

06

Проводимость двумерной модели композита со структурной анизотропией

© Б.Я. Балагуров

Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля РАН,
119334 Москва, Россия
e-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru

(Поступило в Редакцию 22 октября 2012 г.)

Рассмотрена проводимость структурно анизотропной двумерной модели композита, представляющей собой изотропную матрицу с системой непроводящих включений в виде взаимно перпендикулярных царапин разной длины. Центры царапин хаотически распределены в плоскости (x, y) . С помощью приближенного метода эффективной среды найдено выражение для тензора эффективной проводимости $\hat{\sigma}_e$, дающее удовлетворительное описание электропроводности этой модели в широком диапазоне изменения концентрации. Проводимость модели в критической области рассмотрена в рамках гипотезы подобия.

Введение

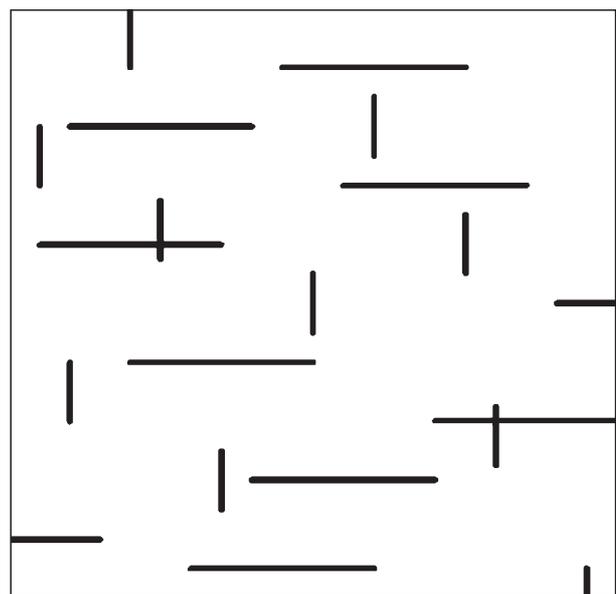
При исследовании проводимости и других электрофизических свойств композитов основное внимание уделяется макроскопически изотропным неоднородным системам. Такое же предпочтение делается и при рассмотрении критических явлений, связанных с фазовым переходом металл–диэлектрик [1,2]. В то же время значительный теоретический и практический интерес представляет также изучение электрофизических свойств менее исследованных анизотропных композиционных материалов. Из работ, посвященных исследованию проводимости этого класса композитов, отметим следующие.

В [3–8] различными методами изучалась проводимость композитов с естественной анизотропией — слоистых типа графита и нитевидных типа TCNQ. В [3] ставился численный эксперимент на кубической решетке (задача связей). В [4–6] рассмотрена проводимость в окрестности порога протекания, а в [7,8] — во всем диапазоне изменения концентрации. В этих работах был выявлен ряд черт, характерных для анизотропных композитов. В частности, было показано, что при приближении к точке фазового перехода металл–диэлектрик исходно резко анизотропный композит становится практически изотропным. При этом соответствующие критические индексы совпадают с их изотропными значениями. В [7,8] рассмотрена также промежуточная область концентраций, в которой свойства анизотропных композитов существенно отличаются от изотропных.

В [9–14] исследовались структурно анизотропные композиты, анизотропия которых создается искусственно — путем введения в изотропную матрицу одинаково ориентированных включений вытянутой, например, формы. В работах [9,10] компьютерными методами определялись пороги протекания (критические концентрации) для двумерных моделей с системой царапин, имеющих преимущественную ориентацию. В [11,12] проведены модельные эксперименты по изучению проводимости тонких металлических пленок со случайно расположен-

ными „включениями“ — вытянутой формы отверстиями (прорезями) с малым отношением ширины к длине. В [13] вычислялась теплопроводность трехмерного композита с системой параллельных включений иглообразной формы. В [14] проводимость двумерной анизотропной модели, аналогичной изученной в работах [9,10], вычислялась с помощью аналитических подходов.

В настоящей работе аналитическими методами исследуется проводимость другой модели структурно анизотропного двумерного композита, изображенной на рисунке. Определены усредненные геометрические характеристики модели и вычислен тензор эффективной проводимости в линейном по концентрации включений (царапин) приближении. Проводимость в широком диапазоне изменения концентрации рассмотрена с помощью приближенного метода — так называемой теории эффективной среды [1], обобщенной на анизотропный



Двумерная модель структурно анизотропного композита.

случай. Как известно, этот метод не может претендовать на адекватное описание проводимости в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик. Тем не менее, как показывает сравнение результатов настоящей работы с [15], это приближение дает для порога протекания значение, количественно близкое к найденной в [15] величине. Поведение проводимости модели при приближении к порогу протекания рассмотрено с привлечением представлений гипотезы подобия [2].

1. Модель

Рассматриваемая модель (рисунок) представляет собой изотропную матрицу проводимости σ_1 с системой непроводящих включений в виде бесконечно тонких отрезков прямых линий — „царапин“. Царапины длины $2a$ (x -включения) направлены вдоль оси x , длины $2b$ (y -включения) — вдоль оси y , а их центры случайно распределены в плоскости (x, y) . Концентрации x - и y -царапин одинаковы. В общем случае (при $a \neq b$) подобная модель структурно анизотропна и ее электропроводность характеризуется эффективным тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$. В частном случае $a = b$ модель макроскопически изотропна и описывается скалярной эффективной проводимостью σ_e .

Обозначим полную размерную концентрацию включений (число включений обоих типов на единице площади) через N . Величина $\ell \sim N^{-1/2}$ дает среднее расстояние между центрами включений (при пуассоновском распределении $\ell = (1/2)N^{-1/2}$). Кроме ℓ и длин царапин $2a, 2b$ для рассматриваемой модели имеется еще две геометрические характеристики — средние расстояния по прямой между включениями: L_x вдоль оси x и L_y вдоль оси y . Для оценки величин L_x и L_y рассмотрим аналогичную модель с включениями в виде эллипсов с малым отношением полуосей a_x и a_y .

Проведем, следуя [7], вдоль оси x прямую линию длины $\mathcal{L} \rightarrow \infty$. На своем пути эта линия пересечет \mathcal{N} включений по хордам длины l_{xi} . При случайном распределении центров включений, согласно [16], имеем

$$c = \frac{1}{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} l_{xi} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{L}} \langle l_x \rangle. \quad (1)$$

Здесь c — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) включений, $\langle l_x \rangle$ — среднее значение длин хорд, по которым пересекаются эллипсы вдоль оси x . С другой стороны, имеем очевидное равенство

$$\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{N}} = L_x + \langle l_x \rangle, \quad (2)$$

где L_x — искомое среднее расстояние между включениями в направлении оси x . Из (1) и (2) находим

$$L_x = \frac{1-c}{c} \langle l_x \rangle. \quad (3)$$

Так как при переходе к царапинам x -включения вклада в $\langle l_x \rangle$ не дают, то при определении величины L_x достаточно ограничиться рассмотрением y -включений. В качестве y -включений выбираем эллипсы с полуосями a_x и a_y , причем $a_x \ll a_y$ и $a_y = b$. В этом случае для безразмерной концентрации c из (3) будем иметь выражение $c = \pi a_x a_y N/2$, так как размерная концентрация как для x -, так и для y -включений равна $N/2$.

Нетрудно видеть, что для выпуклой фигуры среднее значение длины хорды вдоль оси x равно площади s этой фигуры, деленной на длину ее проекции на ось y (см. [16]). Для эллипса $s = \pi a_x a_y$, а для длины этой проекции имеем $2a_y = 2b$. Поэтому $\langle l_x \rangle = \pi a_x/2$, так что из (3) при $a_x \rightarrow 0$ для модели с царапинами получаем

$$L_x = \frac{1}{bN}. \quad (4)$$

Аналогичным образом находим

$$L_y = \frac{1}{aN}, \quad (5)$$

так что

$$\frac{L_x}{L_y} = \frac{a}{b}. \quad (6)$$

Результаты (4), (5) означают, что первая компонента (матрица) в этой модели разделена в среднем на области длины L_x и L_y в направлении осей x и y соответственно.

2. Линейное по концентрации включений приближение

Эффективная электропроводность σ_e изотропной среды, состоящей из матрицы проводимости σ_1 и сферических включений проводимости σ_2 , в линейном по концентрации приближении дается формулой, аналогичной выведенной в книге [17] для диэлектрической проницаемости смеси (см. §9 из [17]). Для такой же среды с включениями произвольной формы величина σ_e может быть выражена в этом приближении через тензор дипольной поляризуемости включений $\hat{\Lambda}$ (см., например, [18]). Для достаточно симметричных фигур, тензор $\hat{\Lambda}$ которых сводится к скаляру Λ , эффективная проводимость имеет вид

$$\sigma_e = \sigma_1 (1 + 4\pi N \Lambda), \quad (7)$$

где, как и выше, N — размерная концентрация включений. Если же $\hat{\Lambda}$ не сводится к скаляру, а включения хаотически ориентированы, то тензор Λ нужно усреднить по углам, так что вместо (7) получим

$$\sigma_e = \sigma_1 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{D} N \text{Sp} \hat{\Lambda} \right\}, \quad (8)$$

где D — размерность пространства.

Наконец, если несимметричные включения одинаково ориентированы, то такая среда и при изотропной матрице становится макроскопически анизотропной. Для

такого структурно анизотропного композита эффективный тензор проводимости в линейном по концентрации приближении имеет вид

$$\hat{\sigma}_e = \sigma_1 (\hat{1} + 4\pi N \hat{\Lambda}). \quad (9)$$

Здесь $\hat{1}$ — единичный диагональный тензор: $(\hat{1})_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. В главных осях тензора $\hat{\Lambda}$

$$\sigma_{ev} = \sigma_1 (1 + 4\pi N \Lambda_v), \quad v = x, y, z. \quad (10)$$

Здесь и ниже используются сокращенные обозначения: $\sigma_{xx} = \sigma_x, \dots, \Lambda_{xx} = \Lambda_x, \dots$

Отметим, что выражения (7)–(10) особенно удобны в предельных случаях диэлектрических и идеально проводящих включений (в том числе и для „бестелесных“, типа царапин), когда для нахождения тензора поляризуемости $\hat{\Lambda}$ достаточно ограничиться внешней задачей. При $D = 2$ для этого можно использовать метод конформных отображений — см., например, [18,19], где тензор поляризуемости $\hat{\Lambda}$ вычислен для ряда двумерных фигур.

Формулы (7)–(10) справедливы для систем с одинаковыми включениями. Для исследуемой в настоящей работе двумерной модели с включениями двух типов выражение, аналогичное (10), имеет вид

$$\sigma_{ev} = \sigma_1 \{1 + 2\pi N [\Lambda_v^{(x)} + \Lambda_v^{(y)}]\}, \quad v = x, y, \quad (11)$$

где учтено, что концентрация каждого типа включений равна $N/2$. В (11) $\Lambda_v^{(x)}$ и $\Lambda_v^{(y)}$ — составляющие тензоров поляризуемости x - и y -включений соответственно. Для непроводящих (d) царапин эти тензоры имеют вид

$$\hat{\Lambda}_d^{(x)} = -\frac{a^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Lambda}_d^{(y)} = -\frac{b^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Поэтому для безразмерных эффективных проводимостей $f_{vd} = \sigma_{ev}^{(d)}/\sigma_1$ из (11), (12) находим

$$f_{xd} = 1 - \frac{N}{N_{Ix}}, \quad N_{Ix} = \frac{2}{\pi b^2}, \quad (13)$$

$$f_{yd} = 1 - \frac{N}{N_{Iy}}, \quad N_{Iy} = \frac{2}{\pi a^2}. \quad (14)$$

Здесь N_{Ix} и N_{Iy} — константы, характеризующие начальные участки зависимостей f_{xd} и f_{yd} от концентрации N . При $a = b$ рассматриваемая модель изотропна: $f_{xd} = f_{yd} = f_d$, где $f_d = 1 - N/N_I$, $N_I = 2/(\pi a^2)$.

Выражения (13), (14) с ростом концентрации N убывают, затем обращаются в нуль и далее становятся отрицательными. Однако распространение этих формул на такие концентрации неправомерно, так как их область применимости ограничена малостью линейных по N поправок по сравнению с единицей. Тем не менее при $a \sim b$ выражения (13), (14) дают, по-видимому, правильную по порядку величины оценку для порога протекания N_c этой модели. Действительно, царапины могут образовать бесконечный кластер [2], если среднее

расстояние между их центрами $\ell \sim N^{-1/2}$ не превосходит величины $\sim a$, откуда для критической концентрации получаем оценку $N_c \sim 1/a^2$.

При $b \neq a$ царапины пересекутся и образуют бесконечный кластер, если среднее расстояние L_y вдоль оси y не превосходит величины $\sim b$, а L_x — величины $\sim a$. Оба этих условия дают для порога протекания порядковую оценку

$$N_c \sim 1/(ab), \quad (15)$$

справедливую при любом соотношении между a и b .

3. Приближение эффективной среды

Для описания проводимости рассматриваемой модели при немалых концентрациях применим приближенный метод — так называемую теорию эффективной среды [1]. Это приближение неплохо зарекомендовало себя при изучении как изотропных [1], так и анизотропных [8] неупорядоченных композитов в широком диапазоне изменения концентрации. Как и всякая теория типа самосогласованного поля, этот метод неприменим в окрестности точки фазового перехода металл–диэлектрик. Однако и в этом случае теория эффективной среды дает правильную по порядку величины оценку для порога протекания.

Для вывода основных уравнений приближения эффективной среды в задаче о проводимости n -компонентного композита усредним вектор $\mathbf{J} = \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e \mathbf{E}$ по объему (площади при $D = 2$) образца V . Так как по определению эффективного тензора проводимости $\langle \mathbf{j} \rangle = \hat{\sigma}_e \langle \mathbf{E} \rangle$, то среднее значение вектора \mathbf{J} равно нулю. С другой стороны,

$$\langle \mathbf{j} - \hat{\sigma}_e \mathbf{E} \rangle = - \sum_{i=1}^n (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \frac{1}{V} \int_{V_i} \mathbf{E} dV, \quad (16)$$

где $\hat{\sigma}_i$ — тензор проводимости i -й компоненты, а интеграл берется по ее объему V_i . С учетом равенства нулю левой части тождество (16) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n N_i (\hat{\sigma}_e - \hat{\sigma}_i) \left\{ \int_{V_i} \mathbf{E} dV \right\}_i = 0. \quad (17)$$

Здесь N_i — число включений i -й компоненты в единице объема, интегрирование в (17) ведется по объемам включений этой компоненты. Под $\{\dots\}_i$ понимается усреднение по разным включениям i -й компоненты.

Приближение метода эффективной среды состоит в замене величины $\{\dots\}_i$ в (17) на интеграл от напряженности электрического поля \mathbf{E}_i внутри некоторого среднего i -го включения, помещенного в матрицу („эффективную среду“) с тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$.

Форму „включений“ первой (с изотропной проводимостью σ_1) компоненты выбираем из тех соображений,

что они в среднем имеют размер L_x вдоль оси x и L_y вдоль оси y . Согласно (6), $L_x/L_y = a/b$, так что в качестве „включения“ первой компоненты возьмем эллипс с отношением полуосей

$$a_x/a_y = \gamma, \quad \gamma = a/b. \quad (18)$$

Выбор эллиптической формы продиктован тем, что внутри такого включения напряженность электрического поля может быть найдена в явном виде. Для сохранения площади включения следует положить $a_x = L_x/\sqrt{\pi}$ и $a_y = L_y/\sqrt{\pi}$. Параметр γ , введенный в (18), характеризует степень анизотропии модели.

В данном случае главные оси тензора $\hat{\sigma}_e$ совпадают как с осями симметрии этого эллипса, так и с осями координат x и y . Поэтому, согласно формуле (П27) из Приложения для составляющих напряженности электрического поля \mathbf{E}_1 внутри рассматриваемого эллипса, имеем

$$E_{1\nu} = \frac{\sigma_{e\nu}}{\sigma_{e\nu} - (\sigma_{e\nu} - \sigma_1) \bar{n}^{(\nu)}} E_{0\nu}, \quad \nu = x, y. \quad (19)$$

Здесь $\sigma_{e\nu}$ — главные значения тензора $\hat{\sigma}_e$, $\mathbf{E}_0 = \langle \mathbf{E} \rangle$ — напряженность электрического поля вдали от включения, $\bar{n}^{(\nu)}$ — коэффициенты деполяризации эллипса с полуосями

$$\bar{a}_\nu = a_\nu/\sqrt{\sigma_{e\nu}}, \quad \nu = x, y. \quad (20)$$

В рассматриваемом двумерном случае коэффициенты деполяризации имеют простой вид

$$\bar{n}^{(x)} = \frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x + \bar{a}_y}, \quad \bar{n}^{(y)} = \frac{\bar{a}_x}{\bar{a}_x + \bar{a}_y}, \quad (21)$$

откуда с учетом (18) и (20) для величин $\bar{n}^{(\nu)}$ из (19) получаем окончательно

$$\bar{n}^{(x)} = \frac{1}{1 + \lambda \gamma}, \quad \bar{n}^{(y)} = \frac{\lambda \gamma}{1 + \lambda \gamma}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}}}. \quad (22)$$

Поле, определенное в (19), однородно, и поэтому интегрирование напряженности $E_{1\nu}$ сводится просто к умножению ее на соответствующую площадь.

Интеграл от напряженности электрического поля \mathbf{E} по площади включения произвольной формы может быть выражен, как и для изотропной среды [18], через некоторый тензор дипольной поляризуемости. Отличие состоит в том, что в данном случае включение окружено анизотропной матрицей с тензором проводимости $\hat{\sigma}_e$. Поэтому предварительно нужно перейти к некоторой „штрихованной“ системе, в которой внешняя по отношению к включению среда изотропна.

Рассмотрим двумерную систему, для которой главные оси тензоров проводимости матрицы $\hat{\sigma}_e$ и включения $\hat{\sigma}_2$ совпадают с декартовыми осями x и y . Преобразуем координаты, напряженность электрического поля \mathbf{E} и плотность тока \mathbf{j} следующим образом [14]:

$$x = x', \quad y = \lambda y', \quad \lambda = \sqrt{\sigma_{ey}/\sigma_{ex}}, \quad (23)$$

$$E_x = \lambda E'_x, \quad E_y = E'_y, \quad (24)$$

$$j_x = j'_x, \quad j_y = \lambda j'_y \quad (25)$$

с тем же, что и в (22), параметром λ .

В штрихованной системе уравнения постоянного тока сохраняют свой вид, а окружающая включение среда изотропна с законом Ома

$$\mathbf{j}' = \sigma_0 \mathbf{E}', \quad \sigma_0 = \sqrt{\sigma_{ex} \sigma_{ey}}. \quad (26)$$

При этом меняется тензор проводимости $\hat{\sigma}_2 = \{\sigma_{2x}, \sigma_{2y}\}$ включения: $\hat{\sigma}'_2 = \{\sigma'_{2x}, \sigma'_{2y}\}$, где

$$\sigma'_{2x} = \lambda \sigma_{2x}, \quad \sigma'_{2y} = \lambda^{-1} \sigma_{2y}. \quad (27)$$

Подчеркнем, что при преобразовании (23)–(25) изменяется не только проводимость включения, но и его форма. В то же время изотропия внешней среды дает принципиальную возможность вычислить для такого преобразованного включения соответствующий тензор дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}'$.

Теперь рассмотрим задачу для двумерного анизотропного макроскопического тела с тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, находящегося в вакууме и помещенного во внешнее однородное электрическое поле напряженности \mathbf{E}_0 . Дипольный момент \mathbf{p} равен интегралу по площади этой фигуры s от вектора поляризации \mathbf{P} :

$$\mathbf{p} = \int_s \mathbf{P} dS = \frac{1}{4\pi} \int_s (\mathbf{D} - \mathbf{E}) dS = \frac{\hat{\epsilon} - \hat{1}}{4\pi} \int_s \mathbf{E} dS, \quad (28)$$

где \mathbf{D} — вектор электрической индукции. С другой стороны, дипольный момент выражается через \mathbf{E}_0 следующим образом:

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0, \quad (29)$$

где $\hat{\Lambda}$ — тензор дипольной поляризуемости тела, имеющий в двумерном случае размерность площади.

При диагональных тензорах $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\Lambda}$ из (28), (29) находим ($\nu = x, y$)

$$\int_s E_\nu dS = \frac{4\pi}{\epsilon_\nu - 1} p_\nu = \frac{4\pi}{\epsilon_\nu - 1} \Lambda_\nu E_{0\nu}. \quad (30)$$

Для соответствующей задачи о проводимости в штрихованной системе аналогичное соотношение следует из (30) при замене $\epsilon_\nu \rightarrow \sigma'_{2\nu}/\sigma_0$:

$$\int_{s'} E'_\nu dS' = -4\pi \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'_{2\nu}} \Lambda'_\nu E'_{0\nu}. \quad (31)$$

Поэтому для исходной анизотропной системы при $\nu = x$ имеем

$$\int_s E_x dS = \lambda^2 \int_{s'} E'_x dS' = -4\pi \lambda \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \sigma'_{2x}} \Lambda'_x E_{0x}. \quad (32)$$

Аналогичное равенство имеет место и при $\nu = y$. В результате, подставляя выражения для σ_0 и $\sigma'_{2\nu}$ из (26), (27), находим искомое соотношение

$$\int_s E_\nu dS = -4\pi\lambda \frac{\sigma_{ev}}{\sigma_{ev} - \sigma_{2\nu}} \Lambda'_\nu E_{0\nu}, \quad \nu = x, y. \quad (33)$$

Здесь Λ'_ν — составляющие тензора дипольной поляризуемости преобразованного включения, вычисленные в штрихованной системе.

Подстановка в (17) (после указанной выше замены $\{\dots\}_i$ на интегралы от \mathbf{E}_i) выражений (19) и (33) приводит к искомым уравнениям приближения эффективной среды

$$p \frac{\sigma_{ev} - \sigma_1}{\sigma_{ev} - (\sigma_{ev} - \sigma_1) \bar{n}^{(\nu)}} - 4\pi\lambda N \Lambda'_\nu = 0, \quad \nu = x, y \quad (34)$$

с λ из (23). В (34) p — доля площади, занимаемой первой компонентой.

Для рассматриваемой модели имеется два типа включений нулевой площади, так что $p = 1$ и основное уравнение приближения эффективной среды принимает вид ($\nu = x, y$)

$$\frac{\sigma_{ev} - \sigma_1}{\sigma_{ev} - (\sigma_{ev} - \sigma_1) \bar{n}^{(\nu)}} - 2\pi\lambda N [(\Lambda_\nu^{(x)})' + (\Lambda_\nu^{(y)})'] = 0. \quad (35)$$

Здесь учтено, что оба типа включений имеют одинаковую концентрацию $N/2$. В штрихованной системе x -царапины остаются неизменными, а y -царапина меняет длину ($b' = b/\lambda$), так что

$$(\hat{\Lambda}_d^{(x)})' = -\frac{a^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\hat{\Lambda}_d^{(y)})' = -\frac{b^2}{4\lambda^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Подстановка (36) в (35) дает уравнения, из которых для безразмерных проводимостей $f_{\nu d} = \sigma_{ev}^{(d)}/\sigma_1$ получаем следующие выражения:

$$f_{xd} = \frac{1 - g \lambda^{-1} \bar{n}^{(x)}}{1 + g \lambda^{-1} \bar{n}^{(y)}}, \quad g = \pi b^2 N/2, \quad (37)$$

$$f_{yd} = \frac{1 - g \gamma^2 \lambda \bar{n}^{(y)}}{1 + g \gamma^2 \lambda \bar{n}^{(x)}}, \quad \gamma = \frac{a}{b}. \quad (38)$$

Величины $\bar{n}^{(x)}$, $\bar{n}^{(y)}$ и λ определены в (22); при выводе (37), (38) использовано соотношение $\bar{n}^{(x)} + \bar{n}^{(y)} = 1$.

Так как $\lambda^2 = f_{yd}/f_{xd}$, то для определения параметра λ получаем следующее уравнение:

$$\lambda^2 = \frac{1 - g \gamma^2 \lambda \bar{n}^{(y)}}{1 + g \gamma^2 \lambda \bar{n}^{(x)}} \frac{1 + g \lambda^{-1} \bar{n}^{(y)}}{1 - g \lambda^{-1} \bar{n}^{(x)}}. \quad (39)$$

Формулы (37)–(39) вместе с выражениями (22) для $\bar{n}^{(\nu)}$ дают решение поставленной задачи в рамках приближения эффективной среды. При малой концентрации включений $N \rightarrow 0$ параметр $\lambda \rightarrow 1$ и из (37), (38) следуют выражения (13), (14).

4. Предельные случаи

Анализ формул (37)–(39) при произвольных значениях величин a , b и N требует привлечения численных методов. Ниже ограничимся рассмотрением некоторых предельных случаев.

1. При $b = 0$ ток, направленный вдоль непроницаемых x -царапин, не испытывает сопротивления и из формулы (37) следует очевидный результат $f_{xd} = 1$. В этом случае $\bar{n}^{(x)} = 0$ и $\bar{n}^{(y)} = 1$, так что из (38) получаем равенство

$$f_{yd} = 1 - \pi a^2 \lambda N. \quad (40)$$

Здесь для сохранения смысла величины N как концентрации включений произведена замена $N \rightarrow 2N$, так как в пределе $b = 0$ число царапин уменьшается в 2 раза. В данном случае $\lambda = \sqrt{f_{yd}}$, так что равенство (40) является квадратным уравнением для параметра λ

$$\lambda^2 + \pi a^2 N \lambda - 1 = 0, \quad (41)$$

из которого для $f_{yd} = \lambda^2$ находим

$$f_{yd} = \left[\sqrt{1 + 1/4(\pi a^2 N)^2} - (1/2)\pi a^2 N \right]^2. \quad (42)$$

Уравнение (41) для параметра λ в пределе $b \rightarrow 0$ следует также и из (39) после замены N на $2N$.

При $a^2 N \gg 1$ из формулы (42) следует асимптотическое выражение

$$f_{yd} \simeq \frac{1}{(\pi a^2 N)^2}, \quad (43)$$

согласующееся с порядковой оценкой, приведенной для этой модели в работе [7]. В этом случае проводимость f_{yd} обращается в нуль только в пределе $N \rightarrow \infty$.

2. При $a = b$ ($\gamma = 1$) модель макроскопически изотропна: $f_{xd} = f_{yd} = f_d$ и параметр $\lambda = 1$. При этом $\bar{n}^{(x)} = \bar{n}^{(y)} = 1/2$, так что из (37), (38) следует

$$f_d = \frac{1 - (1/4)\pi a^2 N}{1 + (1/4)\pi a^2 N}. \quad (44)$$

В этой модели имеется порог протекания — проводимость f_d обращается в нуль при критической концентрации

$$N_c = \frac{4}{\pi a^2}. \quad (45)$$

Порог протекания для двумерных моделей с хаотически распределенными царапинами вычислялся компьютерными методами в работах [9,10,15]. В соответствующих результатах имеется определенный разброс, однако все они описываются формулой, аналогичной (45):

$$N_c = \frac{B}{\pi a^2}, \quad B \simeq 4.2 \div 4.6. \quad (46)$$

Таким образом, предсказываемое приближением эффективной среды значение порога протекания (45) довольно близко к наблюдаемому в компьютерных экспериментах.

3. В общем случае $a \neq b$ для отыскания порога протекания полагаем числители выражений (37) и (38) равными нулю. Каждое из получившихся двух уравнений решаем относительно величины g . Приравнявая полученные выражения для g , находим уравнение для определения параметра $\lambda = \lambda_c$ в точке фазового перехода металл–диэлектрик. Решением этого уравнения является

$$\lambda_c = \gamma^{-1}, \quad (47)$$

так что для критического значения величины g находим

$$g_c = 2/\gamma, \quad (48)$$

откуда для искомого порога протекания получаем

$$N_c = \frac{4}{\pi ab}. \quad (49)$$

Выражение (49) согласуется с порядковой оценкой (15). Сравнение (49) с (13), (14) показывает, что в рамках приближения эффективной среды имеет место соотношение

$$N_c = 2 \sqrt{N_{Ix} N_{Iy}}, \quad (50)$$

связывающее порог протекания данной модели с величинами, характеризующими начальные участки зависимостей f_{xd} и f_{yd} от концентрации N .

Для того чтобы найти проводимости f_{xd} и f_{yd} при $N \rightarrow N_c - 0$, положим в уравнении (39)

$$\lambda = \lambda_c + \delta\lambda, \quad g = g_c + \delta g \quad (51)$$

с λ_c и g_c из (47), (48). В результате при $\delta g \rightarrow 0$ находим

$$\delta\lambda = \frac{1}{3} \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \delta g. \quad (52)$$

Подстановка (52) в (37), (38) дает

$$f_{xd} \simeq \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \frac{N_c - N}{N_c}, \quad f_{yd} \simeq \frac{1}{1 + \gamma^2} \frac{N_c - N}{N_c}, \quad (53)$$

где $\gamma = a/b$ и $(N_c - N)/N_c \ll 1$. Из (53) следует, что в пределе $N \rightarrow N_c$ имеем $\lambda = \sqrt{f_{yd}/f_{xd}} \rightarrow 1/\gamma$, что согласуется с (47).

5. Критическая область

Как и во всяком приближении типа самосогласованного поля, проводимости f_{xd} и f_{yd} из (53) при $N \rightarrow N_c$ линейно зависят от параметра близости к точке фазового перехода $\tau = (N_c - N)/N_c$. Однако, как и в изотропном случае [2], в реальности эти зависимости являются, по-видимому, степенными с соответствующими критическими индексами. Для выяснения поведения проводимостей f_{xd} и f_{yd} в критической области (окрестности порога протекания) поступим следующим образом.

Преобразуем координаты, напряженность электрического поля и плотность тока по формулам (25)–(27) с параметром λ , определенным из условия $b' = b/\lambda = a$, так что

$$\lambda = b/a = \gamma^{-1}. \quad (54)$$

При таком преобразовании исходно изотропная матрица со скалярной проводимостью σ_1 становится анизотропной с тензором проводимости $\hat{\sigma}'_1 = (\sigma'_{1x}, \sigma'_{1y})$, где

$$\sigma'_{1x} = \lambda \sigma_1, \quad \sigma'_{1y} = \lambda^{-1} \sigma_1. \quad (55)$$

Аналогичными соотношениями связаны составляющие тензоров эффективной проводимости исходной $\hat{\sigma}_e$ и штрихованной $\hat{\sigma}'_e$ систем

$$\sigma_{ex} = \lambda^{-1} \sigma'_{ex}, \quad \sigma_{ey} = \lambda \sigma'_{ey}. \quad (56)$$

Величины L_x и L_y из (4), (5) преобразуются следующим образом: $L'_x = L_x$ и с учетом (54)

$$L'_y = \lambda^{-1} L_y = L'_x. \quad (57)$$

Наконец, меняется и концентрация:

$$N' = \lambda N. \quad (58)$$

Таким образом, в штрихованной системе включения имеют одинаковую длину, а их распределение структурно (геометрически) изотропно.

Заметим, что критическая концентрация является чисто геометрической характеристикой модели и определяется конкретным распределением диэлектрических включений. При этом величина порога протекания не зависит от проводящей компоненты, которая может быть как изотропной, так и анизотропной. Поэтому для критической концентрации штрихованной системы N'_c аналогично (46) имеем

$$N'_c = \frac{B}{\pi a^2}, \quad (59)$$

где константа B — та же, что и в (46). Из (59) с учетом (54) и (58) для порога протекания исследуемой модели получаем выражение

$$N_c = \frac{B}{\pi ab}, \quad (60)$$

которое отличается от (49) только величиной коэффициента B (см. формулу (46)).

Согласно сказанному выше, штрихованная система представляет собой двумерный композит изотропной структуры с матрицей, обладающей проводимостью с естественной анизотропией. Как отмечалось в работах [4–8], такой композит при приближении к порогу протекания становится практически изотропным, так что $\sigma'_{ex} \simeq \sigma'_{ey}$. Так, если эффективная электропроводность σ'_e композита той же структуры со скалярной проводимостью σ'_1 при $N \rightarrow N_c$ убывает по закону

$$\tau \rightarrow 0: \quad \sigma'_e \simeq A \sigma'_1 \tau^t, \quad \tau = \frac{N_c - N}{N_c}, \quad (61)$$

то для анизотропного случая при $\sigma'_{1x} \gg \sigma'_{1y}$ будем иметь [8]

$$\tau \rightarrow 0: \quad \sigma'_{ex} \simeq \sigma'_{ey} \simeq 2A \sigma'_{1y} \tau^t \quad (62)$$

с тем же („изотропным“) критическим индексом $t \simeq 1.3$. В (61) и (62) A — численный коэффициент порядка единицы.

В формуле (62) учтено, что основной вклад в сопротивление композита как целого вносят участки путей протекания с наименьшей проводимостью σ'_{1y} . Появление коэффициента 2 в формуле (62) связано с тем, что участки с проводимостями σ'_{1x} и σ'_{1y} встречаются в среднем одинаково часто и при $\sigma'_{1x} \gg \sigma'_{1y}$ участки с σ'_{1x} вносят в сопротивление пренебрежимо малый вклад.

При произвольном соотношении между σ'_{1x} и σ'_{1y} для удельного сопротивления путей протекания будем иметь

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma'_{1x}} + \frac{1}{\sigma'_{1y}} \right), \quad (63)$$

так что вместо (62) получим

$$\tau \rightarrow 0: \quad \sigma'_{ex} \simeq \sigma'_{ey} \simeq 2 \frac{\sigma'_{1x} \sigma'_{1y}}{\sigma'_{1x} + \sigma'_{1y}} A \tau^t. \quad (64)$$

Для изотропного случая ($\sigma'_{1x} = \sigma'_{1y} = \sigma'_1$) отсюда следует выражение (61), а при $\sigma'_{1x} \gg \sigma'_{1y}$ — формула (62).

Подстановка в (64) выражений (55) при $\lambda = 1/\gamma$ дает

$$\sigma'_{ex} \simeq \sigma'_{ey} \simeq \sigma_1 \frac{\gamma}{1 + \gamma^2} 2A \tau^t. \quad (65)$$

Наконец, из равенств (56) с учетом формул (65) для безразмерных эффективных проводимостей $f_{vd} = \sigma_{ev}^{(d)}/\sigma_1$ находим окончательно

$$\tau \rightarrow 0: \quad f_{xd} \simeq 2A \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2} \tau^t, \quad f_{yd} \simeq 2A \frac{1}{1 + \gamma^2} \tau^t \quad (66)$$

с τ из (61) и $\gamma = a/b$.

Выражения (66), выведенные в предположении об „одножилности“ путей протекания (модель Шкловского–де Жена), отличаются от результатов приближения эффективной среды (53) только заменой τ на τ^t и численным коэффициентом $2A \sim 1$. В то же время такое предположение не вполне корректно, особенно в двумерном случае. Поэтому выражения (66) представляют собой интерполяционные формулы, дающие правильные результаты как в изотропном, так и в предельно анизотропном случаях.

Приложение

В изотропном случае двумерная задача о включении в виде эллипса во внешнем электрическом поле решается с помощью эллиптических координат [20]. Приведем решение аналогичной задачи для анизотропного случая.

Рассматриваем включение эллиптической формы (с тензором проводимости $\hat{\sigma}^{(i)}$), находящееся в анизотропной матрице (с тензором проводимости $\hat{\sigma}^{(e)}$) и помещенное в однородное электрическое поле напряженности \mathbf{E}_0 . Считаем, что главные оси как эллипса, так и тензоров $\hat{\sigma}^{(i)}$ и $\hat{\sigma}^{(e)}$, совпадают и образуют декартову систему координат. Граница эллипса с полуосями a_x и a_y задается уравнением $F(x, y) = 0$, где

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} - 1. \quad (П1)$$

Эллиптические координаты (μ, θ) при $a_x > a_y$ вводят следующим образом [20]:

$$x = z_0 \operatorname{ch} \mu \cos \theta, \quad y = z_0 \operatorname{sh} \mu \sin \theta. \quad (П2)$$

Координаты μ и θ меняются в пределах: $0 \leq \mu \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Граница эллипса дается уравнением $\mu = \mu_0$, а $\mu > \mu_0$ отвечает его внешности. Для большой a_x и малой a_y полуосями имеем: $a_x = z_0 \operatorname{ch} \mu_0$, $a_y = z_0 \operatorname{sh} \mu_0$, так что

$$z_0 = \sqrt{a_x^2 - a_y^2}, \quad \mu_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{a_x - a_y}{a_x + a_y}. \quad (П3)$$

Нормальная производная от некоторой функции ψ на границе эллипса вычисляется следующим образом [20]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{h_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad h_\mu = z_0 \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu - \cos^2 \theta} \quad (П4)$$

при $\mu = \mu_0$.

1. Сначала решим задачу о включении в виде эллипса с анизотропной проводимостью (с тензором $\hat{\sigma}_2$), находящемся в изотропной матрице проводимости σ_0 . Направим \mathbf{E}_0 вдоль оси x , так что потенциал внешнего однородного поля будет иметь вид

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = -E_{0x} x = -z_0 E_{0x} \operatorname{ch} \mu \cos \theta. \quad (П5)$$

Потенциал вне эллипса ($\mu > \mu_0$) ищем в виде

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) - z_0 E_{0x} B e^{-\mu} \cos \theta. \quad (П6)$$

Поле внутри эллипса оказывается, как и в изотропном случае, однородным, так что

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{r}) = A \varphi_0(\mathbf{r}) \quad (П7)$$

с $\varphi_0(\mathbf{r})$ из (П5).

На границе эллипса должны выполняться соответствующие граничные условия. Из первого — непрерывности потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ при $\mu = \mu_0$ — находим

$$B = (A - 1) \operatorname{ch} \mu_0 e^{\mu_0}. \quad (П8)$$

Второе условие — это непрерывность нормальной составляющей плотности тока: $j_n^{(e)} = j_n^{(i)}$, где согласное (П4) и (П6),

$$j_n^{(e)} = -\sigma_0 \left[\frac{1}{h_\mu} \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \mu} \right]_{\mu=\mu_0} = \sigma_0 \frac{\operatorname{sh} \mu_0 - B e^{-\mu_0}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu_0 - \cos^2 \theta}} E_{0x}. \quad (П9)$$

Для $j_n^{(i)}$ имеем выражение

$$j_n^{(i)} = -n_x \sigma_{2x} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x}, \quad (\text{П10})$$

где n_x — проекция на ось x единичного вектора внешней нормали \mathbf{n} к границе эллипса.

Вектор \mathbf{n} выражается через функцию $F(x, y)$ из (П1) следующим образом:

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|}. \quad (\text{П11})$$

Для $|\nabla F|$ из (П1) находим

$$|\nabla F| = 2 \sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a_x^2} + \frac{\sin^2 \theta}{a_y^2}} = \frac{2z_0}{a_x a_y} \sqrt{\text{ch}^2 \mu_0 - \cos^2 \theta}, \quad (\text{П12})$$

так что

$$n_x = \frac{\text{sh} \mu_0 \cos \theta}{\sqrt{\text{ch}^2 \mu_0 - \cos^2 \theta}}. \quad (\text{П13})$$

Для $j_n^{(i)}$ из (П10) с учетом (П7) и (П13) получаем

$$j_n^{(i)} = \sigma_{2x} \frac{A \text{sh} \mu_0 \cos \theta}{\sqrt{\text{ch}^2 \mu_0 - \cos^2 \theta}} E_{0x}. \quad (\text{П14})$$

Используя выражения (П9) и (П14), из условия $j_n^{(e)} = j_n^{(i)}$ находим соотношение

$$\sigma_0 (\text{sh} \mu_0 - B e^{-\mu_0}) = \sigma_{2x} A \text{sh} \mu_0. \quad (\text{П15})$$

Из равенств (П8) и (П15) находим

$$A = \sigma_0 \frac{1 + \text{cth} \mu_0}{\sigma_0 \text{cth} \mu_0 + \sigma_{2x}}. \quad (\text{П16})$$

Подставляя μ_0 из (П3), приведем величину A к виду

$$A = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_{2x}) n^{(x)}}, \quad n^{(x)} = \frac{a_y}{a_x + a_y}. \quad (\text{П17})$$

Для коэффициента B из (П8) следует выражение

$$B = \frac{a_x a_y}{z_0^2} \frac{\sigma_0 - \sigma_{2x}}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_{2x}) n^{(x)}}. \quad (\text{П18})$$

В (П17), (П18) $n^{(x)}$ — один из коэффициентов деполяризации эллипса (эллиптического цилиндра). Аналогичным образом рассматривается случай, когда напряженность \mathbf{E}_0 направлена вдоль оси y .

В результате для составляющих напряженности электрического поля внутри эллипса из (П7) и (П17) получаем

$$E_v^{(i)} = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_{2v}) n^{(v)}} E_{0v}, \quad v = x, y. \quad (\text{П19})$$

Вдали от включения потенциал в двумерном случае имеет следующую асимптотику ($r \rightarrow \infty$):

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) \simeq \varphi_0(\mathbf{r}) + 2 \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{r^2} + \dots, \quad \mathbf{p} = \hat{\Lambda} \mathbf{E}_0. \quad (\text{П20})$$

Так как при $r \rightarrow \infty$ имеем $e^{-\mu} \cos \theta \simeq (1/2)z_0 x/r^2$ и $e^{-\mu} \sin \theta \simeq (1/2)z_0 y/r^2$, то сравнение асимптотики выражения (П6) (и аналогичной формулы при $\mathbf{E}_0 \parallel y$) с (П20) дает

$$\Lambda_v = -\frac{a_x a_y}{4} \frac{\sigma_0 - \sigma_{2v}}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_{2v}) n^{(v)}}, \quad v = x, y. \quad (\text{П21})$$

Для безразмерной поляризуемости $\alpha_v = \Lambda_v/s$ (где $s = \pi a_x a_y$ — площадь эллипса) из (П21) следует

$$\alpha_v = -\frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_0 - \sigma_{2v}}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_{2v}) n^{(v)}}. \quad (\text{П22})$$

В (П19) и (П21), (П22) $n^{(v)}$ — коэффициенты деполяризации эллипса с полуосями a_x и a_y .

2. Задача об эллипсе в анизотропной среде сводится к предыдущей с помощью преобразования (23)–(25) к штрихованной системе с параметром

$$\lambda = \sqrt{\sigma_y^{(e)}/\sigma_x^{(e)}}. \quad (\text{П23})$$

При таком преобразовании исходный эллипс с полуосями a_x и a_y переходит в „штрихованный“ с полуосями

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = \lambda^{-1} a_y \quad (\text{П24})$$

и тензором проводимости $\hat{\sigma}'_2$ с составляющими

$$\sigma'_{2x} = \lambda \sigma_x^{(i)}, \quad \sigma'_{2y} = \lambda^{-1} \sigma_y^{(i)}. \quad (\text{П25})$$

Матрица становится изотропной со скалярной проводимостью

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_x^{(e)} \sigma_y^{(e)}}. \quad (\text{П26})$$

При этом выражения (П19), (П21), (П22) будут относиться уже к преобразованной („штрихованной“) системе.

В соответствии с (П25), (П26) $\sigma'_{2v}/\sigma_0 = \sigma_v^{(i)}/\sigma_v^{(e)}$, так что из „штрихованного“ равенства (П19) следует искомое выражение для напряженности электрического поля внутри эллипса:

$$E_v^{(i)} = \frac{\sigma_v^{(e)}}{\sigma_v^{(e)} - (\sigma_v^{(e)} - \sigma_v^{(i)}) \bar{n}^{(v)}} E_{0v}, \quad v = x, y. \quad (\text{П27})$$

Здесь учтено, что составляющие векторов $\mathbf{E}^{(i)}$ и \mathbf{E}_0 преобразуются одинаково. Для изотропного ($\sigma_v^{(i)} = \sigma_1$) эллипса формула (П27) переходит в соотношение (19) из основного текста.

Аналогичная замена в (П21) для составляющих тензора поляризуемости $\hat{\Lambda}'$ преобразованного эллипса дает выражение

$$\Lambda'_v = -\frac{a_x a_y}{4\lambda} \frac{\sigma_v^{(e)} - \sigma_v^{(i)}}{\sigma_v^{(e)} - (\sigma_v^{(e)} - \sigma_v^{(i)}) \bar{n}^{(v)}}. \quad (\text{П28})$$

Так как площадь преобразованного эллипса $s' = \pi a'_x a'_y = \lambda^{-1} \pi a_x a_y$, то для соответствующей безразмерной поляризуемости из (П28) получаем

$$\alpha'_v = -\frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_v^{(e)} - \sigma_v^{(i)}}{\sigma_v^{(e)} - (\sigma_v^{(e)} - \sigma_v^{(i)}) \bar{n}^{(v)}}. \quad (\text{П29})$$

Отметим, что $E_v^{(i)}$ из (П27) и Λ'_v из (П28) тождественно удовлетворяют общему соотношению типа (33).

В (П27)–(П29) величины $\bar{n}^{(v)}$ — коэффициенты деполаризации эллипса с полуосями a'_x и a'_y из (П24), так что

$$\bar{n}^{(x)} = \frac{a_y}{\lambda a_x + a_y}, \quad \bar{n}^{(y)} = \frac{\lambda a_x}{\lambda a_x + a_y} \quad (\text{П30})$$

с λ из (П23). Введением полуосей $\bar{a}_x = a_x / \sqrt{\sigma_x^{(e)}}$ и $\bar{a}_y = a_y / \sqrt{\sigma_y^{(e)}}$ эти выражения приводятся к стандартному виду (21).

Для диэлектрического ($\sigma_v^{(i)} = 0$) эллипса из (П28) получаем

$$(\Lambda_{vd})' = -\frac{a_x a_y}{4\lambda} \frac{1}{1 - \bar{n}^{(v)}}. \quad (\text{П31})$$

При переходе от эллипса к x -царапине нужно положить $a_x = a$ и $a_y \rightarrow 0$, а для y -царапины $a_x \rightarrow 0$ и $a_y = b$. В результате для тензоров $(\Lambda_d^{(x)})'$ и $(\Lambda_d^{(y)})'$ из (П31) следуют выражения (36).

Список литературы

- [1] Kirkpatrick S. // Rev. Mod. Phys. 1973. Vol. 45. N 4. P. 574.
- [2] Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. // УФН. 1975. Т. 117. Вып. 3. С. 401.
- [3] Bernasconi J. // Phys. Rev. B. 1974. Vol. 9. N 10. P. 4575.
- [4] Shklovskii B.I. // Phys. Stat. Sol. B. 1978. Vol. 85. N 2. P. K111.
- [5] Шкловский Б.И. // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7. Вып. 21. С. 1312.
- [6] Lobb C.J., Frank D.J., Tinkham M. // Phys. Rev. B. 1981. Vol. 23. N 5. P. 2262.
- [7] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. Вып. 6. С. 2053.
- [8] Балагуров Б.Я. // ФГТ. 1985. Т. 27. Вып. 8. С. 2375.
- [9] Balberg I., Binenbaum N. // Phys. Rev. B. 1983. Vol. 28. N 7. P. 3799.
- [10] Boudville W.J., McGill T.C. // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 39. N 1. P. 369.
- [11] Tobochnik J., Dubson M.A., Wilson M.L., Thorpe M.F. // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 40. N 9. P. 5370.
- [12] Han K.H., Lee J.O., Lee Sung-Ik // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 44. N 13. P. 6791.
- [13] Balagurov B.Ya., Vinogradov G.A. // Composites: Part A. 2006. Vol. 37. N 10. P. 1805.
- [14] Балагуров Б.Я. // ЖЭТФ. 2010. Т. 137. Вып. 2. С. 301.
- [15] Pike G.E., Seager C.H. // Phys. Rev. B. 1974. Vol. 10. N 4. P. 1421.
- [16] Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.

- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 662 с.
- [18] Балагуров Б.Я. // ЖТФ. 1982. Т. 52. Вып. 5. С. 850.
- [19] Балагуров Б.Я. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 5. С. 1.
- [20] Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. II. М.: ИЛ, 1960. 896 с.