить CWT (1) произвольного сигнала $Y(t)$.

Во втором случае применения нашей модели (частотная модуляция) рассмотрим сигнал $Z(t)$, который представляет собой суперпозицию N одинаковых гауссовских пиков ($b_n = 1$, $\tau_n = \tau_0$), центры которых расположены на неравномерной сетке t_n. Для исследования спектральных свойств такого нестационарного сигнала $Z(t)$, имеющего сложную частотную модуляцию, рассмотрим некоторые примеры.

Вычислим CWT (1) для двух одинаковых гауссовских пиков, имеющих ширину $\tau_0 = 0.02$ s, центры которых расположены в точках $t_1 = 4.5$ s и $t_2 = 5.5$ s. Продолжительность времени между этими двумя пиками равняется $T_P = 1$ s. Анализ величины $|V(\nu, t)|^2$ для такого сигнала (рис. 1) показывает, что в моменты времени $t_1 = 4.5$ s и $t_2 = 5.5$ s, наблюдаются резкие всплески высокочастотных компонентов CWT. Кроме того, на частотах $\nu \approx 1, 2, 3$ Hz формируется новая структура, максимум которой параллелен оси времени t, отражающая периодичность следования двух импульсов, разделенных промежутком времени $T_P = 1$ s (частота следования $\nu_P = 1/T_p$).

Рассмотрим далее сигнал $Z(t)$, состоящий из девяти одинаковых гауссовских пиков $t_0, t_1, \ldots, t_8$ (рис. 2), расположенных в произвольные моменты времени $t_n = \{0.850, 1.859, 3.108, 3.911, 4.932, 6.052, 6.946, 7.899, 8.962\,\text{s}\}$. На рис. 3 для $|V(\nu, t)|^2$ видно девять пиков высокочастотной активности, хребты которых,

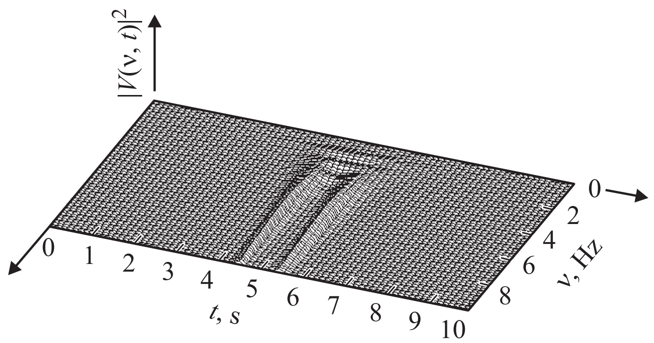

Рис. 1. Зависимость CWT $|V(\nu, t)|^2$ от частоты ν Hz и времени t, s для суммы двух одинаковых гауссовских пиков.

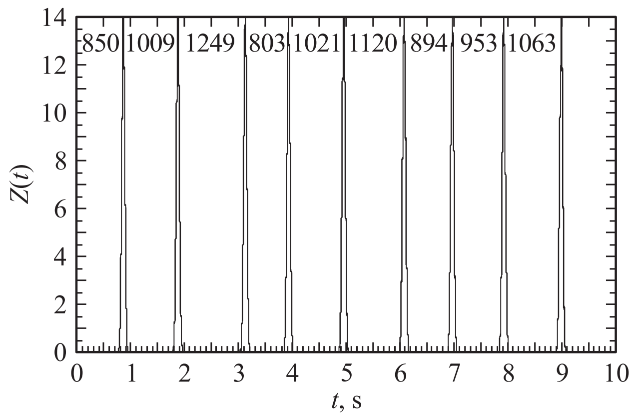

Рис. 2. Зависимость от времени $Z(t)$ сигнала, представляющего собой сумму девяти гауссовских пиков, имеющих одинаковую форму, расположенных в хаотических точках $t_n = (0.850, 1.859, 3.108, 3.911, 4.932, 6.052, 6.946, 7.899, 8.962\,\text{s})$. В миллисекундах (ms) обозначены промежутки между соседними гауссовскими пиками.

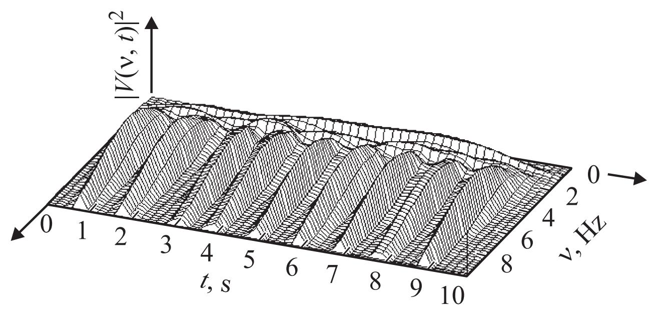

Рис. 3. Зависимость CWT $|V(\nu, t)|^2$ от частоты ν, Hz и времени t, s для суммы девяти хаотически распределенных гауссовских пиков (рис. 2).

простирающиеся в область высоких частот $\nu \approx 10$ Hz, параллельны оси ν, причем каждый из этих пиков центрирован по времени в момент t_n. Такие пики высокочастотной активности связаны с малой продолжительностью отдельного гауссовского пика, равной $\tau_0 = 0.02$ s. Важно отметить (рис. 2), что для девяти пиков фор-

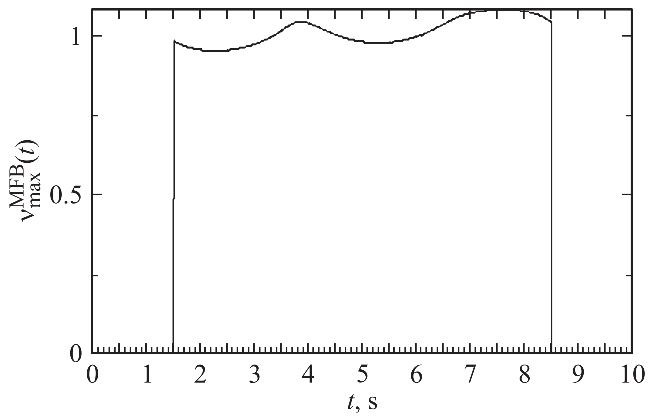

Рис. 4. Зависимость максимальной частоты $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$, Hz от времени t, s для суммы девяти хаотически распределенных гауссовских пиков (рис. 2).

мируется единый главный хребет, положение которого будет описываться некоторой кривой, расположенной вдоль оси времени. Это связано с тем, что отдельные пики высокочастотной активности формируют связанную структуру, обусловленную нестрогой периодичностью их повторения. Если повторяющиеся пики следуют друг за другом с временем $T_p \approx 1$ s, то это означает, что положение главного хребта характеризуется изменяющейся во времени частотой в диапазоне $\nu_\mu \approx 1$ Hz.

Предположим, что основная полоса исследуемого сигнала $Z(t)$, характеризующая повторяемость пиков, лежит в интервале $[\nu_{\min}; \nu_{\mathrm{HFMBF}}]$ (MBF — main frequency band), причем $\nu_{\mathrm{HFMBF}} = 2$ Hz. Разобьем этот диапазон частот $[\nu_{\min}; \nu_{\mathrm{HFMBF}}]$ на некоторые области, имеющие граничные частоты $\{\nu_{\min}, 0.667, 1.00, 1.333, 2.00\,\mathrm{Hz}\}$. В этом случае индекс μ, описывающий спектральные интервалы $E_\mu(t)$ (6), пробегает значения $\mu = \{\mathrm{ULFMBF, VLFMBF, LFMBF, HFMBF}\}$, где аббревиатуры обозначают подынтервалы частот исследуемого сигнала: ULF — сверхнизкие частоты, VLF — очень низкие частоты, LF — низкие частоты, HF — высокие частоты.

Для анализа медленного ухода периодичности сигнала в области сверхнизких частот $\mu = \mathrm{ULFMBF}$ необходимо выбрать несколько поддиапазонов частот, причем их границы равны $\{\nu_{\min}, 0.015, 0.04, 0.15, 0.4\,\mathrm{Hz}\}$. Для анализа сигнала в этом поддиапазоне (SBF — subband frequency) мы введем спектральные интегралы $E_\nu(t)$, где индекс ν принимает значения $\nu = \{\mathrm{ULFSBF, VLFSBF, LFSBF, HFSBF}\}$, причем диапазон $\mathrm{SBF} = [\nu_{\min}; 0.4\,\mathrm{Hz}]$.

Для количественного анализа поведения по времени главного хребта, обусловленного периодичностью повторения гауссовских пиков, введем частоту $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$, которая для каждого момента времени t характеризует точку по оси частот, где наблюдается максимум величины $|V(\nu, t)|^2$, причем этот максимум находится в диапазоне частот $[\nu_{\min}; \nu_{\mathrm{HFMBF}}]$, где $\nu_{\mathrm{HFMBF}} = 2$ Hz. На рис. 4 представлена плавная зависимость максимальной частоты $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$ от времени t для сигнала $Z(t)$ из девяти гауссовских пиков (рис. 2). Рассмотрим пик, центрированный в момент $t_6 = 6.946$ s, причем предшествующий промежуток между пиками равен $RR_6 = 894$ ms. В момент времени $t_7 = 7.8985$ s возник следующий пик, причем $RR_7 = 953$ ms. Эти два значения $RR_n < 1000$ ms. Соответственно в промежутке времени $t = [5.98; 8.5\,\mathrm{s}]$ частота $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t) > 1$, причем она достигает максимума $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t) = 1.086$ Hz при $t = 7.59$ s. На границах промежутка времени $T = 10$ s учтены граничные эффекты ($t_L \approx 1.5$ s), поэтому в этих областях $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$ не вычисляется.

Нестационарный сигнал с частотной модуляцией

Рассмотрим сигнал $Z(t)$ (10), который представляет собой $N = 4200$ одинаковых импульсов гауссовской формы, центры которых расположены в точках $t_n = t_{n-1} + RR_n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots, N-1$, RR_n — расстояние между центрами, причем $t_0 = RR_0$, а их ширина $\tau_0 = 0.02$ s. Модель зависимости RR_n от номера n имеет вид: на этапе A, $n = 0, 1, \ldots, n_A$, где $n_A = 1400$, $RR_A = 800$ ms, $\varepsilon = 0.04$

$$RR_n = RR_A\left[1 + \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi F(n) n}{N}\right)\right]. \tag{12}$$

На этапе B $n = n_A + 1, \ldots, n_B$, где $n_B = 2800$, $RR_B = 555.55$ ms, $n_1 = 100$, $\varepsilon = 0.04$,

$$RR_n = \left[RR_B + (RR_A - RR_B)\exp\left(-\frac{(n - n_A)}{n_1}\right)\right] \times \left[1 + \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi F(n) n}{N}\right)\right]. \tag{13}$$

На этапе C $n = n_B + 1, \ldots, N-1$, где $RR_C = 800$ ms, $n_2 = 50$, $\varepsilon = 0.04$,

$$RR_n = \left[RR_B + (RR_C - RR_B)\left(1 - \exp\left(-\frac{n - n_B}{n_2}\right)\right)\right] \times \left[1 + \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi F(n) n}{N}\right)\right], \tag{14}$$

$$F(n) = F_{\min} + \frac{(F_{\max} - F_{\min})}{1 + \exp\left(-\frac{(n - n_0)}{n_T}\right)}, \tag{15}$$

где $F_{\min} = 90$, $F_{\max} = 240$, $n_0 = 2700$, $n_T = 400$, причем $F(0) \approx F_{\min}$, $F(n_0) = (F_{\max} + F_{\min})/2$, $F(N) \approx F_{\max}$. Плавное изменение (тренд) зависимости RR_n определяется экспоненциальными слагаемыми, а переходные периоды — константами n_1 и n_2. Если значение $n = n_A$, то $RR_n \approx RR_A$, при $n = n_B$, $RR_n \approx RR_B$, при $n = N$, $RR_n \approx RR_A$. Безразмерная величина $F(n)$ характеризует

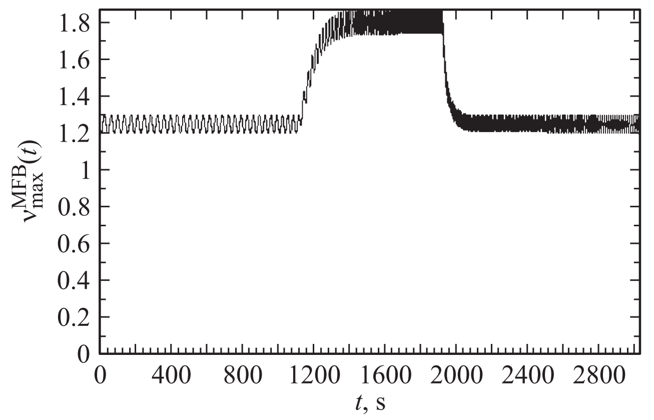

Рис. 5. График максимальной частоты $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ в зависимости от времени t, s для модели (12)–(15).

колебания величины RR_n относительно тренда, причем амплитуда таких колебаний определяется значением $\varepsilon = 0.04$, а их частота возрастает $F(0) \approx F_{\min}$, $F(n_0) = (F_{\max} + F_{\min})/2$, $F(N) \approx F_{\max}$.

Если предположить, что все RR_n одинаковы ($RR_n = RR_A$), то частота главного хребта $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ постоянна $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t) = \nu_A = 1/RR_A = 1.25\,\text{Hz}$.

Если на фоне постоянного значения RR_A существуют колебания с постоянной $F_n = F_{\min}(t)$, то частоту колебаний $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ относительно ν_A можно оценить: $f \approx F_{\min}/(N^* RR_A) \approx 0.027\,\text{Hz}$. Для последовательности RR_n (12–15) наш нестационарный сигнал $Z(t)$ будет иметь сложную частотную модуляцию, имеющую как тренд, так и изменяющиеся колебания относительно тренда. Для анализа такого сигнала исследуется зависимость от времени частоты основного хребта $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$, которая соответствует максимуму $|V(\nu, t)|^2$ в интервале частот основной полосы MFB.

На рис. 5 изображена зависимость $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$, вычисленная для модели (12–15). Нахождение аналитических выражений $|V(\nu, t)|^2$ и величин $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ производилось с очень малым шагом по времени $\Delta t = 0.5\,\text{s}$ и по частоте $\Delta\nu = 0.005\,\text{Hz}$ на всем интервале наблюдения $T = 3029.5\,\text{s}$ для полосы частот $\text{MBF} = [\nu_{\min}; \nu_{\text{HFMBF}} = 2\,\text{Hz}]$, где $\nu_{\min}$ определяется выражением (7). Это эквивалентно нахождению примерно $2.4 \cdot 10^6$ значений $|V(\nu, t)|^2$, что позволило выявить все детали тренда зависимости $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$, на фоне которого происходят изменения частоты таких низкочастотных колебаний f, которые находятся в диапазоне $\text{SBF} = [\nu_{\min}; \nu_{\text{HFSBF}} = 0.4\,\text{Hz}]$.

Анализ рис. 5 показывает, что спектральный состав сигнала $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ меняется со временем, и это является следствием сложного характера частотной модуляции сигнала $Z(t)$ с переменной по времени частотой модуляции $f(t)$. Для такого сигнала его спектральный состав изменяется во времени и зависит от амплитуды модуляции. Численная оценка (рис. 5) показывает, что максимальное значение частоты колебаний $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ относительно тренда $f \approx 0.17\,\text{Hz}$ наблюдается при $t = 1910\,\text{s}$.

Для исследования нестационарности сигнала $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ выполним еще раз CWT по формуле (1) и обозначим такое повторное CWT как $V_{\nu_{\max}}(\nu, t)$. Метод повторного CWT был предложен в работах [12–14] для изучения синусоидальных сигналов. Смысл повторного CWT, примененного нами для системы гауссовских сигналов $Z(t)$ (10), поясним следующим образом. При первом CWT $V(\nu, t)$ (1) сигнала $Z(t)$ (10), имеющего сложную частотную модуляцию, вычисляется $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ — мгновенная частота, обеспечивающая максимальное значение первого CWT $V(\nu, t)$. Полученный нестационарный сигнал $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ также имеет сложную спектральную плотность, которая зависит от времени. Для изучения моментов возникновения и исчезновения характерных низкочастотных колебаний $f(t)$ в сигнале $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ выполняется второе CWT по формуле (1). В этом случае в качестве сигнала выступает $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$, а роль повторного CWT играет $V_{\nu_{\max}}(\nu, t)$. Для повторного CWT также будут вычисляться скелетоны $V_{\nu_{\max}}(\nu, t)$ и строиться спектральные интегралы $E_\nu(t)$ в низкочастотной области $\text{SBF} = [\nu_{\min}; \nu_{\text{HFSBF}} = 0.4\,\text{Hz}]$. В этом случае индекс ν пробегает значения $\nu = (\text{ULFSBF, VLFSBF, LFSBF, HFSBF})$, причем границы поддиапазонов равны $\{\nu_{\min}, 0.015, 0.04, 0.15, 0.4\,\text{Hz}\}$.

На рис. 6 построено повторное вейвлет-преобразование $V_{\nu_{\max}}(\nu, t)$, где величина ν изменяется в диапазоне SBF. Основной хребет $V_{\nu_{\max}}(\nu, t)$ показывает изменение динамики низкочастотных колебаний $f(t)$ во времени, причем $f_{\max}(t) \approx 0.184\,\text{Hz}$ при $t = 1917\,\text{s}$. Скелетон $V_{\nu_{\max}}(\nu, t)$, представленный на рис. 7, кроме основного хребта $f(t)$ демонстрирует еще два пика низкочастотной активности, центрированные в точках $t_A = 1800\,\text{s}$, $t_B = 2700\,\text{s}$, связанные трендом величины $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$. Эти пики хорошо видны на графике спектрального интеграла $E_{\text{ULFSBF}}(t)$, построенного в диапазоне частот $\text{ULFSBF} = [\nu_{\min}; 0.015\,\text{Hz}]$ (рис. 8). Расчет $2\Delta_{\text{FWHM}}$ — полной ширины максимума на половине его высоты

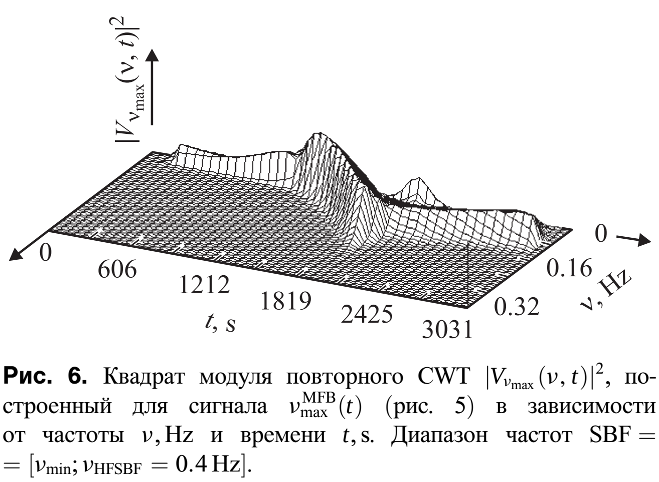

Рис. 6. Квадрат модуля повторного CWT $|V_{\nu_{\max}}(\nu, t)|^2$, построенный для сигнала $\nu_{\max}^{\text{MFB}}(t)$ (рис. 5) в зависимости от частоты ν, Hz и времени t, s. Диапазон частот $\text{SBF} = [\nu_{\min}; \nu_{\text{HFSBF}} = 0.4\,\text{Hz}]$.

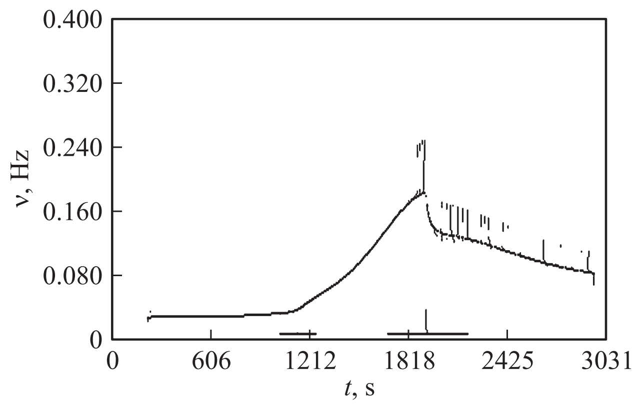

Рис. 7. Скелетон повторного CWT $|V_{\nu_{\max}}(\nu,t)|^2$, вычисленный для сигнала $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$ (рис. 5) в зависимости от частоты ν, Hz и времени t, s.

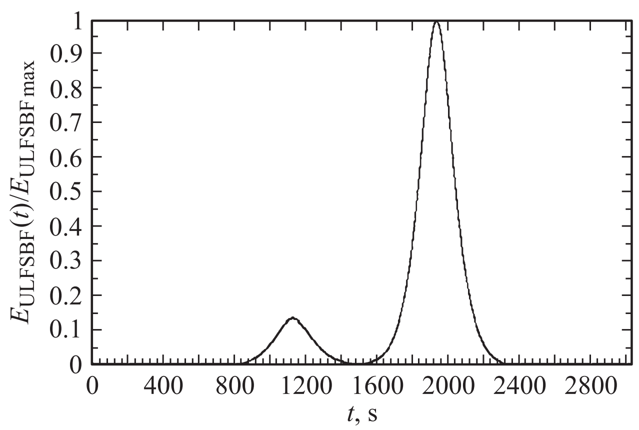

Рис. 8. График отношения спектрального интеграла $E_{\mathrm{ULFSBF}}(t)$, построенный для $V_{\nu_{\max}}(\nu,t)$ (рис. 6), к своему максимальному значению $E_{\mathrm{ULFSBF\,max}}$ в зависимости от времени t, s. Диапазон частот $\mathrm{ULFSBF} = [\nu_{\min}; \nu_{\mathrm{ULFSBF}} = 0.015\,\mathrm{Hz}]$.

(FWHM — full width at half maximum) показывает, что в окрестности t_A величина $2\Delta_{\mathrm{FWHM}}(t_A) \approx 257\,\mathrm{s}$, а для пика вблизи t_B — $2\Delta_{\mathrm{FWHM}}(t_B) \approx 198\,\mathrm{s}$. Эти величины представляют собой уточненные времена переходных периодов $\tau_A = 2\Delta_{\mathrm{FWHM}}(t_A)$, $\tau_B = 2\Delta_{\mathrm{FWHM}}(t_B)$, которые оказалось возможным оценить, построив зависимость числа ударов $RR_n(\mathrm{t})$ (апериодические участки изменения RR_n). Анализ спектрального интеграла $E_{\mathrm{VLFSBF}}(t)$ показывает, что в момент времени $t \approx 1224\,\mathrm{s}$ модулирующая частота f покидает границы диапазона $\mathrm{VLFSBF} = [0.015, 0.04\,\mathrm{Hz}]$. Такое поведение можно увидеть при анализе скелетона $V_{\nu_{\max}}(\nu,t)$, представленного на рис. 7.

Таким образом, изучая поведение спектральных интегралов $E_\nu(t)$ в низкочастотной области SBF, где индекс ν пробегает значения $\nu =$ (ULFSBF, VLFSBF, LFSBF, HFSBF), а границы поддиапазонов равны $\{\nu_{\min}, 0.015, 0.04, 0.15, 0.4\,\mathrm{Hz}\}$, мы можем количественно проанализировать нестационарность нашего сигнала с переменными колебаниями величины $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$ относительно своего тренда. Величины $E_\nu(t)$ свидетельствуют о появлении и исчезновении низких частот f частотной модуляции сигнала $Z(t)$, а также позволяют вычислить характерные времена появления и исчезновения частот в поддиапазонах $\nu =$ (ULFSBF, VLFSBF, LFSBF, HFSBF).

Заключение

Предложена математическая модель нестационарного сигнала $Z(t)$ с частотной модуляцией, состоящего из системы хаотически расположенных по времени гауссовских пиков, центрированных в произвольные моменты времени $t_n = t_{n-1} + RR_n$, которые разделены между собой интервалом RR_n. Для этой модели получено аналическое выражение для непрерывного вейвлетного преобразования CWT. Обсуждено влияние граничных эффектов на вычисление CWT и получена формула для минимальной частоты $\nu_{\min}$, которая может быть корректно зарегистрирована для сигнала конечной продолжительности. Для двух модельных задач (два гауссовских пика и девять хаотически распределенных пиков) показано формирование главного хребта CWT, обусловленного периодичностью следования этих пиков. Продемонстрировано поведение частоты $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$, которая для данного момента времени t определяет максимальное значение $|V(\nu,t)|^2$ CWT, формирующее главный хребет скелетона.

Предложена модель RR_n, которая характеризуется как апериодической зависимостью величины RR_n от номера пика n (тренд), так и колебаниями RR_n относительно этого тренда. Периоды таких колебаний RR_n изменяются с номером n. Для такой модели сложный частотно-модулированный сигнал $Z(t)$ имеет переходные участки плавного изменения частоты, а также колебания частоты относительно тренда с переменным периодом. В области основной полосы исследуемого сигнала $\mathrm{MFB} = [\nu_{\min}; \nu_{\mathrm{HFMFB}}]$, где $\nu_{\mathrm{HFMFB}} = 2\,\mathrm{Hz}$, найдена частота $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$, которая для данного времени t определяет максимальное значение $|V(\nu,t)|^2$ CWT. Нестационарный спектральный состав $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$ проанализирован с помощью повторного вейвлетного преобразования $|V_{\nu_{\max}}(\nu,t)|^2$. Повторное CWT позволяет найти максимальное значение модулирующей частоты низкочастотных колебаний $f_{\max}(t) \approx 0.184\,\mathrm{Hz}$, наблюдающееся в момент времени $t = 1917\,\mathrm{s}$. После нахождения повторного CWT весь поддиапазон частот $\mathrm{SBF} = [\nu_{\min}; \nu_{\mathrm{HFSBF}} = 0.4\,\mathrm{Hz}]$ разбивается на интервалы $\nu =$ (ULFSBF, VLFSBF, LFSBF, HFSBF) и вычисляются все спектральные интегралы $E_\nu(t)$. В интервале $\mathrm{ULFSBF} = [\nu_{\min}; 0.015\,\mathrm{Hz}]$ спектральный интеграл $E_{\mathrm{ULFSBF}}(t)$ позволил определить продолжительность переходных периодов $\tau_A \approx 257\,\mathrm{s}$ и $\tau_B \approx 198\,\mathrm{s}$. Это соответствует периодам апериодического поведения частоты $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$ около моментов времени $t_A = 900\,\mathrm{s}$ и $t_B = 1800\,\mathrm{s}$.

Предлагаемый подход, использующий повторное CWT, позволяет с помощью вычисления спектральных интегралов $E_\nu(t)$ найти характерные масштабы переходных периодов сигнала $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$. Используя различные поддиапазоны частот ν, можно определить времена появления и исчезновения частот колебаний $\nu_{\max}^{\mathrm{MFB}}(t)$ относительно тренда.

Разрабатываемая модель может быть использована для анализа сигналов ритмограммы сердца при холтеровском мониторировании [15–17], для изучения сигналов активности нейрона при генерации спайков [14,18,19], при изучении дневных ритмов животных [20], для изучения нестабильности квантовых стандартов частоты [21–23], для исследования периодических процессов в астрофизике [24–27].

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009–2013)“, грант 2011-1.2.2-201-007-27.

Список литературы

[1] *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
[2] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
[3] *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.412 с.
[4] *Смоленцев Н.К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2008. 448 с.
[5] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. М.: РХД, 2004. 464 с.
[6] *Cohen A.* Numerical Analysis of Wavelet Method. North-Holland: Elsevier Science, 2003. 335 p.
[7] Advances in Wavelet Theory and Their Applications in Engineering, Physics and Technology / Ed. by D. Baleanu. Rijeka: InTech, 2012. 634 p.
[8] *Божокин С.В., Суворов Н.Б.* // Биомедицинская радиоэлектроника. 2008. Вып. 3. С. 21–25.
[9] *Божокин С.В.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 16–24.
[10] *Божокин С.В.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 7. С. 8–13.
[11] *Танканаг А.В., Черемис Н.К.* // Биофизика. 2009. Т. 54. Вып. 3. С. 537–544.
[12] *Sosnovtseva O.V., Pavlov A.N., Mosekilde E., Holstein-Rathlou N.H., Marsh D.J.* // Phys. Meas. 2005. Vol. 26. P. 351–362.
[13] *Addison P.S., Watson J.N.* // Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process. 2004. Vol. 2. P. 43–57.
[14] *Павлов А.Н., Храмов А.Е., Короновский А.А., Ситникова Е.Ю., Макаров В.А., Овчинников А.А.* // УФН. 2012. Т. 182. Вып. 9. С. 905–939.
[15] *Acharya U.R., Joseph K.P., Kannathal N., Lim C.M., Suri J.S.* Med. Bio. Eng. Comput. 2006. Vol. 44. P. 1031–1051.
[16] *Тихоненко В.М.* Практикум по холтеровскому мониторированию. СПб.: БХВ. 2012. 112 с.
[17] *Божокин С.В., Лесова Е.М., Самойлов В.О., Толкачев П.И.* // Биофизика. 2012. Т. 57 № 4. С. 696–712.
[18] *Абарбанель Г.Д., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р, Сущик М.М., Рубчинский Л.Л.* //УФН. 1996. Т. 166. Вып. 4. С. 363–390.
[19] *Chizhov A.V., Graham L.J.* // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. P. 011 910–011 917.
[20] *Zhdanova I.V., Masuda K., Bozhokin S.V., Rosene D.L., González-Martínez J., Schettler S., Samorodinsky E.* // PLos ONE. 2012. Vol. 7. N 3. P. e33327.
[21] *Чирков А.Г., Матисов Б.Г.* Современная теория стабильности прецизионных генераторов. СПб.: Изд-во Политех. ун-та, 2010. 414 с.
[22] *Giordano V., Rubiola E.* // Lect. Notes Phys. 2000.Vol. 550. P. 175–188.
[23] *Riley W.J.* Handbook of Frequency Stability Analysis. Washington: National Institute of Standards and Technology, 2008. 136 p.
[24] *Ryabinkov A.I., Kaurov A.A., Kaminker A.D.* // Astrophys. Space. Sci. 2013. Vol. 344. P. 210–228.
[25] *Backus I., Mitra D., Rankin J.M.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2010. Vol. 404. P. 30–41.
[26] *Lyne A., Hobbs G., Kramer M., Stairs I., Stappers B.* // Science. 2010. Vol. 329. P 408–412.
[27] *Herfindal J.L., Rankin M.J.* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 2007. Vol. 380. P. 430–436.