

03

## Численное моделирование развития зоны энергоподвода в покоящейся воздушной среде и в сверхзвуковом потоке при взаимодействии с прямым скачком

© А.А. Желтоводов, Е.А. Пимонов

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
630090 Новосибирск, Россия  
email: zhelt@itam.nsc.ru; pimonov@ngs.ru

(Поступило в Редакцию 6 марта 2012 г.)

Продемонстрированы возможности использования уравнений Эйлера для численного моделирования развития зон локализованного энергоподвода в покоящемся воздухе, а также при взаимодействии с прямым скачком уплотнения в условиях сверхзвукового течения в канале. На основе сравнений с известными экспериментальными данными для оптического разряда в покоящемся воздухе и расчетами сверхзвукового течения в рамках уравнений Навье–Стокса с учетом эффектов реального газа обоснована возможность предсказания реализующихся газодинамических эффектов с использованием  $T$ - и  $q$ -моделей энергоподвода для идеального совершенного газа. Детально проанализировано изменение газодинамической структуры и параметров течения в окрестности зоны энергоподвода, развивающейся в неподвижной среде и в условиях ее взаимодействия с прямым скачком при различной интенсивности подвода энергии.

### Введение

Изучение возможностей управления сверхзвуковыми течениями подводом энергии в газовые потоки с помощью электрических, оптических или СВЧ-разрядов является актуальной проблемой аэрогазодинамики. Такие воздействия могут как вызывать глобальную перестройку внешнего обтекания летательных аппаратов и сопровождаться снижением их волнового сопротивления, изменением подъемной силы и аэродинамических моментов, так и влиять на локальную ударно-волновую структуру, поверхностное трение, пики давлений и тепловых потоков в окрестности их отдельных элементов. Наряду с задачами внешней аэродинамики активно изучаются возможности использования локализованного энергоподвода для управления течениями в каналах, например, с целью повышения эффективности воздухозаборников, а также интенсификации процессов смешения и стабилизации горения в камерах сгорания. Это и другие направления исследований отражены, например, в обзорах [1–6].

Применение оптических и СВЧ-разрядов позволяет дистанционно управлять течениями в различных условиях. Согласно экспериментальным исследованиям (см., например, [7–14]), при фокусировании лазерного излучения в некотором конечном объеме покоящегося газа происходит оптический пробой. При этом вследствие распространения светодетонационной волны навстречу лазерному лучу образуется вытянутая зона плазмы, вокруг которой со временем развивается тороидальное вихревое кольцо. В процессе поглощения энергии лазерного излучения таким плазменным образованием формируется распространяющаяся в окружающей среде ударная волна, которая довольно быстро приобретает сферическую форму. При точечной фокусировке ла-

зерного излучения в объеме с диаметром в пределах нескольких десятков микрон наблюдается радиальное расширение практически сферической плазменной зоны с окружающей ее сферической ударной волной [15].

Для предсказания параметров течения в условиях оптического разряда в покоящемся газе используются как известные теоретические подходы, так и численные расчеты в рамках моделей совершенного идеального и вязкого газа, а также на основе более сложных моделей, учитывающих эффекты реального газа при высоких температурах среды. Например, в [9] энергия в зоне энергоподвода оценивалась на основе теории сильного точечного взрыва, развитой Л.И. Седовым [16], с привлечением экспериментальных данных по скорости распространения фронта сферической ударной волны. Вместе с тем, как показано в [11], такой способ может заметно завышать ожидаемый уровень подводимой энергии в конечном объеме оптического разряда. В работе [10] рассмотрены результаты экспериментальных и расчетных исследований течений в окрестности оптических разрядов различной формы. Продемонстрированы отличающиеся вихревые структуры, возникающие в зонах энергоподвода в зависимости от конфигурации распространяющихся ударных волн на ранних стадиях их развития. Показано, что расчеты для идеального сжимаемого газа качественно верно воспроизводят наблюдавшиеся в экспериментах закономерности развития таких течений.

Формирование тороидального вихря вокруг вытянутой зоны энергоподвода численно исследовалось в работе [17] в вязком газе с учетом эффектов ионизации и диссоциации. Показано хорошее соответствие эксперименту полученного в расчете изменения радиуса сферической ударной волны, и отмечено его отличие от предложенного Тейлором [18] закона подобия, который аналогично

теории Л.И. Седова описывает ее развитие в условиях точечного взрыва. В численном исследовании на основе уравнений Эйлера и Навье–Стокса [15] этот закон подобия удачно использован в качестве начального условия для расчетов параметров течения за сферическими ударными микроволнами в окрестности реализованных в эксперименте точечных оптических разрядов. Продемонстрировано удовлетворительное соответствие предсказываемых полей давления, плотности и скорости за ударной волной в условиях невязкого и вязкого течений. В [12] для моделирования мгновенного энергоподвода с постоянной плотностью в идеальном совершенном газе в качестве начального задавалось гауссовское распределение температуры в конечном сферическом объеме, определяемое уровнем подводимой энергии. Выполненные на этой основе численные расчеты в рамках одномерных уравнений Навье–Стокса продемонстрировали хорошее соответствие полученным в этой же работе экспериментальным данным для радиуса сферической ударной волны, а также распределениям плотности, давления и температуры за ее фронтом вокруг зоны энергоподвода в условиях оптического разряда.

В работе [19] применительно к оптическому разряду развита более сложная математическая модель энергоисточника, учитывающая процессы поглощения, отражения и излучения энергии, возникающей вытянутой областью плазмы, а также ионизацию, диссоциацию и неравновесную химическую кинетику. Эта модель была откалибрована с привлечением экспериментальных данных [11] с целью прогнозирования распространения оптического разряда в покоящемся воздухе на основе численного решения уравнений Навье–Стокса. Уточненная таким способом модель была применена в [19] для расчетов экспериментально изученных в [11] взаимодействий лазерного разряда с головным скачком, а также с пересекающимися в режиме Эдни-IV головным и падающим косым скачками перед сферой в воздушном потоке при числе Маха  $M_\infty = 3.45$ . Выполненный в [20] предварительный анализ результатов расчетов взаимодействия сферической зоны энергоподвода при моделировании взаимодействия оптического разряда фиксированной мощности с прямым скачком в канале в рамках уравнений Эйлера для совершенного газа показал, что реализующаяся газодинамическая структура течения близка к предсказываемой с учетом плазменных эффектов на основе подхода, развитого в [19]. Этот вывод подтверждают и результаты работы [21], в которой рассчитывалось аналогичное течение как с использованием упрощенной модели энергоподвода со сферическим энергоисточником, так и на основе модели [19], учитывающей эффекты реального газа. Применение упрощенной модели энергоподвода совместно с численным решением осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, дополненных  $k-\omega$ -моделью турбулентности, оказалось эффективным для предсказания эволюции отрывной зоны на стенках канала в условиях прохождения фокусированного разряда через

прямой скачок [21]. Аналогичный подход использован и в работе [22], где продемонстрировано хорошее соответствие результатов таких расчетов экспериментальным данным [11,23] по газодинамической структуре течений и распределениям давления на поверхности сферы в условиях взаимодействия сносимого сверхзвуковым потоком оптического разряда с головным скачком, а также с пересекающимися в режиме Эдни-IV головным и падающим косым скачками перед сферой. На этой основе дополнительно спрогнозированы ожидаемые тепловые потоки на поверхности в таких условиях.

Рассмотренные выше и продолжающиеся активные исследования возможностей управления сверхзвуковыми течениями (см., например, [24–28]) свидетельствуют о перспективности использования упрощенных моделей энергоподвода для идеального совершенного газа при проведении параметрических расчетов применительно к задачам аэрогазодинамики. Настоящая работа является продолжением ранее начатых исследований [20] и посвящена изучению возможностей численного моделирования развития одиночной зоны энергоподвода в покоящейся воздушной среде, а также эволюции течения в условиях ее взаимодействия с прямым скачком уплотнения в цилиндрическом канале при изменении подводимой мощности в набегающий сверхзвуковой поток.

## Методика расчетов

Численные исследования развития одиночной зоны энергоподвода в покоящемся воздухе и ее воздействия на прямой скачок уплотнения в сверхзвуковом потоке в канале проводились в осесимметричной постановке на основе уравнений Эйлера, записанных в консервативной форме для цилиндрической системы координат

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = H, \quad (1)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{pmatrix},$$

$$H = -\frac{1}{y} \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \\ (e+p)v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho q \end{pmatrix}.$$

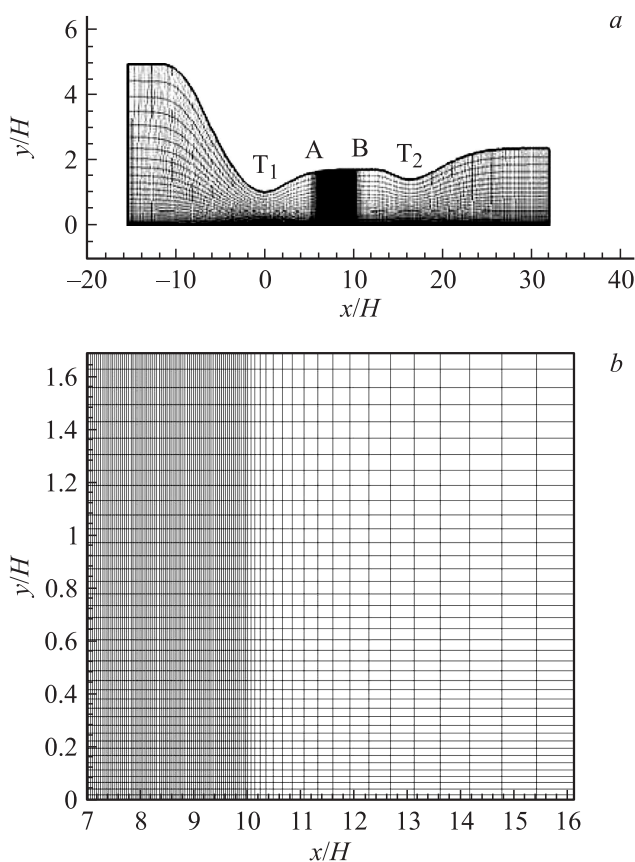
Ось симметрии  $x$  ориентирована горизонтально и в условиях сверхзвукового потока совпадает с его направлением;  $y$  — расстояние по вертикали от оси симметрии канала;  $\rho$  — плотность;  $u, v$  — компоненты скорости в направлениях  $x$  и  $y$ ;  $p$  — статическое давление;  $e = p/(\gamma - 1) + 0.5\rho(u^2 + v^2)$  — полная удельная энергия (для единицы объема идеального калорически совершенного газа);  $q$  — удельная мощность энергоподвода

(в единицу массы), способ определения которой описан ниже для рассматриваемых различных моделей.

Для решения уравнений (1) использована конечно-объемная схема типа Годунова третьего порядка по пространству, в которой потоки через грани расчетной ячейки на текущем временном слое находятся решением локальной одномерной задачи Римана HLLEM-методом [29]. С целью повышения порядка точности без потери монотонности алгоритма применялась процедура MUSCL-интерполяции [30]. Интегрирование по времени проводилось по явной TVD-схеме Рунге–Кутты третьего порядка. Временной шаг вычислялся из условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви при значении соответствующего числа  $C_{FL} = 0.5$ .

Численное моделирование распространения зоны энергоподвода в покоящемся воздухе проводилось в прямоугольной расчетной области размером  $50 \times 25 \text{ mm}$  в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно. Количество узлов в ней во всех расчетах с равномерной ортогональной сеткой было  $800 \times 400$ . Такое достаточное разрешение обосновано проверенной сходимостью решений на сетках при постепенном увеличении их размерности.

Взаимодействие сферической зоны энергоподвода с прямым скачком моделировалось в цилиндрической части канала А–В (рис. 1, *a*), течение в которой расчи-



**Рис. 1.** Расчетная область: *a* — для всего канала [20], *b* — принятая для участка А–В (показана каждая пятая линия сетки).

тывалось ранее [20,31]. Эта часть располагалась между критическими сечениями первого ( $\Gamma_1$ ) и второго ( $\Gamma_2$ ) сопел. Число Маха потока на выходе из первого сопла достигало значения  $M_\infty = 2$ , и в цилиндрической части перед вторым соплом возникал прямой скачок, за которым поток повторно разгонялся до сверхзвуковой скорости. Использувавшаяся в данных исследованиях расчетная область протяженностью  $\Delta x/H = 9$  (рис. 1, *b*) соответствовала цилиндрическому участку исходного канала  $x/H = 7-16$  (рис. 1, *a*), где  $H = 1$  — принятый радиус первого критического сечения  $\Gamma_1$ . Относительный радиус этого участка  $H_{AB}/H = 1.6869$ . Расчеты выполнены с использованием ортогональной сетки  $500 \times 200$ , выбранной на основе проверки сходимости решения на последовательности сгущающихся сеток ( $300 \times 100$ ;  $500 \times 200$ ;  $700 \times 300$ ), которые экспоненциально сгущались в направлении к оси симметрии. В продольном направлении при  $x/H > 10$  было применено их экспоненциальное растяжение до выходной границы с целью сохранения достаточного разрешения в основной области расчетов (рис. 1, *b*). Эта граница была смещена достаточно далеко вправо для того, чтобы исключить ее влияние на получаемые решения.

Граничные условия задавались при помощи двух слоев фиктивных ячеек окружающих расчетную область. На оси симметрии ( $y = 0$ ) использовались условия непротекания. При этом на остальных трех границах в случае одиночного разряда в покоящемся воздухе выполнялись мягкие граничные условия (условия свободного выхода газа). В случае течения в канале с прямым скачком на входной границе задавались условия набегающего потока:  $M_\infty = 2$ ,  $T_\infty = 157 \text{ K}$ ,  $\rho_\infty = 0.667 \text{ kg/m}^3$  с показателем адиабаты  $\gamma = c_p/c_v = 1.4$ , а на верхней и выходной границах — мягкие граничные условия. Прямой скачок задавался на основе соотношений Рэнкина–Гюгонно.

## Модели энергоподвода

В расчетах для идеального совершенного газа использовались две упрощенные модели энергоподвода, которые не учитывают процессы ионизации и диссоциации, а также химические реакции, проявляющиеся в реальном газе при высоких температурах. С целью демонстрации применимости таких моделей проводится сравнение расчетов на их основе с экспериментами [12] с оптическим разрядом в покоящемся воздухе и упомянутыми выше расчетами [19,20], моделировавшими взаимодействие оптического разряда с прямым скачком в сверхзвуковом потоке с учетом отмеченных эффектов реального газа.

Применявшаяся первая так называемая  $T$ -модель [12,20] предполагает мгновенный электроподвод в сферическую или эллипсоидальную область и нулевое значение источникового члена  $q \equiv 0$  в уравнении сохранения энергии системы (1). Подвод энергии задается распределением температуры в начальный

момент времени  $t = 0$ , которое для источника в виде эллипсоида с центром в точке  $(x_0, y_0)$  и размерами полуосей  $R_x$  и  $R_y$  определяется соотношением

$$T(x, y) = T_\infty + \Delta T(x, y) = T_\infty + \Delta T_0 \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{kR_x} \right)^2 - \left( \frac{y - y_0}{kR_y} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где  $T_\infty$  — температура окружающего газа или набегающего потока,  $\Delta T_0 = T_0 - T_\infty$  — приращение температуры в центре зоны энергоподвода. Чем меньше параметр  $0.5 \leq k \leq 1$ , тем меньше разрыв газодинамических параметров на границе  $((x - x_0)/R_x)^2 + ((y - y_0)/R_y)^2 = 1$  зоны энергоподвода. Значение определяющего параметра модели  $\Delta T_0$  рассчитывалось по формуле

$$\Delta T_0 = \frac{E_A}{\rho_\infty c_V I}, \quad (3)$$

где  $E_A$  — поглощенная средой энергия,  $\rho_\infty$  — плотность газа в набегающем потоке,  $c_V$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, а значение интеграла

$$I = \int_{V_0} \exp \left[ - \left( (x - x_0)/kR_x \right)^2 - \left( (y - y_0)/kR_y \right)^2 \right] dV$$

находилась численно. Далее в работе анализируются расчеты для сферических зон энергоподвода с  $R_x = R_y = R_0$ . Как видно,  $T$ -модель позволяет моделировать только единичный импульс энергоподвода и при этом никак не учитывает его продолжительность.

Более гибкой является другая так называемая  $q$ -модель (см., например, [20,32]). Такая модель позволяет анализировать влияние стационарного, одиночного и импульсно-периодического подводов энергии различной продолжительности  $\tau$  и частоты  $f_0$ . Для  $q$ -модели источник энергии  $\rho q$  в уравнении сохранения энергии не нулевой, и подводимая удельная мощность  $q$  (в единицу массы) в области в виде эллипсоида с центром в точке  $(x_0, y_0)$  и размерами полуосей  $R_x$  и  $R_y$  определяется формулой

$$q(x, y, t) = q_0 f(t) \exp \left[ - \left( \frac{x - x_0}{kR_x} \right)^2 - \left( \frac{y - y_0}{kR_y} \right)^2 \right], \quad (4)$$

где  $q_0$  — удельная мощность энергоподвода в центре энергоисточника, параметр  $0.5 \leq k \leq 1$  определяет значения  $q$  на границе области энергоподвода. Для одиночного импульса энергии продолжительностью  $\tau$  функция

$$f(t) \equiv \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t. \end{cases}$$

Определяющий параметр модели  $q_0$  находится по соотношению

$$q_0 = \frac{E_A}{\rho_\infty \tau I}. \quad (5)$$

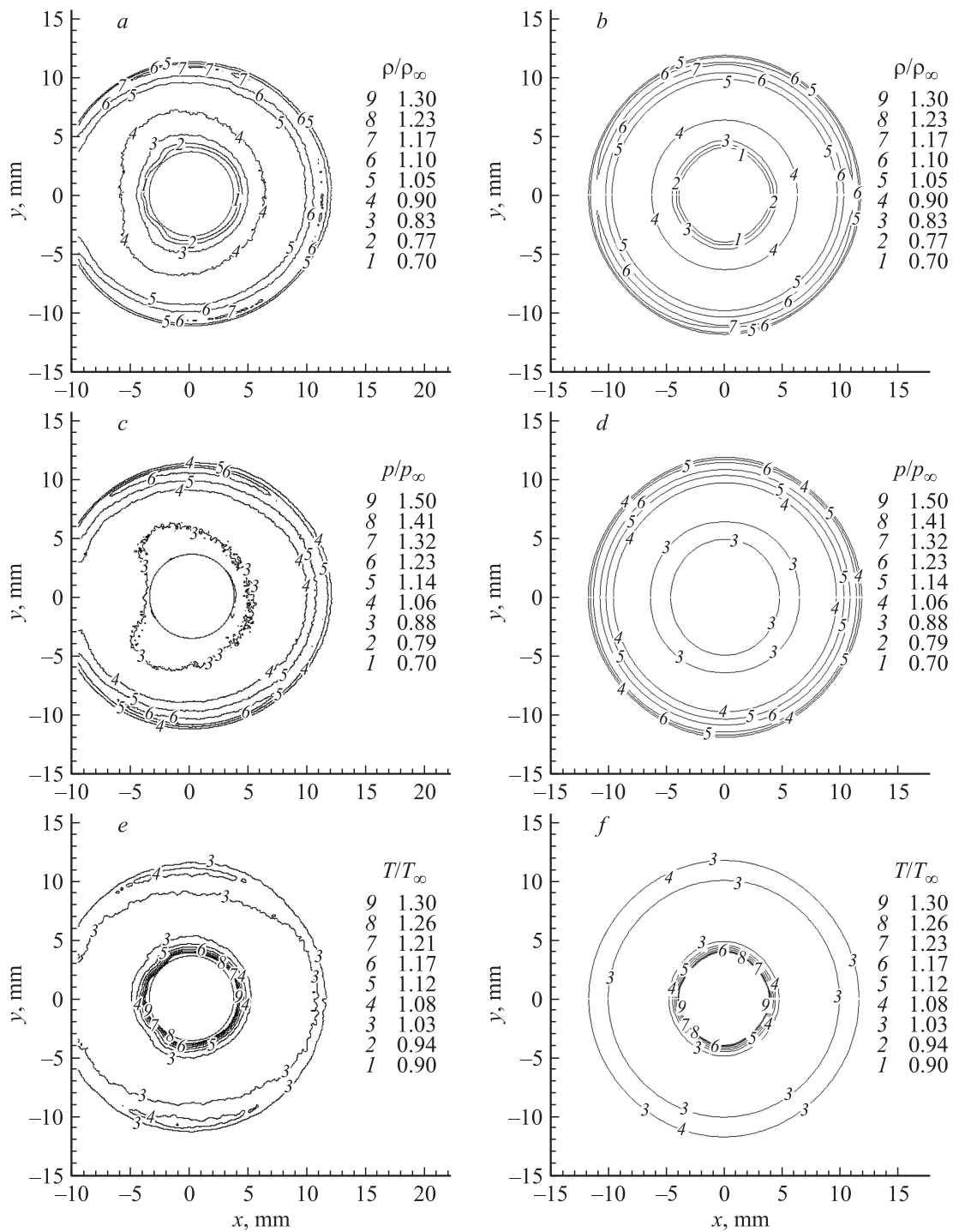
## Развитие одиночной зоны энергоподвода в покоящемся воздухе

С целью проверки адекватности  $q$ - и  $T$ -моделей проведены расчеты развития одиночной зоны энергоподвода в покоящемся воздухе с плотностью  $\rho_\infty = 1.20 \text{ kg/m}^3$  при температуре  $T_\infty = 293 \text{ K}$ . Применимость этих моделей проверялась сопоставлением полученных результатов с экспериментами [12], в которых изучалось развитие одиночного оптического разряда в такой окружающей среде, создаваемого фокусированным лазерным излучением при значениях подводимой энергии  $E_L = 145$  и  $112 \text{ mJ}$ , объеме фокального пятна  $V_0 \approx 3 \text{ mm}^3$  и продолжительности одиночных лазерных импульсов  $\tau = 10 \text{ ns}$ . Полученные в этих условиях поля различных параметров в окрестности развивающейся зоны энергоподвода фактически соответствуют практически одинаковой поглощенной газом энергии  $E_A = 72.5$  и  $72.8 \text{ mJ}$  с учетом указанных в работе коэффициентов ее поглощения  $\varepsilon_Q = E_A/E_L$ , соответствующих этим случаям:  $\varepsilon_Q = 0.5$  и  $0.65$ .

Дополнительно с целью сравнения привлекались также полученные в [12] результаты численных расчетов для вязкого совершенного газа с использованием  $T$ -модели. Реализованные в данных расчетах с  $T$ - и  $q$ -моделями энергоподвода характерные параметры сведены в таблицу. Полученные результаты дополняют и уточняют результаты работы [12], в которой использовалась лишь  $T$ -модель при указанных выше значениях  $E_A$ . Во всех анализируемых ниже расчетах область энергоподвода задавалась в виде сферы с радиусом  $R_0 = 0.9 \text{ mm}$  для фокального объема  $V_0 = 3.052 \text{ mm}^3$ , который соответствовал зафиксированному в эксперименте значению.

| № | $E_L, \text{ mJ}$ | $\varepsilon_Q$ | $E_A = \varepsilon_Q E_L, \text{ mJ}$ | $R_0, \text{ mm}$ | $\tau, \text{ ns}$ | Модель | $k$ |
|---|-------------------|-----------------|---------------------------------------|-------------------|--------------------|--------|-----|
| 1 | 145               | 0.5             | 72.5                                  | 0.9               | 0                  | $T$    | 0.5 |
| 2 | 145               | 0.5             | 72.5                                  | 0.9               | 10                 | $q$    | 0.5 |
| 3 | 290               | 0.5             | 145                                   | 0.9               | 10                 | $q$    | 0.5 |
| 4 | 145               | 1               | 145                                   | 0.9               | 10                 | $q$    | 1   |
| 5 | 145               | 0.5             | 72.5                                  | 0.9               | 1000               | $q$    | 0.5 |

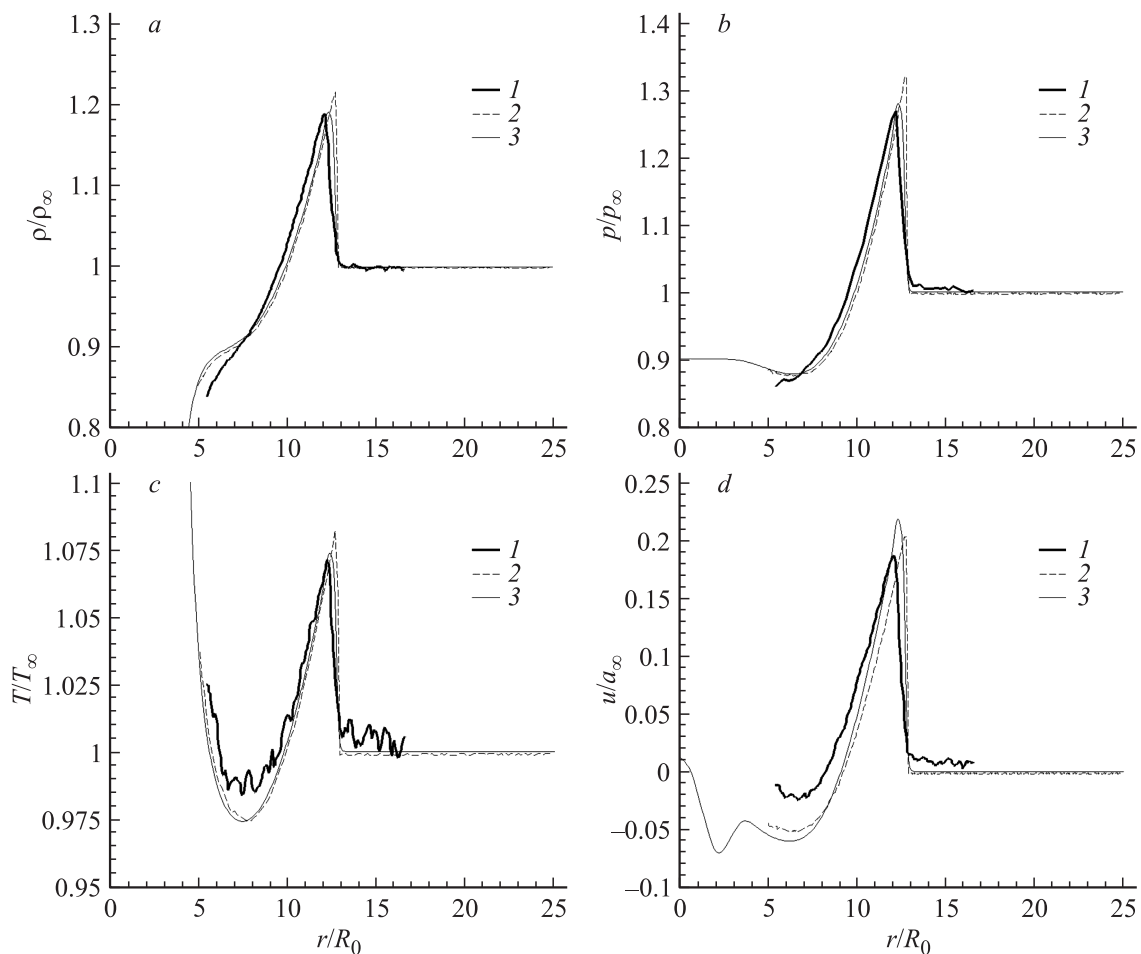
Полученные в расчетах на основе  $T$ -модели изолинии относительной плотности, статического давления и температуры в момент времени  $t = 20 \mu\text{s}$  от начала энергоподвода (рис. 2, *b, d, f*) при  $E_A = 72.5 \text{ mJ}$  (см. таблицу, условия № 1) находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными [12] (рис. 2, *a, c, e*). Наблюдавшаяся в эксперименте ударная волна в указанный момент времени была близка к сферической, несмотря на проявлявшуюся небольшую вытянутость плазменной зоны навстречу горизонтально ориентированному лазерному лучу. Экспериментальные изолинии построены на основе измерений полей температуры и давления методом фильтрации рэлеевского рассеивания [12,33]



**Рис. 2.** Изолинии параметров воздушной среды вокруг одиночного оптического разряда при  $E_A = 72.5 \text{ mJ}$  ( $E_L = 145 \text{ mJ}$ ),  $t = 20 \mu\text{s}$ : *a, c, e* — эксперименты [12]; *b, d, f* — *T*-модель, настоящая работа (таблица, условия № 1).

и рассчитанного на этой основе поля плотности с использованием уравнения состояния для совершенного газа. Погрешность измерений давления и температуры составляла соответственно  $\pm 2.33$  и  $\pm 1.34\%$ . (В области максимальных температур в фокальном пятне сопоставление не проводится, поскольку измерения были затруднительными).

Сравнение экспериментальных данных [12] для рассмотренных выше условий с выполненными в этой же работе расчетами на основе одномерных уравнений Навье–Стокса (записанных в сферической системе координат) и *T*-модели энергоподвода, а также проведенными в данных исследованиях расчетами на основе уравнений Эйлера с той же моделью энергоподвода де-



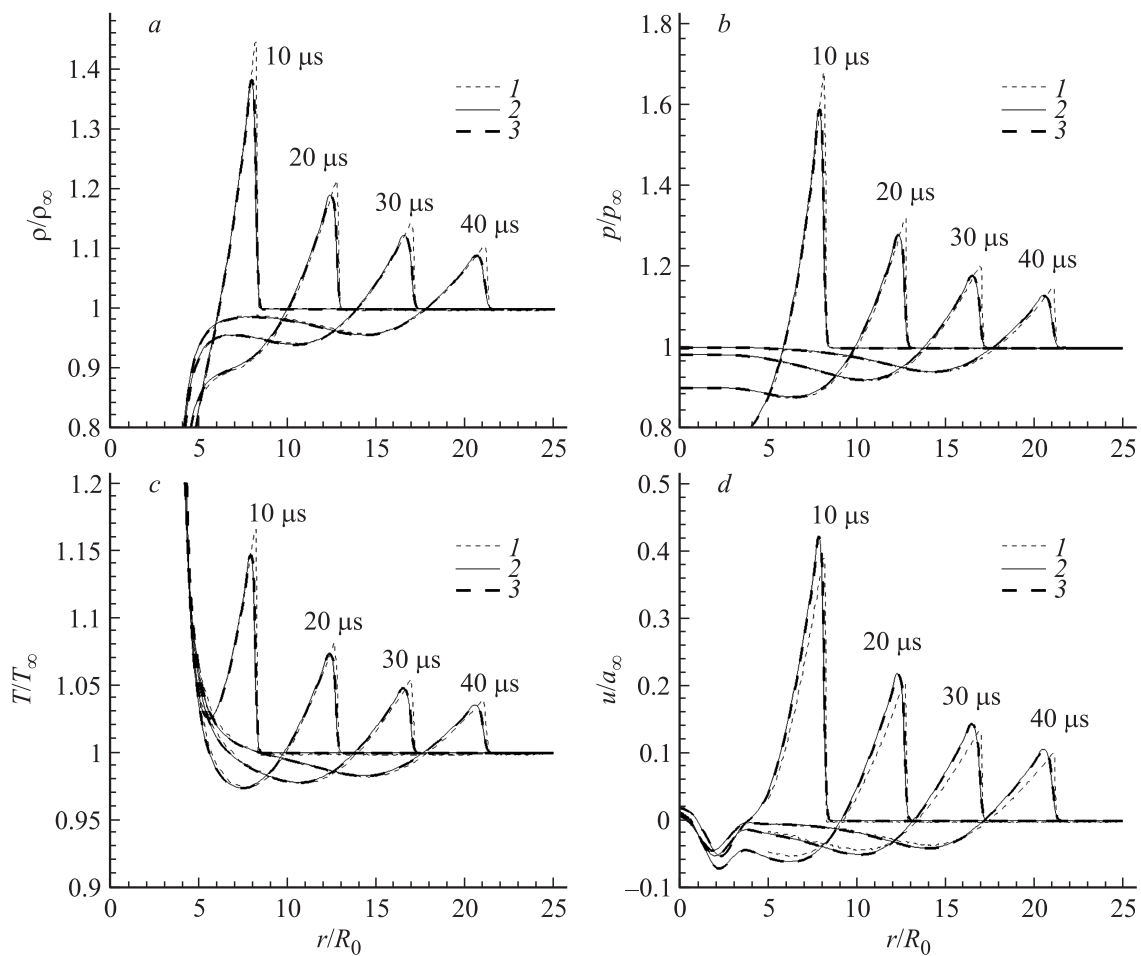
**Рис. 3.** Распределения относительной плотности (а), статического давления (b), температуры (с) и скорости (d) вдоль радиуса зоны энергоподвода при  $E_A = 72.5$  мДж ( $E_L = 145$  мДж),  $t = 20$  мкс: 1 — эксперимент [12]; 2 — уравнение Навье–Стокса с  $T$ -моделью [12]; 3 — уравнения Эйлера с  $T$ -моделью, настоящая работа (таблица, условия № 1).

монстрируют их хорошее количественное соответствие (рис. 3). Распределения параметров в экспериментах (кривые 1) измерены вдоль радиуса разряда перпендикулярно направлению излучения при  $y \approx 5\text{--}15$  мм (см. рис. 2, а, с, е). Расчетные распределения параметров на основе модели вязкого (кривые 2, [12]) и полученные в настоящей работе для идеального газа (кривые 3) охватывают участок  $x = 0\text{--}25$  мм от центра разряда. Согласно рис. 3, а–с, расчеты (2) и (3) при  $E_A = 72.5$  мДж практически совпадают и хорошо согласуются с экспериментом. Полученные расчетные данные для распределения скорости вне фокальной зоны (рис. 3, d) также удовлетворительно соответствуют эксперименту [12], учитывая точность измерений 3.84%.

Сферическая ударная волна, распространяющаяся от области энергоподвода в окружающем газе, вызывает резкий рост плотности, давления и температуры с реализующимися максимумами на ее фронте (рис. 3, а–с). Последующее уменьшение этих параметров обусловлено волнами разрежения, распространяющимися за ее фронтом в противоположном направлении. При умень-

шении давления в волнах разрежения до более низкого уровня, чем в окружающей среде  $p/p_\infty < 1$  (рис. 3, b), радиальная скорость следующего за ударной волной потока меняет знак (рис. 3, d), и в области  $u < 0$  возникает возвратное течение, направленное к центру энергоисточника. Появление области повторного сжатия и соответствующее замедление возвратного течения при  $r/R_0 = 4\text{--}6.5$  (рис. 3, b, d) обусловлены вторичными волнами сжатия, которые формируются в процессе взаимодействия волн разрежения с контактной поверхностью, ограничивающей центральную область сильно нагретого газа с повышенной скоростью звука [34].

Распространение ударной волны в окружающем пространстве и изменение параметров в окрестности области энергоподвода иллюстрирует рис. 4, на котором приведены результаты расчетов [12] (кривые 1) при  $E_A = 72.8$  мДж в сравнении с выполненными в настоящей работе расчетами с  $T$ - и  $q$ -моделями (2 и 3 соответственно) для практически такого же значения  $E_A = 72.5$  мДж (см. таблицу, случаи № 1 и 2). При использовании  $q$ -модели (кривая 3) задавалась продолжительность

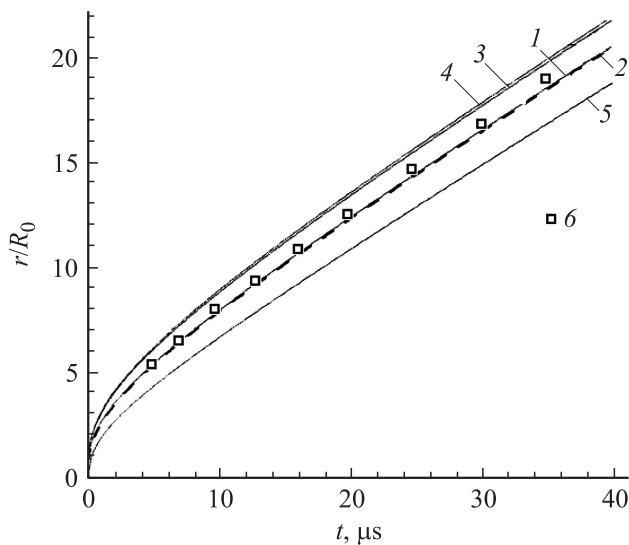


**Рис. 4.** Распределение плотности (а), статического давления (б), температуры (с) и скорости (д) в окрестности зоны энергоподвода в различные моменты времени ( $t = 10\text{--}40 \mu\text{s}$ ): 1 — уравнения Навье–Стокса с  $T$ -моделью [12] ( $E_A = 72.8 \text{ mJ}$ ); 2 — уравнения Эйлера с  $T$ -моделью, настоящая работа ( $E_A = 72.5 \text{ mJ}$ ); 3 — уравнения Эйлера с  $q$ -моделью, настоящая работа ( $E_A = 72.5 \text{ mJ}$ ).

энергоподвода  $\tau = 10 \text{ ns}$ , равная длительности лазерного импульса в экспериментах [12]. Совпадение полученных результатов (2) и (3) с данными (1) работы [12] свидетельствует о надежности используемого алгоритма на основе модели идеального совершенного газа, который позволяет предсказывать изменения рассмотренных параметров в различные моменты времени при  $t \geq 10 \mu\text{s}$  не хуже, чем расчеты в рамках модели вязкого газа. Выполненные расчеты на основе различных  $T$ - и  $q$ -моделей энергоподвода с начальными данными, согласно [12], обеспечивают практически одинаковые результаты (кривые 2 и 3 соответственно). В соответствии с расчетами наблюдаются снижение пиковых значений различных параметров на фронте сферической ударной волны в процессе уменьшения ее интенсивности со временем (рис. 4, а, с, д), а также расширение распространяющейся от зоны энергоподвода области вторичного сжатия и постепенное восстановление давления в ней до значения в окружающей среде (рис. 4, б). Качественно аналогичный процесс восстановления давления в возникающей

последовательности вторичных скачков при расширении цилиндрических и сферических объемов газа с высоким давлением ранее демонстрировался в расчетах [35,36].

Расчетные зависимости изменения во времени относительного радиуса  $r/R_0$  ударной волны для рассмотренного сферического энергоисточника в идеальном совершенном газе, полученные в рамках  $T$ - и  $q$ -моделей при  $E_A = 72.5 \text{ mJ}$  (см. таблицу, условия 1 и 2), показаны на рис. 5 (кривые 1 и 2 соответственно). Обе модели обеспечивают практически одинаковые результаты, соответствующие экспериментальным данным (6) [37], и демонстрируют постепенное уменьшение скорости распространения волны в окружающей среде с момента начала энергоподвода с последующим ее выходом на постоянное значение. Дополнительные расчеты на основе  $q$ -модели (см. таблицу, условия № 3) позволяют проанализировать развитие зоны энергоподвода при повышении уровня энергии, поглощаемой окружающей средой. Увеличение поглощенной газом энергии до значения  $E_A = 145 \text{ mJ}$  (при  $\tau = 10 \text{ ns}$  и  $k = 0.5$ ) приво-



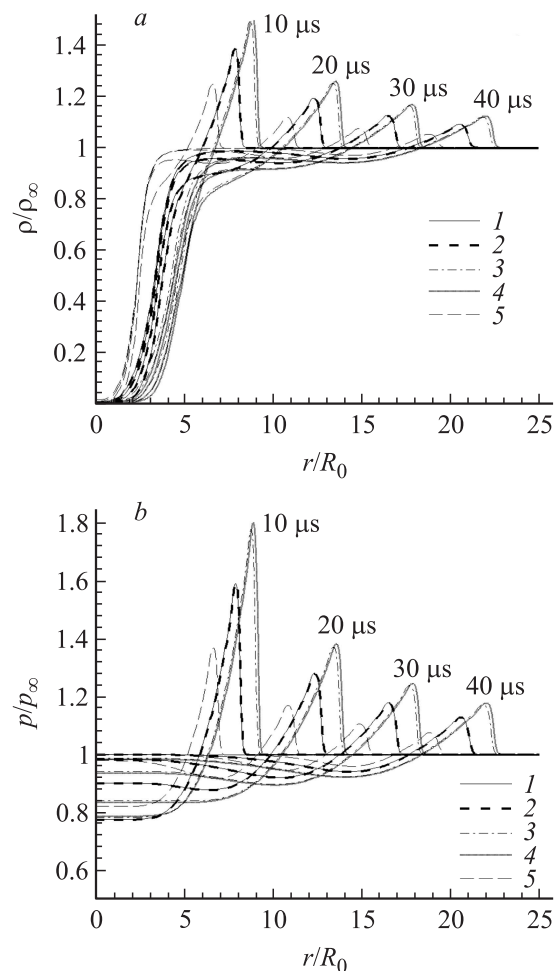
**Рис. 5.** Изменение во времени радиуса сферической ударной волны. Расчеты при  $E_A = 72.5$  мДж: 1 —  $T$ -модель ( $k = 0.5$ ,  $\tau = 0$ ), 2 —  $q$ -модель ( $k = 0.5$ ,  $\tau = 10$  нс);  $E_A = 145$  мДж,  $q$ -модель ( $\tau = 10$  нс): 3 —  $k = 0.5$ , 4 —  $k = 1.0$ ;  $E_A = 72.5$  мДж: 5 —  $q$ -модель ( $k = 0.5$ ,  $\tau = 1$  мкс). Эксперимент [37]: 6 —  $E_A = 72.5$  мДж,  $\tau = 10$  нс.

дит к увеличению пиковых значений газодинамических параметров на ударной волне (рис. 6, кривые 3) по сравнению с рассмотренными выше расчетами № 1 и 2 (кривые 1 и 2). При этом также вырастает начальная скорость ее распространения (рис. 5, кривая 3), которая со временем становится постоянной. Увеличение параметра модели до величины  $k = 1$  при сохраняющемся значении  $E_A$  (см. таблицу, условия № 4) дает результаты (рис. 5 и 6, кривые 4), примерно аналогичные предыдущим решениям (3) при  $k = 0.5$ . Увеличение времени энергоподвода до  $\tau = 1$  мкс и снижение уровня поглощенной энергии до значения  $E_a = 72.5$  мДж (см. таблицу, условия № 5) приводят к заметному уменьшению скорости распространения сферической ударной волны и пиковых значений газодинамических величин на ее фронте (рис. 5 и 6, кривые 5). Сравнение решения 5 для  $\tau = 1$  мкс с зависимостями (1) и (2) для  $\tau = 0$  и 10 нс при одинаковом значении  $E_A = 72.5$  мДж демонстрирует влияние увеличения длительности энергоподвода, и в этом случае  $q$ -модель выглядит предпочтительнее, так как позволяет учесть такое влияние.

### Взаимодействие области энергоподвода с прямым скачком

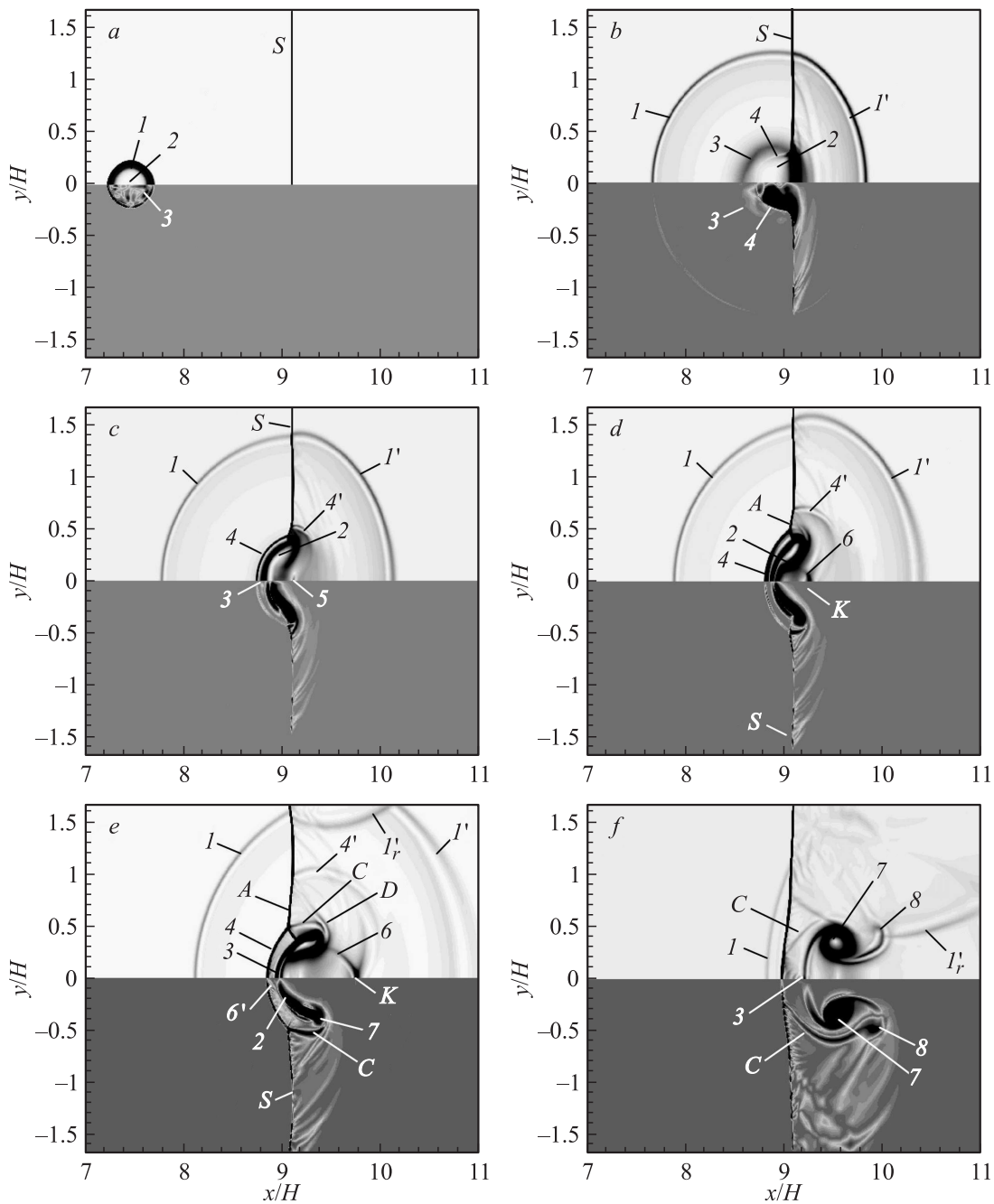
Как отмечено в работах [20,21], интерес к рассматриваемой задаче был вызван поиском эффективных способов стабилизации положения замыкающего прямого скачка в воздухозаборнике смешанного сжатия при возможном его перемещении под влиянием проникающих

с набегающим потоком атмосферных неоднородностей или распространяющихся навстречу им дополнительных возмущений от компрессора. Анализируемые далее расчеты, демонстрирующие воздействие локализованного подвода энергии на прямой скачок в канале, выполнены с использованием  $T$ -модели при значении  $k = 0.5$  для сферического энергоисточника с относительным радиусом  $R_x/H_{AB} = R_y/H_{AB} = 0.05$ . Положение задававшегося при помощи соотношений Рэнкина–Гюгоньо прямого скачка уплотнения в сверхзвуковом потоке с числом Маха  $M_\infty = 2$  при  $T_\infty = 157$  К,  $\rho_\infty = 0.668$  кг/м<sup>3</sup> и  $\gamma = 1.4$  соответствовало относительной продольной координате  $x_s/H = 9.1$ , а центр энергоисточника в момент начала энергоподвода — координате  $x_0/H = 7.4131$ . С целью изучения влияния количества подводимой в поток энергии на трансформацию скачка численные решения получены для трех значений относительной интенсивности энергоподвода  $\varepsilon = 1, 10$  и 100, которая определяется отношением энергии, поглощенной средой в зоне энергоподвода, к статической энтальпии набегающего потока



**Рис. 6.** Сравнение распределений плотности (а) и давления (б) в моменты времени  $t = 10$ – $40$  мкс вдоль радиуса при одиночном импульсе в покоящемся воздухе: кривые 1–5 соответствуют условиям расчетов №1–5 (см. таблицу).





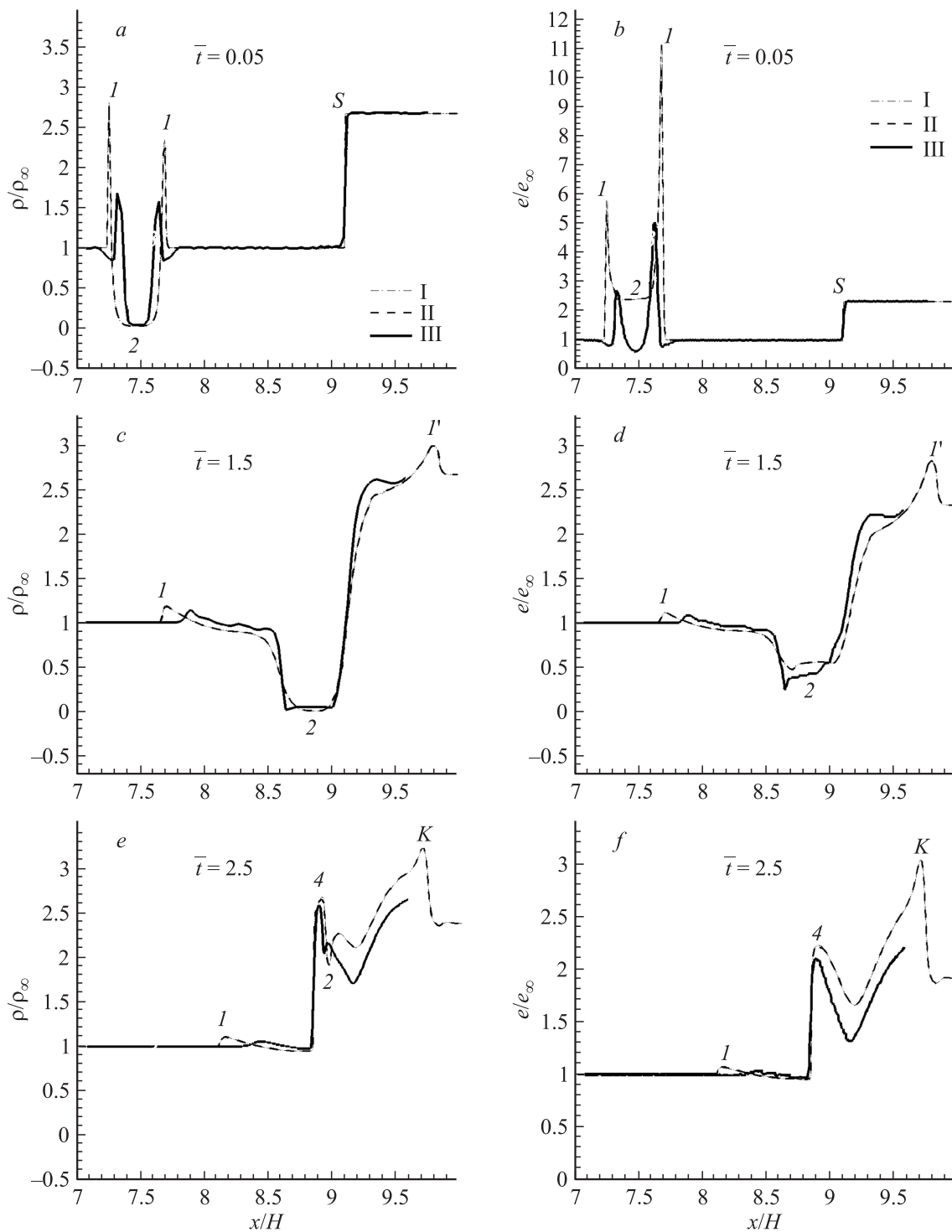
**Рис. 7.** Взаимодействие одиночного импульса ( $\varepsilon = 100$ ) с прямым скачком уплотнения при  $M_\infty = 2$ , верхняя полуплоскость — градиенты плотности, нижняя — завихренность:  $a - \bar{t} = 0.05$ ;  $b - 1.5$ ;  $c - 1.75$ ;  $d - 2.0$ ;  $e - 2.5$ ;  $f - \bar{t} = 4.0$ .

в объеме энергоисточника  $V_0$ :

$$\varepsilon = \frac{E_A}{\rho_\infty c_p T_\infty V_0}. \quad (6)$$

Это соотношение использовалось для определения поглощенной средой энергии  $E_A$  при известных значениях  $\varepsilon$ ,  $\rho_\infty$ ,  $T_\infty$ ,  $c_p$  и  $V_0$ , а затем по формуле (3) вычислялся параметр  $\Delta T_0$ , определяющий распределение температуры в зоне энергоподвода в начальный момент времени согласно соотношению (2).

Характерные стадии прохождения сферической зоны энергоподвода через прямой скачок при рассмотренном максимальном значении  $\varepsilon = 100$  показаны на рис. 7 в различные моменты времени  $\bar{t} = t/(H/u_\infty)$ . Газодинамическая структура течения иллюстрируется полученными в расчетах полями градиентов плотности (верхняя полуплоскость каждого рисунка) и завихренности  $\Omega = |\partial u/\partial r - \partial v/\partial x|$  (нижняя полуплоскость). Согласно расчетам, в результате энергоподвода на начальном этапе (рис. 7,  $a$ ) в сверхзвуковом потоке перед прямым



**Рис. 8.** Распределения относительной плотности  $\rho/\rho_\infty$  (a, c, e) и полной энергии  $e/e_\infty$  (b, d, f) вдоль оси симметрии при взаимодействии одиночного импульса ( $\varepsilon = 100$ ) с прямым скачком при  $M_\infty = 2$ : I —  $T$ -модель ( $k = 0.5$ , настоящая работа), II —  $q$ -модель ( $k = 0.5$ ,  $\tau = 10$  ns, настоящая работа), III — реальный вязкий газ [20,21].

скачком  $S$  формируется сферическая ударная волна  $I$  вокруг сильно нагретой области  $2$ , отделенной контактной поверхностью  $3$  от окружающего холодного газа. Со временем расширяющийся фронт этой волны и зона энергоподвода сносятся набегающим потоком к

прямому скачку (рис. 7, b). Фронт прямого скачка  $S$ , проникая в область нагретого газа сквозь контактную поверхность  $3$ , начинает быстро трансформироваться в выпуклый „скачок-предвестник“  $4$ , напоминающий линзу. Такой „линзовый эффект“ был обнаружен в экспе-

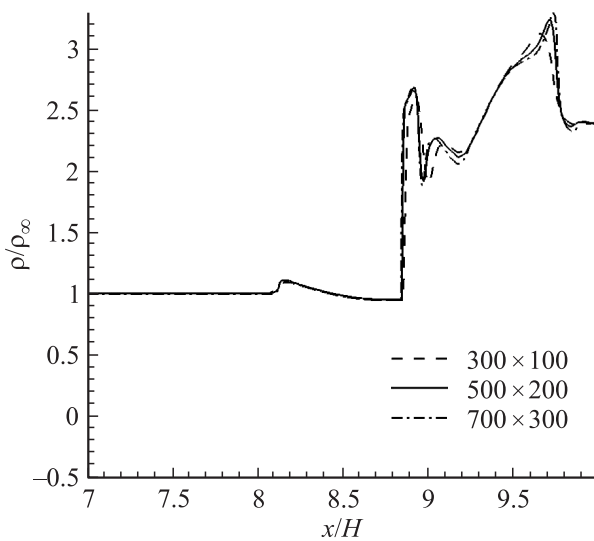


Рис. 9. Примеры расчетов с использованием различных сеток.

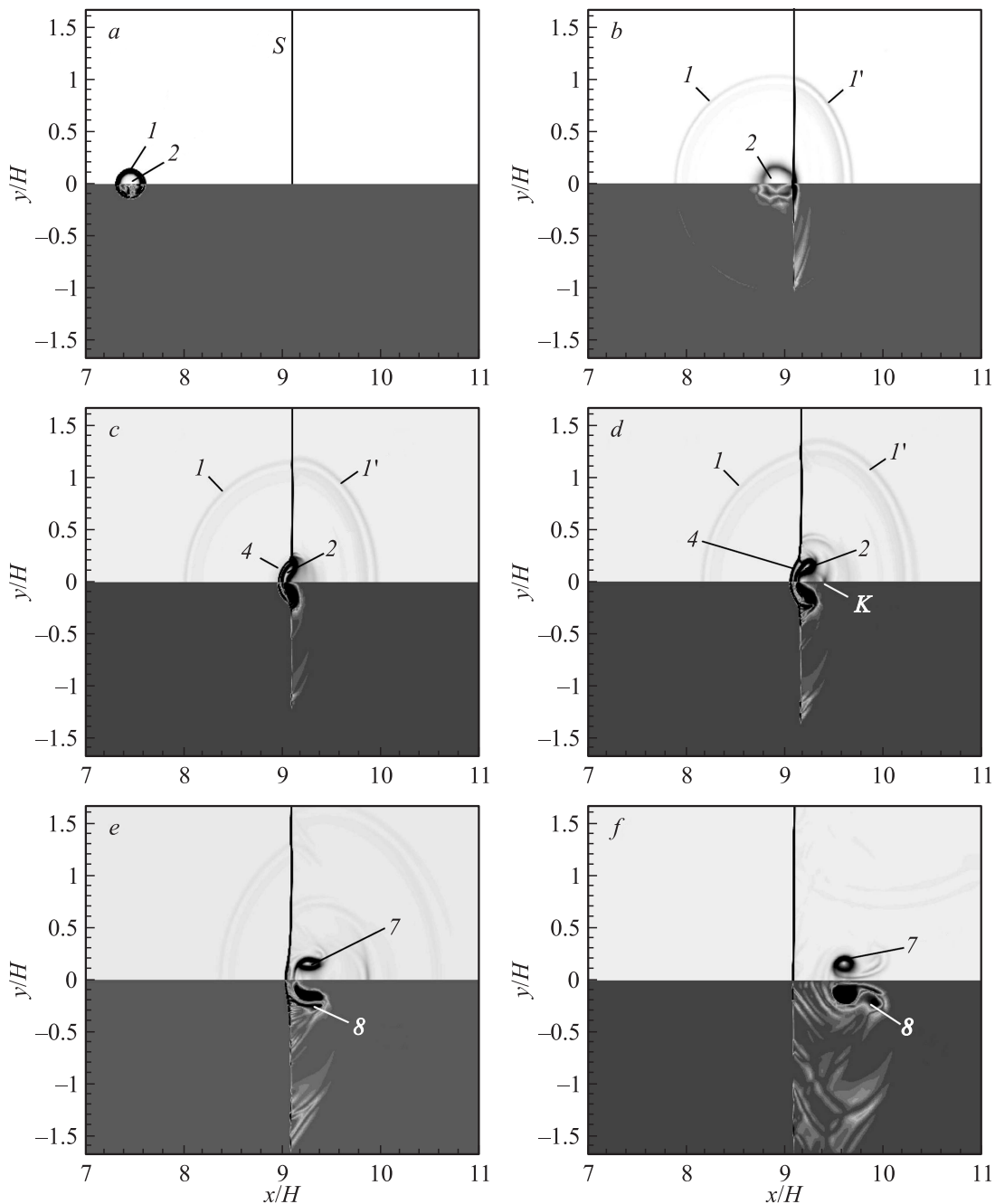
риментах [38] и наблюдался в расчетах взаимодействия скачков уплотнения с температурными неоднородностями [39–41]. Отмеченная трансформация исходного прямого скачка обусловлена его ускорением в нагретой области вследствие повышения скорости звука. При этом в результате снижения местного числа Маха его интенсивность уменьшается, и вниз по течению от контактной поверхности распространяются волны разрежения. Подобный эффект возникновения скачка-предвестника перед ударной волной, распространяющейся над нагретой поверхностью при сильном взрыве [42], по-видимому, впервые численно моделировался в работе [43] и далее более глубоко изучался в различных условиях (см., например, [40,44,45]). Аналогичный „линзовый эффект“ проявляется и при взаимодействии движущейся в газовой среде ударной волны с пузырями легкого газа [46].

В процессе дальнейшей эволюции течения (рис. 7, *c*) выпуклый скачок-предвестник 4 повторно взаимодействует с контактной поверхностью 3 и проникает через нее в „холодный“ набегающий поток с пониженной скоростью звука за ослабевающей сферической ударной волной 1. При этом его интенсивность возрастает, а от контактной поверхности в обратном направлении распространяется отраженный скачок. Интенсивность и направление распространения фронта такого отраженного скачка определяются ориентацией контактной поверхности. В окрестности оси симметрии его фокусирующий фронт 5 распространяется в горизонтальном направлении и проникает за пределы деформированной нагретой зоны 2. От остальной части контактной поверхности 3 такой скачок распространяется в направлении к оси симметрии и в результате отражения от нее формируется фронт 6 (рис. 7, *d, e*). Левая граница этого фронта 6' со временем догоняет скачок 4 (рис. 7, *e*), а на оси симметрии за область энергоподвода возникает точка

кумуляции всех отраженных скачков  $K$ , постепенно удаляющаяся вниз по течению. Качественно аналогичные особенности зафиксированы в расчетах взаимодействия прямого скачка, движущегося в неподвижном газе с локальной областью пониженной плотности [47].

В рассматриваемых условиях вследствие повышенной скорости потока и пониженной скорости звука перед прямым скачком  $S$  по сравнению с их значениями за ним фронт скачка-предвестника 4 расширяется в пространстве вокруг нагретой зоны 2 медленнее, чем его продолжение 4' за прямым скачком (рис. 7, *c–e*). Аналогичное поведение демонстрируют расширяющиеся с различной скоростью фронты 1 и 1' исходной сферической ударной волны, расположенные по разные стороны от прямого скачка. При этом на некотором этапе (см. рис. 7, *e*) возникает отраженная от стенки канала сферическая волна 1'. Фронты 4 и 4' пересекают прямой скачок  $S$  в двух тройных точках, соединенных ножкой Маха  $A$  (рис. 7, *d, e*). Дозвуковое течение за наклонным скачком  $A$ , принадлежащим к сильному семейству, ограничено распространяющимися из тройных точек и постепенно сближающимися контактными разрывами  $C$  и  $D$  (см. рис. 7, *e*). За возникающей  $\lambda$ -конфигурацией скачков при пересечении фронтов 4 и  $A$  реализуется сверхзвуковое течение в узкой области между внешней границей 3 нагретой зоны и контактными разрывом  $C$ . Качественно аналогичная структура пересекающихся ударных волн зафиксирована в расчетах для случаев взаимодействия движущегося в неподвижном газе прямого скачка с локализованными зонами повышенной температуры и пониженной плотности [40,47].

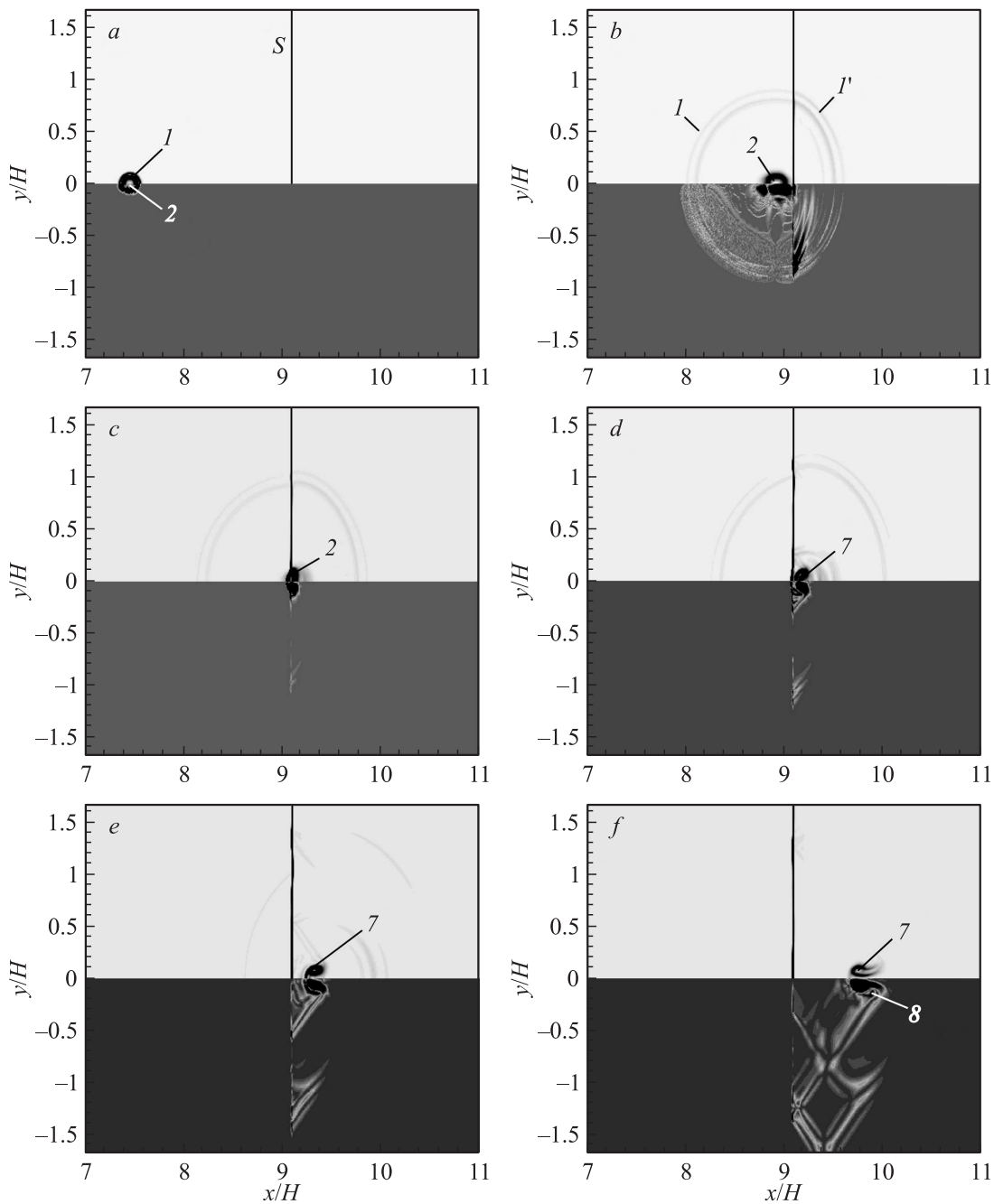
Приведенные на рис. 7, *a–e* (нижние полуплоскости) поля завихренности для рассмотренных выше этапов развития течения демонстрируют распространяющуюся вниз по потоку область повышенных ее значений за искривляющимся фронтом прямого скачка (показана белым цветом). Такие эффекты начинают проявляться вследствие искривления прямого скачка в неравномерном течении внутри области, ограниченной фронтом сферической ударной волны, а также в результате дополнительной деформации прямого скачка в процессе его взаимодействия с зоной энергоподвода. Вместе с тем видно, что более высокие уровни завихренности (обозначены черным цветом) соответствуют контактным поверхностям, ограничивающим зону энергоподвода и распространяющимся из тройных точек пересекающихся скачков. С проникновением нагретого пятна за прямой скачок его фронт начинает выравниваться (рис. 7, *e, f*). Контактная поверхность 3, ограничивающая сжатую скачком зону энергоподвода, сворачивается на периферии в тороидальный вихрь 7, а исходящая из тройной точки контактная поверхность  $C$  — в вихрь 8 с противоположным направлением вращения. Согласно [26,46], образование таких вихрей обусловлено неустойчивостью Рихтмайера–Мешкова, возникающей при прохождении ударных волн через контактные границы.



**Рис. 10.** Взаимодействие одиночного импульса ( $\varepsilon = 10$ ) с прямым скачком уплотнения при  $M_\infty = 2$ , верхняя полуплоскость — градиенты плотности, нижняя — завихренность:  $a - \bar{t} = 0.05$ ;  $b - 1.5$ ;  $c - 1.75$ ,  $d - 2.0$ ;  $e - 2.5$ ;  $f - 4.0$ .

Расчитанные в рамках модели идеального совершенного газа распределения относительной плотности  $\rho/\rho_\infty$  и полной удельной энергии  $e/e_\infty$  вдоль оси симметрии канала с использованием  $T$ - и  $q$ -моделей энергоподвода для рассмотренных выше характерных стадий развития течения при  $\bar{t} = 0.05, 1.5$  и  $2.5$  (см. рис. 7,  $a, b, e$ ) практически совпадают между собой (рис. 8, кривые I и II) и в основном демонстрируют хорошее соответствие результатам расчетов [20,21] на основе уравнений Навье–Стокса (кривые III) с учетом эффектов реаль-

ного газа (неравновесной термодинамики и радиационного переноса) при близких параметрах потока в канале ( $M_\infty = 2, T_\infty = 160 \text{ K}, \rho_\infty = 0.71 \text{ kg/m}^3$ ). Детальное описание используемой в этих работах математической модели, учитывающей плазменные эффекты в условиях разряда в среде из 11 компонент ( $\text{N}_2, \text{O}_2, \text{NO}, \text{N}, \text{O}, \text{N}_2^+, \text{O}_2^+, \text{NO}^+, \text{N}^+, \text{O}^+$  и электроны), приведено в [19]. Рассмотренные упрощенные модели для идеального совершенного газа обеспечивают удовлетворительное предсказание уровня снижения плотности в нагретой



**Рис. 11.** Взаимодействие одиночного импульса ( $\varepsilon = 1$ ) с прямым скачком уплотнения при  $M_\infty = 2$ , верхняя полуплоскость — градиенты плотности, нижняя — завихренность:  $a - \bar{t} = 0.05$ ;  $b - 1.5$ ;  $c - 1.75$ ,  $d - 2.0$ ;  $e - 2.5$ ;  $f - 4.0$ .

области 2 на начальном этапе ее развития за фронтом расширяющейся сферической ударной волны  $I$  (рис. 8,  $a$ ) и его распределения в условиях трансформации нагретого пятна в прямом скачке (рис. 8,  $c, e$ ). Наблюдаемое в начальный момент повышенное значение удельной энергии в при мгновенном ( $T$ -модель,  $\tau = 0$ ) или очень быстром ( $q$ -модель,  $\tau = 10$  ns) энергоподводе в совершенном газе (рис. 8,  $b$ , кривые I, II) по сравнению с реальным газом (III) обусловлено изначально значительным повышением давления в предполагаемом постоян-

ном объеме энергоисточника вследствие резкого роста температуры. В процессе эволюции течения давление в зоне энергоподвода падает в распространяющихся к ее центру волнах разрежения, что приводит к уменьшению со временем удельной энергии, распределение которой на этапах взаимодействия нагретого пятна с прямым скачком становится близким к рассчитанному в реальном газе (рис. 8,  $d, f$ ). При учете эффектов реального газа часть подводимой энергии изначально расходуется на ионизацию и химические реакции и со временем по-

степенно возвращается в поток в процессе рекомбинации [19,21].

Некоторое отличие в положении фронта сферической ударной волны  $I$ , предсказываемое в рамках моделей идеального и реального газов (рис. 8) в основном обусловлено различной формой области энергоподвода в этих случаях. В идеальном газе она была сферической, а в реальном газе — более сжатой в радиальном направлении и несколько вытянутой в горизонтальном направлении распространения предполагаемого лазерного луча [19,20]. Надежность полученных результатов в условиях идеального газа подтверждена сравнением расчетов на последовательности сгущающихся сеток  $300 \times 100$ ,  $500 \times 200$ ,  $700 \times 300$ . Приведенные в качестве примера распределения относительной плотности вдоль оси симметрии канала при  $\bar{t} = 2.5$  при  $\varepsilon = 100$ , полученные с использованием  $T$ -модели (рис. 9), демонстрируют достигнутую сходимость решения и подтверждают достаточность выбранной для основных расчетов сетки с размерностью  $500 \times 200$ .

Снижение уровня подводимой энергии в 10 ( $\varepsilon = 10$ ) или 100 ( $\varepsilon = 1$ ) раз способствует уменьшению скорости расширения зоны энергоподвода  $2$  и распространяющейся вокруг нее менее интенсивной сферической ударной волны  $I$  (рис. 10, 11). Уменьшение размеров подходящего к фронту прямого скачка  $S$  менее нагретых пятен способствует снижению степени его деформации и более быстрому восстановлению после взаимодействия с ними. При этом характерные стадии развития течения остаются качественно аналогичными описанным для случая  $\varepsilon = 100$  (рис. 7). Образование во всех рассмотренных случаях когерентных вихревых структур 7 и 8 после взаимодействия областей энергоподвода с прямым скачком должно способствовать интенсификации процесса смешения в течении за ним. В этой связи заслуживают дальнейшего более глубокого изучения взаимодействия областей энергоподвода с косыми скачками уплотнения с целью обоснования возможности интенсификации процесса смешения сверхзвуковых потоков применительно к различным задачам аэрогазодинамики. Выявленные особенности реализующейся тонкой газодинамической структуры в условиях взаимодействия локализованных зон энергоподвода с прямым скачком уплотнения (рис. 7, 10, 11) существенно дополняют и уточняют зафиксированные в расчетах в работе [21].

## Заключение

На основе уравнений Эйлера с использованием  $T$ - и  $q$ -моделей подвода энергии проведены численные исследования развития локализованных зон энергоподвода в неподвижной воздушной среде, а также в сверхзвуковом потоке в канале при числе Маха  $M_\infty = 2$  в условиях взаимодействия с прямым скачком уплотнения. Продемонстрировано удовлетворительное предсказание распределений различных параметров течения за фронтом

ударной волны, распространяющейся в неподвижной воздушной среде вокруг локализованного оптического разряда, для реализованного в эксперименте времени энергоподвода  $\tau = 10$  ns. На основе расчетов с использованием более гибкой  $q$ -модели показано, что влияние продолжительности энергоподвода проявляется уже при значении  $\tau = 1$   $\mu$ s. В этих условиях особенности развития течения могут заметно отличаться от предсказываемых на основе  $T$ -модели, которая предполагает мгновенный подвод энергии ( $\tau = 0$ ).

Численно исследован процесс взаимодействия локализованной зоны энергоподвода с прямым скачком уплотнения в канале. Уточнена тонкая газодинамическая структура течения на различных этапах прохождения нагретого пятна через прямой скачок при различных уровнях подводимой энергии. Наряду с возможностью трансформации фронта скачка таким способом зафиксировано формирование распространяющихся вниз по течению когерентных вихревых структур, которые могут способствовать интенсификации процесса смешения. Сопоставления распределений параметров течения в этих условиях с полученными в известных расчетах на основе уравнений Навье–Стокса с учетом эффектов реального газа свидетельствуют о возможности использования рассмотренных упрощенных моделей для решения задач аэрогазодинамики.

## Список литературы

- [1] Chernyi G.G. // Proc. of the 9<sup>th</sup> AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. and 3<sup>rd</sup> Weakly Ionized Gases Workshop. Norfolk, VA, 1999. AIAA 99-4819.
- [2] Zheltovodov A.A. Development of the studies on energy deposition for application to the problems of supersonic aerodynamics. Novosibirsk, 2002. 43 p. (Preprint/Russ. Acad. of Sci., Sib. Branch; ITAM SB RAS. N 10-2002).
- [3] Fomin V.M., Tretyakov P.K., Taran J.-P. // Aerosp. Sci. Technol. 2004. N 8. P. 411–421.
- [4] Bletzinger P., Ganguly B.N., Van Wue D., Garscadden A. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2005. Vol. 38. P. R33–R57.
- [5] Leonov S.B., Yarantsev D.A. // Plasma Sources Sci. Tech. 2007. Vol. 16. N 1. P. 132–138.
- [6] Knight D. // J. Propul. Power. 2008. Vol. 24. N 6. P. 1153–1167.
- [7] Райзер Ю.П. Основы современной физики газоразрядных процессов. М.: Наука, 1980. 416 с.
- [8] Бухетов Н.А., Прохоров А.М., Федоров В.Б., Фолин В.К. // ДАН СССР. 1981. Т. 261. С. 586–588.
- [9] Борзов В.Ю., Михайлов В.М., Рыбка И.В., Савищенко Н.П., Юрьев А.С. // ИФЖ. 1994. Т. 66. № 5. С. 515–520.
- [10] Svetsov V., Popova V., Rybakov V., Artemiev V., Medveduk S. // Shock Waves. 1997. N 7. P. 325–334.
- [11] Adelgren R.G., Elliott G.S., Knight D.D., Zheltovodov A.A., Beutner T.J. // Proc. of the 39<sup>th</sup> AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit. Reno, Nevada, 2001. AIAA 2001-0885.
- [12] Yan H., Adelgren R., Boguszko M., Elliott G., Knight D. // AIAA J. 2003. Vol. 41. N 10. P. 1988–1995.

- [13] Фомин В.М., Яковлев В.Н. Физические модели лазерного энергоподвода в газовый поток. Новосибирск, 2004. 43 с. (Препринт / Институт теоретической и прикладной механики СО РАН. N 2–2004).
- [14] *Glumac N., Elliott G., Bogushko M.* // AIAA. J. 2005. Vol. 43. N 9. P. 1984–1994.
- [15] *Jiang Z., Takyama K., Moosad K.P.B., Onodera O., Sun M.* // Shock Waves. 1998. Vol. 8. P. 337–349.
- [16] *Седов Л.И.* // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 6. С. 241–250.
- [17] *Dors I., Parigger C., Lewis J.* // Proc. of the 38<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, 2000. AIAA 2000–0717.
- [18] *Taylor G.E.* // Proc. Roy. Soc. Lond. 1950. Vol. 201. P. 159–174.
- [19] *Kandala R., Candler G.* // AIAA J. 2004. Vol. 42. N 11. P. 2266–2275.
- [20] *Knight D.D., Yan H., Candler G., Kandala R., Zheltovodov A.A., Pimonov E.A.* // Proc. of the 15<sup>th</sup> Intern. Conf. on MHD Energy Conversion and the 6<sup>th</sup> Intern. Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, 2005. Vol. 2. P. 514–524.
- [21] *Yan H., Knight D., Kandala R., Candler G.* // AIAA J. 2007. Vol. 45. N 6. P. 1270–1280.
- [22] *Yan H., Giatonde D.* // AIAA J. 2008. Vol. 46. N 6. P. 1424–1431.
- [23] *Adelgern R.G., Elliott G.S., Knight D.D., Zheltovodov A.A., Beutner T.J.* // AIAA J. 2005. Vol. 43. N 2. P. 256–269.
- [24] *Георгиевский П.Ю., Левин В.А.* // ТВТ. 2010. Т. 48. № 1 (дополнительный). С. 74–81.
- [25] *Фомин В.М., Третьяков П.К., Зудов В.Н.* // ДАН. 2010. Т. 435. № 1. С. 46–48.
- [26] *Schülein E., Zheltovodov A.A., Pimonov E.A., Loginov M.S.* // Intern. J. Aerospace Innov. 2010. Vol. 2. N 3. P. 165–187.
- [27] *Аульченко С.М., Замураев В.П., Калинина А.П.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 201–208.
- [28] *Azarova O., Knight D., Kolesnichenko Yu.* // Shock Waves. 2011. Vol. 21. N 5. P. 439–450.
- [29] *Einfeldt B.* // SIAM J. Numer. Anal. 1988. Vol. 35. N 2. P. 294–318.
- [30] *Van Leer B.* // J. Comput. Phys. 1979. Vol. 32. N 1. P. 115–173.
- [31] *Yan H., Knight D., Kandala R., Candler G.* // Proc. of the 2<sup>nd</sup> AIAA Flow Control Conf. Portland, Oregon, 2004. AIAA 2004–2126.
- [32] *Georgievsky P.Yu., Levin V.A.* // Proc. of the Intern. Conf. on the Methods of Aerophys. Res., Novosibirsk, 1996. Pt. 3. P. 67–73.
- [33] *Bogushko M., Elliott G.* // Exp. Fluids. 2005. Vol. 38. N 1. P. 33–49.
- [34] *Гейдон А. Герл И.* Ударная труба в химической физике высоких температур. М.: Мир, 1966. 428 с.
- [35] *Liang S.M., Hsu J.L., Wang J.S.* // AIAA J. 2001. Vol. 39. N 6. P. 1152–1158.
- [36] *Liang S.M., Wang J.S., Chen H.* // Shock Waves. 2002. Vol. 12. N 1. P. 59–68.
- [37] *Adelgren R.G.* Localized flow control with energy deposition. Ph. D. Theses. New Brunswick, N.J.: Rutgers, The State University of New Jersey, 2002. 323 p.
- [38] *Александров А.Ф., Видякин Н.Г., Лакутин В.А., Скворцов М.Г., Тимофеев И.Б., Черников В.А.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 4. С. 771–774.
- [39] *Андрущенко В.А., Чудов Л.А.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 1. С. 96–100.
- [40] *Войнович В.А., Жмакин А.И., Фурсенко А.А.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. № 7. P. 1259–1267.
- [41] *Георгиевский П.Ю., Левин В.А.* // Изв. РАН МЖГ. 1993. № 4. С. 174–183.
- [42] *Механика в СССР за 50 лет. Механика жидкости и газа / Под ред. Л.И. Седова, Я.Б. Зельдовича, А.Ю. Ишлинского, М.А. Лаврентьева, Г.К. Михайлова, Н.И. Мухелишвили и Г.Г. Черного. М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 310. (880 с.).*
- [43] *Гордейчик Б.Н., Немчинов И.В.* Образование предвестника при взаимодействии ударной волны с теплым слоем. Прикладные методы механики. М.: МФТИ, 1984. С. 12–17. Деп. в ВИНТИ, № 2529–84.
- [44] *Артемьев В.И., Бергельсон В.И., Калмыков А.А., Немчинов И.В., Орлова Т.И., Рыбаков В.А., Смирнов В.А., Хазинс В.М.* // Изв. РАН. МЖГ. 1988. № 2. С. 158–163.
- [45] *Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г.* // Изв. РАН МЖГ. 2010. № 2. С. 126–134.
- [46] *Niederhaus J.H.J., Greenough J.A., Oakley J.G., Ranjan D., Anderson M.H., Bonazza R.A.* // J. Fluid. Mech. 2008. Vol. 594. P. 85–124.
- [47] *Георгиевский П.Ю., Левин В.А., Сутырин О.Г.* // Изв. РАН МЖГ. 2011. № 6. С. 146–154.