

## Краткие сообщения

### 05 О полой сверхпроводящей сфере во внешнем магнитном поле

© С.Н. Сазонов

Уфимский государственный авиационный технический университет,  
450000 Уфа, Россия  
e-mail: SazonovSN@mail.ru

(Поступило в Редакцию 23 мая 2012 г. В окончательной редакции 3 сентября 2012 г.)

Рассмотрена система, состоящая из однодоменного ферромагнитного шарика, покрывающей его сферической сверхпроводящей оболочки и намотанных поверх нее токонесущих проводов. В рамках теории Лондона вычислен магнитный момент сверхпроводника, в частности, при равенстве нулю-вектору суммы магнитных моментов шарика и системы токов.

К настоящему времени в литературе по феноменологической теории сверхпроводимости Ф. Лондона и Г. Лондона исчерпывающе разобрана задача об отклике сверхпроводящего шара на внешнее однородное магнитное поле величиной ниже критической ([1] и цитированные там более ранние работы). Между тем в [2] была в числе прочего поставлена и решена в лондонском приближении задача о нахождении поля внутри сверхпроводящего пространства, окружающего однодоменный ферромагнитный шар. Настоящая работа посвящена решению задачи, объединяющей задачи из [1 и 2], а именно задачи об отклике полой сверхпроводящей сферы внутреннего радиуса  $h$  и наружного радиуса  $a$  на поле, создаваемое находящимся внутри нее однородно намагниченным ферромагнитным шаром с магнитным

дипольным моментом  $\mathbf{p}_m$ , на которое накладывается однородное внешнее поле  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . Это последнее, будем считать, создается системой токов в круговых витках, лежащих на концентрической со сверхпроводником сфере радиуса  $a + \Delta a$  (рис. 1).

Обозначим через  $V$  объем сверхпроводника,  $\lambda(T)$  — глубина проникновения поля в сверхпроводник при температуре  $T$ , области вакуумного промежутка между ферромагнетиком и сверхпроводником присвоим индекс  $n = 1$ , а области вакуумного промежутка между сверхпроводником и токонесущими проводами —  $n = 2$ . Область  $R > a + \Delta a$  назовем внешним пространством. Пусть  $\mathbf{B}(\mathbf{R})$  — магнитная индукция в данной точке  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{R})$  — вектор-потенциал в калибровке Лондона там же. Тогда уравнение Лондона для сверхпроводника запишется как

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}) = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} \mathbf{A}(\mathbf{R}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{j}$  — плотность сверхтока. В частных случаях: 1)  $h = 0$  ([1]) и 2)  $a \rightarrow \infty$  ([2]),

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \omega(R) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (2)$$

где  $\omega(R)$  — функция только от модуля  $R$  радиуса-вектора  $\mathbf{R}$ . Такого же типа решение будем искать и в общем случае. Подставляя (2) в (1) с учетом уравнения Максвелла  $\text{rot } \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{j}$ , получим для функции  $\omega$  уравнение

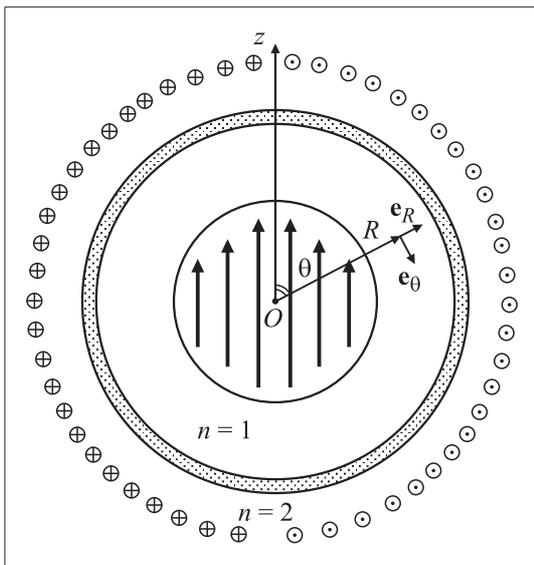
$$r^2 \omega'' + 2r \omega' - (r^2 + 2)\omega = 0, \quad (3)$$

где  $r = R/\lambda$ . Общее решение (3) имеет вид [3]

$$\omega(r) = C_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \exp(r) + C_2 \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \exp(-r), \quad (4)$$

где константы  $C_1$  и  $C_2$  пока неизвестны. Для их нахождения решение (2) с  $\omega(R)$  из (4) необходимо гладко сшить с имеющими такую же угловую зависимость (2) решениями уравнения магнитостатики ( $n = 1, 2$ ):

$$\text{rot rot } \mathbf{A}_n = 0 \quad (5)$$



**Рис. 1.** Полая сверхпроводящая сфера (сверхпроводящая оболочка) в поле системы токонесущих проводов и ферромагнитного шарика, однородно намагниченного вдоль оси  $Oz$ . Показаны орты сферической системы координат, используемой в тексте.

вне сверхпроводника ( $\mathbf{A}_n$  — вектор-потенциал в области с соответствующим индексом на рис. 1). Эти решения имеют вид

$$\mathbf{A}_n(r) = \left( K_n R + \frac{D_n}{R^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad (6)$$

где  $K_n$  и  $D_n$  — константы, частично известные из условия задачи ( $K_2 = B_{\text{ext}}/2$ ,  $D_1 = p_m$ ), частично подлежащие определению ( $K_1, D_2$ ). Условия непрерывности вектора магнитной индукции (гладкости вектор-потенциала) на двух поверхностях сверхпроводника дают 4 линейных уравнения с четырьмя неизвестными  $C_1, C_2, K_1, D_2$ . Решение этой системы уравнений имеет вид

$$C_1 = \frac{1}{S} \left( \frac{p_m}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{a}{\lambda}\right) + \frac{3}{2} B_{\text{ext}} a W_1 \exp\left(-\frac{h}{\lambda}\right) \right), \quad (7)$$

$$C_2 = \frac{1}{S} \left( \frac{p_m}{\lambda^2} \exp\left(\frac{a}{\lambda}\right) + \frac{3}{2} B_{\text{ext}} a U_1 \exp\left(\frac{h}{\lambda}\right) \right). \quad (8)$$

(Остальные константы интереса для дальнейшего не представляют). Здесь

$$U_1 = \frac{h^2}{3\lambda^2} - \frac{h}{\lambda} + 1, \quad W_1 = \frac{h^2}{3\lambda^2} + \frac{h}{\lambda} + 1,$$

$$U_2 = \frac{a^2}{3\lambda^2} - \frac{a}{\lambda} + 1, \quad W_2 = \frac{a^2}{3\lambda^2} + \frac{a}{\lambda} + 1,$$

$$S = -U_1 \exp\left(-\frac{a-h}{\lambda}\right) + W_1 \exp\left(\frac{a-h}{\lambda}\right).$$

По определению магнитный момент сверхпроводника

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{R}'; \mathbf{j}(\mathbf{R}')] dV'. \quad (9)$$

Подставляя в правую часть (9) последовательно формулы (1), (2), (4), (7) и (8), находим

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & -p_m \left( 1 - \frac{2a}{\lambda S} \right) + \frac{3B_{\text{ext}} a \lambda^2}{2S} \left( U_1 W_2 \exp\left(-\frac{a-h}{\lambda}\right) \right. \\ & \left. - U_2 W_1 \exp\left(\frac{a-h}{\lambda}\right) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим частный случай, когда провода, создающие однородное магнитное поле, намотаны через тонкий слой изоляции прямо поверх наружной поверхности сверхпроводника ( $\Delta a \ll a$ ). Как известно из общего курса физики ([4]), магнитный момент такой системы токов  $\mathbf{p}' = \mathbf{B}_{\text{ext}} a^3 / 2$ . Предположим, что  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}_m$ , т.е. при температурах выше температуры  $T_{\text{cr}}$  перехода металла оболочки в сверхпроводящее состояние магнитное поле во внешнем пространстве отсутствовало. При охлаждении системы ниже  $T_{\text{cr}}$ , как следует из (10), оболочка приобретет магнитный момент:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \chi \mathbf{p}_m = -\mathbf{p}_m \\ & \times \frac{(1-k)^2 \varepsilon - (k^2 + k - 2) \tanh k\varepsilon + 3\varepsilon^{-2}(k\varepsilon - \tanh k\varepsilon) - \varepsilon \cosh^{-1} k\varepsilon}{(1 + (1-k)^2 \varepsilon^2 / 3) \tanh k\varepsilon + (1-k)\varepsilon} \end{aligned} \quad (11)$$

( $k = 1 - h/a$ ,  $\varepsilon = a/\lambda$ ), и такое поле появится. Функция  $\chi(\varepsilon)$  ведет себя как  $\varepsilon^2$  при малых  $\varepsilon$  (температуры слегка ниже  $T_{\text{cr}}$ ) и как  $\varepsilon^{-1}$  при больших (температуры значительно ниже  $T_{\text{cr}}$ ). Таким образом, если нагревать систему от температуры  $T < T_{\text{cr}}$ , в окрестности точки перехода  $T_{\text{cr}}$  произойдет всплеск магнитного поля в пространстве вблизи сверхпроводника, а при дальнейшем нагреве поле падает до нуля. Причину этого явления легко понять — при  $T \ll T_{\text{cr}}$  сверхток наружной поверхности сверхпроводника экранирует поле  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ , а сверхток его внутренней поверхности экранирует поле ферромагнетика. Вблизи точки перехода эта экранировка ослабевает из-за роста величины  $\lambda$  и условие компенсации магнитных моментов внутренней и внешней половинок оболочки нарушается.

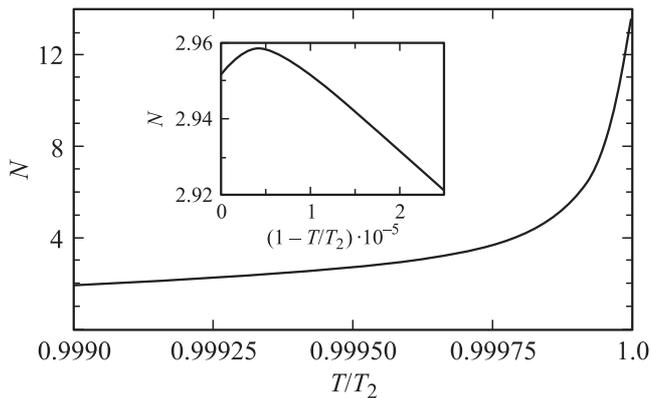
Рассмотрим конкретный пример свинцовой оболочки с  $a = 1$  см и толщиной менее  $10 \mu\text{m}$ . Свинец является сверхпроводником I рода, для которого уравнение локальной электродинамики сверхпроводников (1) будет справедливо [5] при таких температурах, что  $\lambda(T) \gg \xi_0$ , где  $\xi_0$  — размер куперовской пары. Используя эмпирическую формулу  $\lambda(T) = \lambda(0) / \sqrt{1 - (T/T_{\text{cr}})^4}$  [5], значения  $\lambda(0) = 40$  нм и  $\xi_0 = 83$  нм из [6], и, взяв в качестве нижней температуры  $T_1$ , при которой справедлива локальная электродинамика, соотношение  $\lambda(T_1) = 7.5\xi_0$ , получим  $T_1/T_{\text{cr}} = 1 - 10^{-3}$ . Сверху область температур, для которой применима теория Лондонов, ограничена такой температурой  $T_2$ , при которой еще удовлетворяется требование [7]  $B_{\text{max}} \ll B_{\text{cr}}(T_2)$ . Здесь  $B_{\text{cr}}$  — критическое поле сверхпроводника при данной температуре,  $B_{\text{max}}$  — максимальное значение индукции суммарного поля в объеме  $V$ . Расчет по формулам (2), (4), (7), (8) показывает, что при  $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}_m$  оно достигается на внутреннем экваторе полой сферы и равно

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{max}} = & -\frac{2\mathbf{p}_m}{Sh^3} \left\{ \left( 1 + \frac{h^2}{\lambda^2} \right) \sinh \frac{a-h}{\lambda} \right. \\ & \left. + \frac{h}{\lambda} \cosh \frac{a-h}{\lambda} + \frac{2h^3}{\lambda a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что при  $T = T_2$  все еще  $h \gg \lambda(T_2)$ . Тогда (12) сводится к  $B_{\text{max}} \approx 3p_m/h^3 = 3a^3 B_{\text{ext}}/2h^3$ . Зададимся значением  $B_{\text{max}} = 1$  мГс. Тогда  $B_{\text{ext}} = 0.667$  мГс. Линейная плотность наружного тока, согласно [4],  $i(\theta) = ((3cB_{\text{ext}})/8\pi) \sin \theta = i_{\text{max}} \sin \theta$ .

Подставляя найденное значение  $B_{\text{ext}}$ , получим  $i_{\text{max}} = 80 \mu\text{A}/\text{mm}$ . Ограничимся сверху температурой  $T_2$  такой, что  $B_{\text{cr}}(T_2) = 7.5B_{\text{max}} = 7.5$  мГс. По графику  $B_{\text{cr}}(T)$  для Pb из [8] найдем  $T_2/T_{\text{cr}} = 1 - 5 \cdot 10^{-6}$ , при этом  $\lambda(T_2) = 10 \mu\text{m}$ . Пусть  $\Phi$  — поток вектора индукции поля сверхтока через круг, ограниченный наружным экватором оболочки,  $\Phi_0$  — квант магнитного потока ( $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-7}$  Гс · см<sup>2</sup>). Обозначим далее

$$N = \Phi/\Phi_0 = \oint_{\substack{R=a, \\ \theta=\pi/2}} [\mathcal{F}; \mathbf{R}] d\mathbf{l} / a^3 \Phi_0 = 2\pi p_m |\chi| / a \Phi_0. \quad (13)$$



**Рис. 2.** Зависимость магнитного потока поля сверхтока через круг наружного экватора оболочки в единицах кванта магнитного потока при ее толщине  $a - h = 10 \mu\text{m}$  от температуры. Максимум кривой выходит за пределы области применимости теории. Вставка: то же при  $a - h = 2 \mu\text{m}$ . Максимум кривой находится в пределах области применимости теории.

На рис. 2 показана зависимость величины  $N$  от температуры в том интервале температур, где справедлива вышеизложенная теория. Как видно: 1) эффект всплеска магнитного поля во внешнем пространстве при прохождении температуры системы через величину  $T_{\text{cr}}$  является в принципе наблюдаемым, 2) эффект может быть рассчитан в рамках простейшей феноменологической теории сверхпроводимости Ф. Лондона и Г. Лондона (при  $a - h \gg 1 \mu\text{m}$ , для расчета максимума  $|\chi|$  требуется теория Гинзбурга–Ландау).

## Список литературы

- [1] *Matute E.A.* // Am. J. Phys. 1999. Vol. 67. N 9. P. 786–788.
- [2] *Hurault J.P., Pincus P.* // J. Low Temp. Phys. 1969. Vol. 1. N 3. P. 129–135.
- [3] *Никифоров А.Ф., Уваров В.Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978. 320 с.
- [4] *Сборник задач по общему курсу физики — электричество и магнетизм* / Под ред. И.А. Яковлева. М.: Наука, 1977. С. 201.
- [5] *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. М.: Наука, 1982. 240 с.
- [6] *де Жен П.Г.* Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968. С. 31.
- [7] *Гинзбург В.Л.* // УФН. 2000. Т. 170. № 6. С. 619–630.
- [8] *Ашкрофт Н., Мермин Н.Д.* Физика твердого тела. Т. 2. М.: Мир, 1979. С. 360.