

## Расчет электрического потенциала и силы Лоренца в локально-ионизованном МГД-течении в неоднородном магнитном поле при поперечном обтекании кругового цилиндра

© Е.Г. Шейкин, Yang Cheng Wei

Санкт-Петербургский государственный университет,  
198904 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: egsh@pochta.ru

(Поступило в Редакцию 22 декабря 2011 г. В окончательной редакции 4 апреля 2012 г.)

Найдено аналитическое решение электродинамических уравнений для электрического потенциала в локально-ионизованном магнитогидродинамическом МГД течении при поперечном обтекании кругового цилиндра в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником. Получены аналитические формулы для расчета объемной плотности силы Лоренца, действующей на поток в локально-ионизованном МГД-течении, для случая проводящей и непроводящей поверхностей цилиндра. Проанализировано влияние параметра Холла и ширины области МГД-взаимодействия на величину силы Лоренца. Показано, что у поверхности цилиндра в окрестности критической точки при определенных условиях возникает сила Лоренца, не тормозящая, а ускоряющая поток.

### Введение

В настоящее время в литературе большое внимание уделяется изучению магнитогидродинамического (МГД) воздействия на поток с целью управления его характеристиками [1–16]. Изучаются возможности управления: потоком в воздухозаборнике летательного аппарата, процессами смешения потоков, процессами в двигателе высокоскоростного летательного аппарата, положением головной ударной волны, тепловыми потоками на обтекаемую поверхность. В большом числе указанных МГД-приложений равновесная проводимость потока пренебрежимо мала, и для осуществления МГД-воздействия на поток необходимо тем или иным способом создать в потоке неравновесную проводимость [4,6,8,17]. При этом поток будет локально ионизован. Геометрия области неравновесной ионизации зависит от способа ионизации потока и от конфигурации магнитного поля. В большинстве рассматриваемых МГД-приложений магнитное поле будет неоднородным. Для расчета МГД-воздействия на локально-ионизованный поток в неоднородном магнитном поле необходимо решать систему МГД-уравнений совместно с электродинамическими уравнениями, определяющими распределение потенциала в области МГД-взаимодействия.

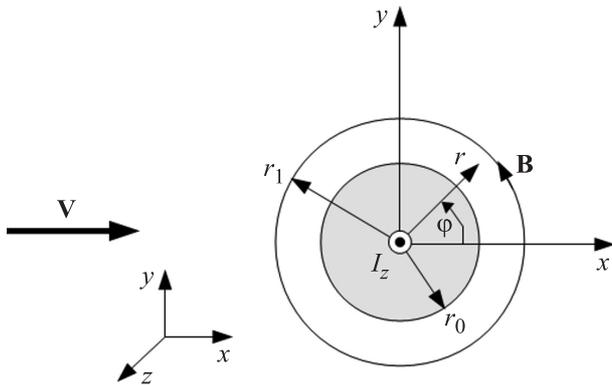
В работах [18,19] найдено аналитическое решение для электрического потенциала и получены аналитические выражения для расчета силы Лоренца, действующей на локально-ионизованный МГД-поток в неоднородном магнитном поле создаваемым прямолинейным проводником для случая плоского течения. В [18] показано, что пространственным распределением силы Лоренца можно управлять, прикладывая внешнее электрическое поле. Расчеты локально-ионизованного МГД-течения в [19,20] показали, что возможность управления пространственным распределением силы Лоренца очень важна, так

как позволяет повысить эффективность МГД-управления течением.

В настоящей работе будут получены аналитические формулы для расчета электрического потенциала и силы Лоренца, действующей на поток в локально-ионизованном МГД-течении при поперечном обтекании цилиндра. Исследовано влияние граничных условий на поверхности цилиндра, параметра Холла, размеров области МГД-взаимодействия, величины приложенного электрического поля на силу Лоренца.

### Уравнение для электрического потенциала в локально-ионизованном МГД-течении в неоднородном магнитном поле

В качестве неоднородного магнитного поля будем рассматривать поле, создаваемое прямолинейным проводником. Геометрия задачи и основные обозначения показаны на рис. 1. Рассматривается локально-ионизованное МГД-течение. Предполагается, что плазма вокруг цилиндра существует только в ограниченной области:  $r_0 < r < r_1$ . Проводимость потока вне этой области равна нулю. Рассматривается двумерное приближение, в котором характеристики МГД-течения, электрического и магнитного полей, а также токи в плазме не зависят от координаты  $z$ . Магнитное поле создается прямолинейным проводником, направленным вдоль оси  $z$  и проходящим через центр координат в точке  $(0,0)$ , совпадающей с осью симметрии кругового цилиндра радиуса  $r_0$ . Ограничимся рассмотрением режимов с малым значением магнитного числа Рейнольдса. В этом случае магнитное поле, индуцируемое плазменными токами, много меньше внешнего магнитного поля, и при расчетах магнитного поля в потоке индуцированным магнитным полем



**Рис. 1.** Геометрия, используемая для нахождения электрического потенциала в МГД-течении в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным током  $I_z$ , при поперечном обтекании цилиндра радиуса  $r_0$ .

можно пренебречь. В рассматриваемом приближении, радиальная зависимость величины магнитной индукции в области МГД-взаимодействия может быть определена следующим соотношением:  $B = B_0 r_0 / r$ , где  $B_0$  — величина магнитной индукции на границе с поверхностью цилиндра.

Для решения электродинамической задачи используем цилиндрическую систему координат, в которой магнитное поле имеет более простой вид

$$B_r = 0, \quad B_\varphi = B_0 \frac{r_0}{r}, \quad B_z = 0. \quad (1)$$

Нижние индексы обозначают проекции вектора на соответствующие оси в цилиндрической системе координат.

Для нахождения пространственного распределения электрического потенциала в области МГД-течения необходимо решить уравнение непрерывности для плотности электрического тока в плазме  $\mathbf{j}$  совместно с обобщенным законом Ома [21]. Рассматриваем стационарное МГД-течение. Обобщенный закон Ома запишем в следующем виде [21]:

$$\mathbf{j} + \mu_e (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{v}$  — скорость потока,  $\mu_e$  — подвижность электронов,  $\sigma$  — проводимость потока. Проекции плотности тока, определяемые обобщенным законом Ома (2) для неоднородного магнитного поля (1), согласно [18], могут быть записаны в следующем виде:

$$j_r = \frac{\sigma B_0 r_0 r \left( \frac{r E_r}{r_0 B_0} + \beta_0 \frac{r_0}{r} v_r + \mu_e E_z \right)}{r^2 + \beta_0^2 r_0^2}, \quad j_\varphi = \sigma E_\varphi, \\ j_z = \frac{\sigma B_0 r_0 r \left( \frac{E_z}{B_0} \frac{r}{r_0} - \mu_e E_r + v_r \right)}{r^2 + \beta_0^2 r_0^2}, \quad (3)$$

где  $\beta_0 = \mu_e B_0$  — характерное значение параметра Холла, определяемое значением магнитной индукции на поверхности цилиндра.

Уравнение непрерывности тока в цилиндрической системе координат в рассматриваемом двумерном приближении выглядит следующим образом:

$$\text{div } \mathbf{j} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r j_r) + \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (4)$$

Уравнение для электрического потенциала  $\Phi$  получается подстановкой (3) в уравнение непрерывности (4), принимая во внимание, что  $\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$ . При выводе уравнения для потенциала ограничимся рассмотрением приближения постоянной проводимости потока и подвижности электронов в области МГД-взаимодействия. Также ограничимся рассмотрением слабого уровня МГД-воздействия на поток, при котором можно пренебречь влиянием изменения параметров течения, обусловленным МГД-воздействием на поток, на формирование потенциала в области МГД-взаимодействия. Так как в рассматриваемой модели параметры электрического поля не зависят от координаты  $z$ , то уравнение Максвелла  $\text{rot } \mathbf{E}$  приводит к требованию постоянства поля  $E_z$  [18]. В этом случае потенциал в цилиндрической системе координат может быть записан в следующем виде:  $\Phi(r, \varphi, z) = \Phi(r, \varphi) + C - E_z z$ , где  $C$  — неопределенная константа.

Подставляя уравнения (3) в уравнение непрерывности (4), будем рассматривать общий случай, полагая, что скорость потока не является постоянной величиной. В результате получим следующее уравнение для электрического потенциала:

$$(r^2 + \beta_0^2 r_0^2)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + r^4 (r^2 + \beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ + r^3 (r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r (r^2 - \beta_0^2 r_0^2) \frac{\beta_0^2 r_0^2}{\mu_e} v_r \\ - (r^4 + \beta_0^2 r^2 r_0^2) \frac{\beta_0^2 r_0^2}{\mu_e} \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2r^2 \beta_0^3 r_0^3 E_z = 0. \quad (5)$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения, полученного в работе [18], наличием члена с производной  $\partial v_r / \partial r$ . Отсутствие такого члена уравнения в [18] обусловлено тем, что там рассматривалось плоское течение, для которого справедливо условие  $\partial v_r / \partial r = 0$ .

Численное решение уравнения (5) может быть получено для любого известного распределения скорости в потоке как дозвукового, так и сверхзвукового течений. Аналитическое решение можно получить только в исключительных случаях при наличии простого выражения радиальной скорости через координаты. Наиболее простой, аналитический вид распределения скорости потока при обтекании цилиндра получается в приближении потенциального течения. Согласно [22], радиальная проекция скорости потока, при потенциальном обтекании цилиндра в геометрии, показанной на рис. 1, определяется следующим образом:

$$v_r = V \cos \varphi (1 - (r_0/r)^2), \quad (6)$$

где  $V$  — скорость потока на бесконечном удалении от цилиндра.

Следует отметить, что выражение (6) отвечает приближению невязкого и несжимаемого газа, поэтому его использование будет тем более точным, чем меньше ширина пограничного слоя по сравнению с шириной области МГД-взаимодействия. Условие несжимаемого газа отвечает дозвуковому течению с числом Маха в набегающем потоке  $M < 0.3$  [23]. Для того чтобы определить границы практической применимости результатов, полученных с использованием приближения (6), необходимо отметить, что безотрывное поперечное обтекание цилиндра наблюдается только при малых числах Рейнольдса ( $Re$ ). При увеличении числа Рейнольдса, начиная с  $Re = 10$ , происходит отрыв потока, и движение газа за подветренной стороной обтекаемого цилиндра становится вихревым [24]. Ясно, что в этом случае, практический интерес будут представлять только результаты, полученные в окрестности передней части обтекаемого цилиндра. Более точно область применимости полученных результатов можно оценить, сравнивая экспериментальное распределение давления по поверхности цилиндра с распределением, отвечающим потенциальному приближению. Так, согласно [24], при сверхкритическом значении числа Рейнольдса  $Re = 6.7 \cdot 10^5$  эти давления достаточно близки вплоть до точки отрыва потока.

Подставим выражение для радиальной проекции скорости  $v_r$  (6) в уравнение (5) и, проделав очевидные преобразования, получим следующее уравнение для потенциала  $\Phi(r, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} & (r^2 + \beta_0^2 r_0^2)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + r^4 (r^2 + \beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ & + r^3 (r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ & + \frac{(r^4 - \beta_0^2 r_0^2 (r^2 + \beta_0^2 r_0^2) - 3r_0^2 r^2)}{r} \frac{V \beta_0^2 r_0^2}{\mu_e} \cos \varphi \\ & - 2r^2 \beta_0^3 r_0^3 E_z = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Граничные условия на поверхности цилиндра при  $r = r_0$  зависят от свойств поверхности. Будем рассматривать два случая поверхности: идеальный проводник (проводящая поверхность) и идеальный изолятор (непроводящая поверхность). На проводящей поверхности должно выполняться условие эквипотенциальности, в случае же непроводящей поверхности будем использовать условие непротекания тока через эту поверхность. Что касается условий на внешней границе, то в рассматриваемом приближении проводимость потока существует только в области  $r_0 < r < r_1$ , и, следовательно, ток через поверхность  $r = r_1$  равен нулю.

При решении уравнения (7) будем рассматривать два типа граничных условий. В случае непроводящей поверхности цилиндра используем следующие граничные условия:

$$j_r|_{r=r_0, r=r_1} = 0. \quad (8a)$$

В случае проводящей поверхности цилиндра используем следующие граничные условия:

$$E_\varphi|_{r=r_0} = 0, \quad j_r|_{r=r_1} = 0. \quad (8b)$$

## Решение уравнения для электрического потенциала в локально-ионизованном МГД-течении в неоднородном магнитном поле

Решение неоднородного дифференциального уравнения в частных производных (7) находим как сумму общего решения однородного уравнения  $\Phi_0(r, \varphi)$  и частного решения неоднородного уравнения  $\Phi_1(r, \varphi)$  в форме  $\Phi(r, \varphi) = \Phi_1(r, \varphi) + \Phi_0(r, \varphi)$ . При этом однородное уравнение относительно функции  $\Phi_0(r, \varphi)$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & (r^2 + \beta_0^2 r_0^2)^2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \varphi^2} + r^4 (r^2 + \beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} \\ & + r^3 (r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Частное решение неоднородного уравнения (7) ищем в следующем виде:  $\Phi_1(r, \varphi) = f_1(r)V \cos \varphi + f_2(r)E_z$ . Подставив данное выражение в уравнение (7), получим следующие уравнения для функций  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$ :

$$\begin{aligned} & \mu_e r^5 (r^2 + \beta_0^2 r_0^2) \frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \mu_e r^4 (r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2) \frac{df_1(r)}{dr} \\ & - \mu_e r (r^2 + \beta_0^2 r_0^2)^2 f_1(r) \\ & + \beta_0^2 r_0^2 (r^4 - (\beta_0^2 + 3)r_0^2 r^2 - \beta_0^2 r_0^4) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & r^2 (r^2 + \beta_0^2 r_0^2) \frac{d^2 f_2(r)}{dr^2} + r (r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2) \frac{df_2(r)}{dr} \\ & - 2\beta_0^3 r_0^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Частное решение уравнения (10) будем искать в виде  $f_1(r) = A_1/r + A_2 r$ . Подставив данное выражение в уравнение (10), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & (1 + \mu_e A_2) \beta_0^2 r_0^2 r^4 - (\beta_0^2 r_0^2 (1 + \mu_e A_2) \\ & + 3(r_0^2 + \mu_e A_1)) \beta_0^2 r_0^2 r^2 - (r_0^2 + \mu_e A_1) \beta_0^4 r_0^4 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидным решением уравнения (12) является  $A_1 = -r_0^2/\mu_e$ ,  $A_2 = -1/\mu_e$ . Таким образом, получаем  $f_1(r) = -(r^2 + r_0^2)/(\mu_e r)$ . Что касается уравнения (11), то в [19] получено общее решение данного уравнения. В качестве частного решения возьмем решение из [19] при нулевых значениях неопределенных констант, в результате получим  $f_2(r) = (\beta_0 r_0)^3/(2r^2)$ . Таким образом, частное решение уравнения (7) может быть записано в следующем виде:

$$\Phi_1(r, \varphi) = -V \cos \varphi \frac{r^2 + r_0^2}{\mu_e r} + E_z \frac{(\beta_0 r_0)^3}{2r^2}. \quad (13)$$

Решение однородного уравнения (9) находится методом разделения переменных. Искомое решение представляем в виде суммы  $\Phi_0(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r)\Psi_k(\varphi)$ . Согласно [18], система уравнений для нахождения функций  $R_k(r)$  и  $\Psi_k(\varphi)$  имеет следующий вид:

$$\frac{d^2 R_k}{dr^2} + \frac{r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2}{r(r^2 + \beta_0^2 r_0^2)} \frac{dR_k}{dr} - k^2 \frac{r^2 + \beta_0^2 r_0^2}{r^4} R_k = 0, \quad (14)$$

$$\frac{d^2 \Psi_k}{d\varphi^2} + k^2 \Psi_k = 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (14) для значений  $k \geq 1$  получено в [18] и имеет следующий вид:

$$R_k(r) = C_1^k Z_1(k, \beta_0 r_0/r) + C_2^k Z_2(k, \beta_0 r_0/r), \quad k \geq 1. \quad (16)$$

Здесь  $C_i^k$  — неопределенные константы, функции  $Z_1$  и  $Z_2$  являются комбинацией модифицированных функций Бесселя и определяются следующим образом:

$$Z_1(k, x) = I_k(kx) + x I_{k+1}(kx),$$

$$Z_2(k, x) = K_k(kx) - x K_{k+1}(kx).$$

При  $k = 0$  уравнение (14) принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 R_0}{dr^2} + \frac{r^2 + 3\beta_0^2 r_0^2}{r(r^2 + \beta_0^2 r_0^2)} \frac{dR_0}{dr} = 0.$$

Решение данного уравнения с использованием результатов из [25] может быть представлено в следующем виде:

$$R_0(r) = C_1^0 + C_2^0 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_0 r_0}{r} \right)^2 + \ln \left( \frac{\beta_0 r_0}{r} \right) \right). \quad (17)$$

Решение уравнения (15) при значениях  $k \geq 1$  имеет вид

$$\Psi_k(\varphi) = C_3^k \cos k\varphi + C_4^k \sin k\varphi, \quad k \geq 1. \quad (18)$$

При  $k = 0$  имеем

$$\Psi_0(\varphi) = C_3^0 + C_4^0 \varphi. \quad (19)$$

Из условий задачи, очевидно, что потенциал должен быть  $2\pi$ -периодической функцией угла  $\varphi$ , в частности,  $\Phi(r, 0) = \Phi(r, 2\pi)$ . Отсюда можно заключить, что  $C_4^0 = 0$ .

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7) может быть записано в следующем виде:

$$\Phi(r, \varphi) = \Phi_1 + \Phi_0 = -V \cos \varphi \frac{r^2 + r_0^2}{\mu_e r} + E_z \frac{(\beta_0 r_0)^2}{2r^2} + \sum_{k=0}^{\infty} R_k(r)\Psi_k(\varphi), \quad (20)$$

где функции  $R_k(r)$  и  $\Psi_k(\varphi)$  определяются уравнениями (16)–(19).

Для нахождения неопределенных констант  $C_i^k$  в  $R_k(r)$  и  $\Psi_k(\varphi)$  используем граничные условия (8). Выражение (3), определяющее радиальный ток через компоненты электрического поля, позволяет с учетом того, что  $E_r = -\partial\Phi/\partial r$ , привести граничное условие  $j_r|_{r=r_k} = 0$  к условию для потенциала. В результате граничные условия (8а) для непроводящей поверхности цилиндра принимают следующий вид:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \beta_0 E_z, \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \frac{\beta_0 r_0}{r_1} E_z + \left( \frac{\beta_0 r_0}{r_1} \right)^2 \frac{V \cos \varphi}{\mu_e} \left( 1 - \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right).$$

Подставив решение (20) в граничные условия (21), нетрудно получить константы  $C_i^k$  в следующем виде:

$$C_2^0 = -r_0, \quad C_3^0 = \beta_0 E_z, \quad C_3^1 = V/\mu_e,$$

$$C_1^1 = -\frac{(r_1 - r_0^2/r_1)K_1(\beta_0)}{I_1(\beta_0 r_0/r_1)K_1(\beta_0) - I_1(\beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)},$$

$$C_2^1 = \frac{(r_1 - r_0^2/r_1)I_1(\beta_0)}{I_1(\beta_0 r_0/r_1)K_1(\beta_0) - I_1(\beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)}. \quad (22)$$

Все остальные константы  $C_i^k$  равны нулю. В результате решение уравнения (7) для непроводящей поверхности цилиндра может быть записано следующим образом:

$$\Phi(r, \varphi) = -\beta_0 r_0 E_z \ln \left( \frac{\beta_0 r_0}{r} \right) + \frac{V \cos \varphi}{\mu_e} \left( C_1^1 Z_1(1, \beta_0 r_0/r) + C_2^1 Z_2(1, \beta_0 r_0/r) - \frac{r^2 + r_0^2}{r} \right). \quad (23)$$

Теперь получим выражения для констант  $C_i^k$  с использованием граничных условий для проводящей поверхности цилиндра (8b). Принимая во внимание, что  $E_\varphi = -(1/r)\partial\Phi/\partial\varphi$ , запишем граничные условия (8b) для проводящей поверхности цилиндра в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=r_1} = \frac{\beta_0 r_0}{r_1} E_z + \left( \frac{\beta_0 r_0}{r_1} \right)^2 \frac{V \cos \varphi}{\mu_e} \left( 1 - \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right).$$

Подставив решение (20) в граничные условия (24), нетрудно получить неопределенные константы  $C_i^k$  в следующем виде:

$$C_2^0 = -r_0, \quad C_3^0 = \beta_0 E_z, \quad C_3^1 = V/\mu_e,$$

$$C_1^1 = -\frac{2K_1(\beta_0 r_0/r_1)r_0 + (r_1 - r_0^2/r_1)Z_2(1, \beta_0)}{Z_2(1, \beta_0)I_1(\beta_0 r_0/r_1) - Z_1(1, \beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)},$$

$$C_2^1 = \frac{2I_1(\beta_0 r_0/r_1)r_0 + (r_1 - r_0^2/r_1)Z_2(1, \beta_0)}{Z_2(1, \beta_0)I_1(\beta_0 r_0/r_1) - Z_1(1, \beta_0)K_1(\beta_0 r_0/r_1)}. \quad (25)$$

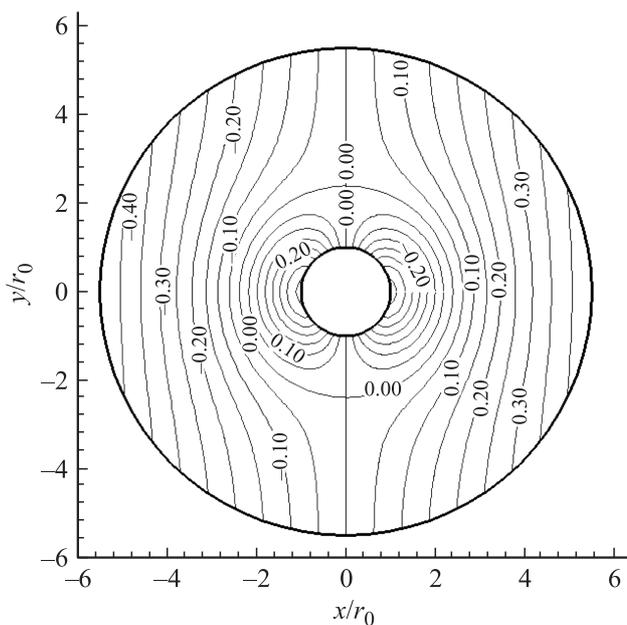
Все остальные константы  $C_i^k$  равны нулю.

Сравнение коэффициентов, определяемых уравнениями (25) и (22), показывает, что отличие наблюдается только для коэффициентов  $C_1^1$  и  $C_2^1$ . Таким образом, решение уравнения (7) в форме (20) описывает как случай непроводящей поверхности цилиндра, если  $C_1^1$  и  $C_2^1$  определяются уравнениями (22), так и случай проводящей поверхности цилиндра, если эти константы определяются уравнениями (25).

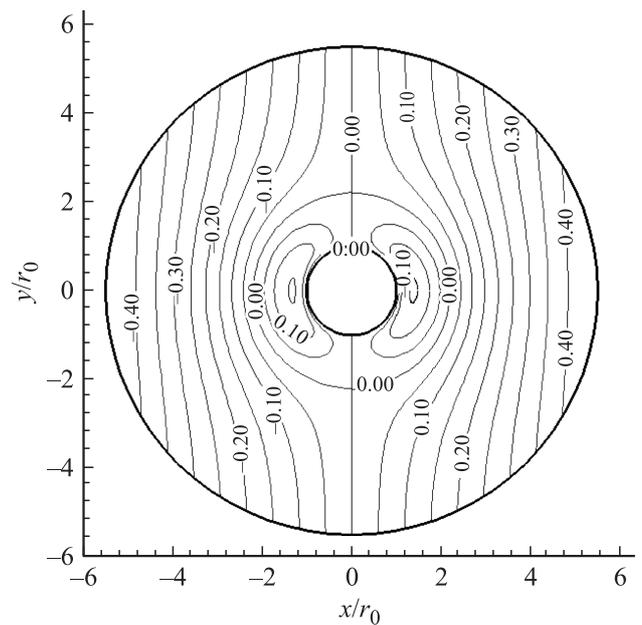
### Анализ полученного решения. Расчет силы Лоренца, действующей на поток

На рис. 2–4 показано распределение потенциала в области МГД-взаимодействия в случае непроводящей и проводящей поверхности цилиндра при значении  $\beta_0 = 3$ . Потенциал представлен в безразмерной форме, нормированный на величину  $Vr_0/\mu_e$ :  $\Phi_n = \frac{\Phi}{Vr_0/\mu_e}$ . Из рис. 2–4 следует, что потенциал симметричен относительно оси  $x$  при любом значении поля  $E_z$ . Таким образом, потенциал является четной функцией координаты  $y$ . При значении  $E_z = 0$  (рис. 2, 3) распределение потенциала выглядит симметричным относительно оси  $y$ , но при переходе из левой полуплоскости в правую происходит изменение знака потенциала. Таким образом, при  $E_z = 0$  потенциал является нечетной функцией координаты  $x$ . При отличном от нуля поле  $E_z$ , согласно рис. 4, происходит нарушение указанной симметрии.

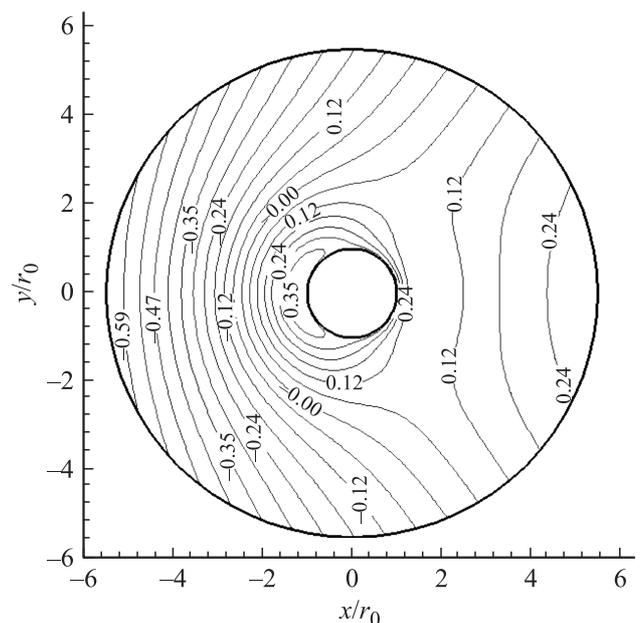
Отметим, что распределения потенциала для непроводящей и проводящей поверхностей цилиндра сильно отличаются в окрестности обтекаемого цилиндра. Для представленных результатов эта область отвечает диапазону значений  $1 < r/r_0 < 2$ . В случае проводящей по-



**Рис. 2.** Распределение электрического потенциала в области МГД-взаимодействия при непроводящей поверхности цилиндра при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ ,  $\beta_0 = 3$ .

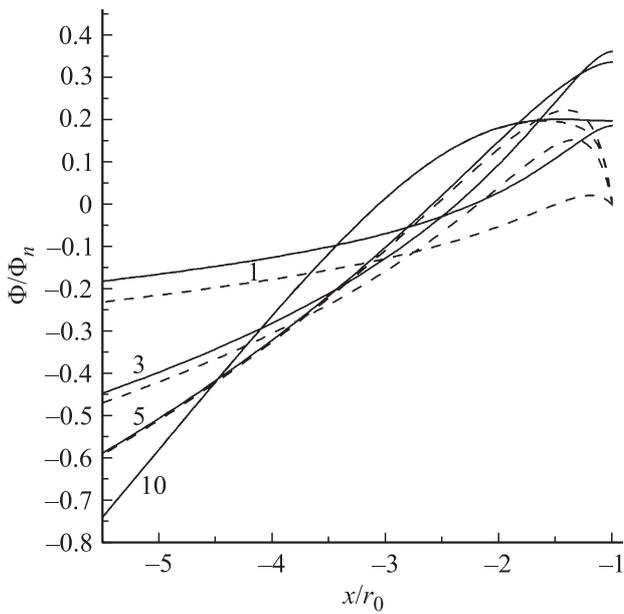


**Рис. 3.** Распределение электрического потенциала в области МГД-взаимодействия при проводящей поверхности цилиндра при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ ,  $\beta_0 = 3$ .



**Рис. 4.** Распределение электрического потенциала в области МГД-взаимодействия при проводящей поверхности цилиндра при значении параметров:  $E_z = -0.1VB_0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ ,  $\beta_0 = 3$ .

верхности цилиндра (рис. 3, 4) потенциал поверхности постоянен и принимает экстремальные значения вблизи проводящей поверхности. В случае же непроводящей поверхности цилиндра (рис. 2) потенциал принимает экстремальные значения на границах области МГД-взаимодействия, и поверхность цилиндра не является эквипотенциальной.



**Рис. 5.** Распределение электрического потенциала в области МГД-взаимодействия, при значении параметров:  $\varphi = \pi$ ,  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ . Значения  $\beta_0$  указаны у кривых. Сплошные кривые отвечают непроводящей поверхности цилиндра, штриховые — проводящей поверхности цилиндра.

На рис. 5 приведены зависимости потенциала от координаты  $x$ , характеризующие радиальную зависимость потенциала при  $\varphi = \pi$ . Из рис. 5 следует, что для случая с проводящей поверхностью цилиндра потенциал немонотонно зависит от радиуса, достигая максимального значения недалеко от поверхности цилиндра. Положение максимума удаляется от цилиндра при увеличении  $\beta_0$ . Из приведенных на рис. 5 результатов видно, что величина данного максимума немонотонно зависит от параметра  $\beta_0$ . В случае непроводящей поверхности цилиндра потенциал монотонно изменяется по радиусу. Максимальное значение потенциала достигается на поверхности цилиндра. Величина данного максимума также немонотонно зависит от параметра  $\beta_0$ . Из приведенных результатов следует, что увеличение параметра  $\beta_0$  приводит к уменьшению величины поля  $E_r = -\partial\Phi/\partial r$  около поверхности цилиндра. Противоположная тенденция наблюдается около внешней границы области МГД-взаимодействия, где увеличение параметра  $\beta_0$  приводит к росту величины  $E_r$ . Из рис. 5 видно, что в диапазоне  $-r_1 < x < -2r_0$  различия между потенциалами, рассчитанными для различных граничных условий на поверхности цилиндра, уменьшаются с ростом параметра  $\beta_0$ .

Сила Лоренца, действующая на МГД-течение при заданном распределении магнитного поля, определяется токами, протекающими в области МГД-взаимодействия, с использованием соотношения  $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{F}$  — объемная плотность силы Лоренца. Подставив выражение для потенциала (23) в уравнения (3) для плотностей

токов, получим следующие выражения для проекций плотности тока в плоскости  $xu$ :

$$j_r = \frac{\sigma B_0 V}{\beta_0} \left[ \frac{1}{r} \left( C_1^1 I_1 \left( \frac{\beta_0 r_0}{r} \right) + C_2^1 K_1 \left( \frac{\beta_0 r_0}{r} \right) \right) + 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \cos \varphi,$$

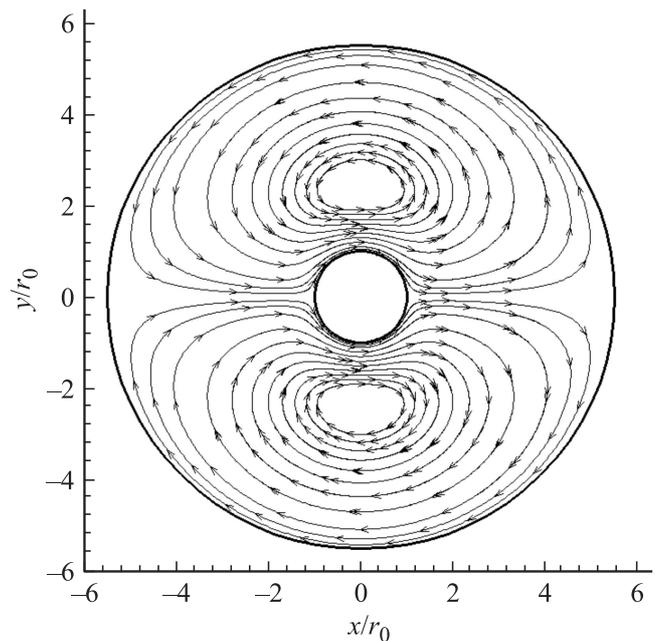
$$j_\varphi = \frac{\sigma B_0 V}{\beta_0} \left[ \frac{1}{r} \left( C_1^1 Z_1(1, \beta_0 r_0/r) + C_2^1 Z_2(1, \beta_0 r_0/r) \right) - 1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \sin \varphi. \tag{26}$$

На рис. 6, 7 показаны линии тока в области МГД-взаимодействия для случая непроводящей и проводящей поверхностей цилиндра. В случае непроводящей поверхности (рис. 6) токи в плоскости  $xu$  имеют вихревой характер и ограничены только областью МГД-взаимодействия. В случае же проводящей поверхности цилиндра замыкание токов происходит через поверхность цилиндра.

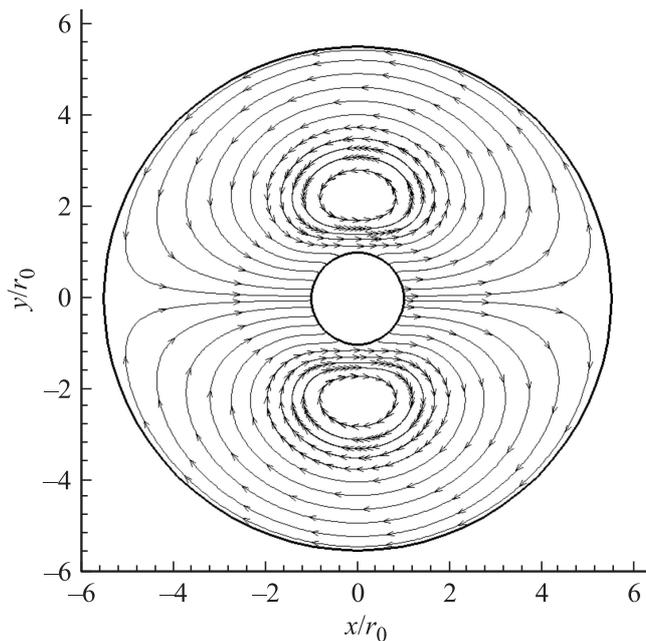
Плотность тока  $j_z$ , которая определяет силу Лоренца, действующую в плоскости  $xu$ , выразим через радиальную плотность тока  $j_r$ , используя уравнение (3):

$$j_z = \sigma \left( E_z + B_0 \frac{r_0}{r} v_r \right) - j_r \beta_0 \frac{r_0}{r}, \tag{27}$$

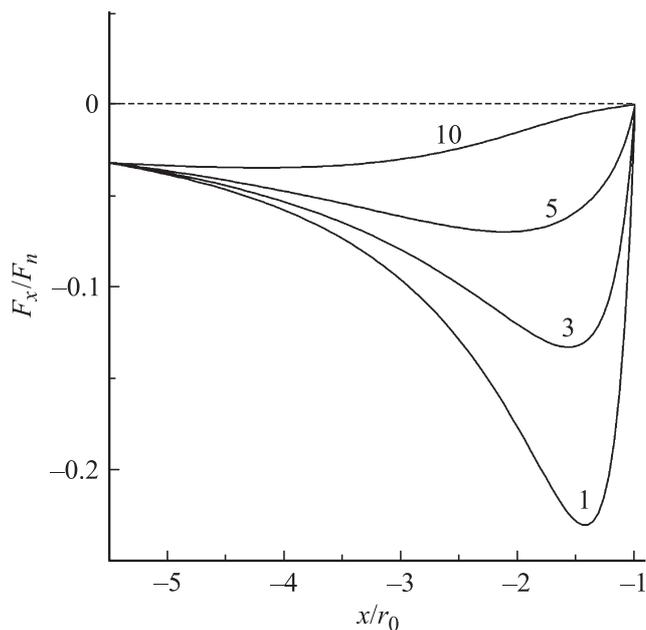
где  $j_r$  задается выражением (26), а  $v_r$  — выражением (6).



**Рис. 6.** Линии тока в области МГД-взаимодействия при непроводящей поверхности цилиндра при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ ,  $\beta_0 = 3$ .



**Рис. 7.** Линии тока в области МГД-взаимодействия при проводящей поверхности цилиндра при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ ,  $\beta_0 = 3$ .



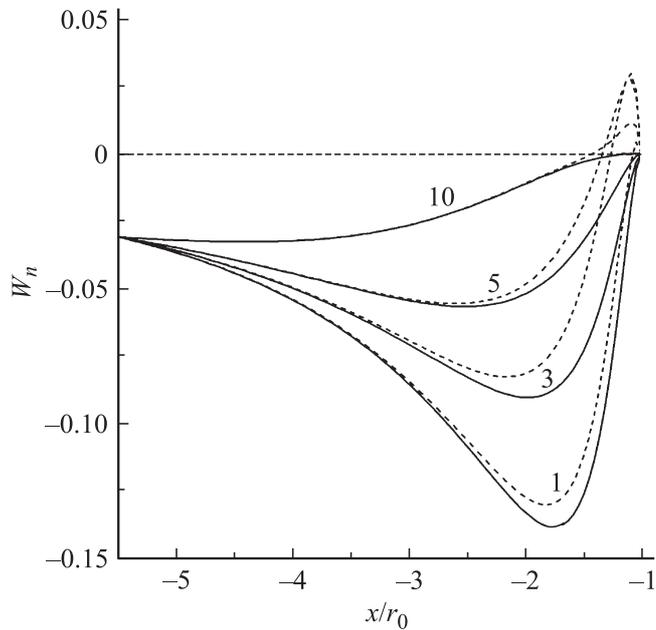
**Рис. 8.** Сила Лоренца, действующая вдоль линии торможения в области МГД-взаимодействия, при непроводящей поверхности цилиндра при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ . Значения  $\beta_0$  указаны у кривых.

Магнитное поле имеет только одну ненулевую компоненту  $B_\varphi$ , вследствие этого проекция силы Лоренца  $\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$  в плоскости  $xu$  имеет только радиальную компоненту, определяемую следующим соотношением:  $F_r = -j_z B_\varphi$ . Проекция силы Лоренца в декартовой системе координат определяются следующим образом:

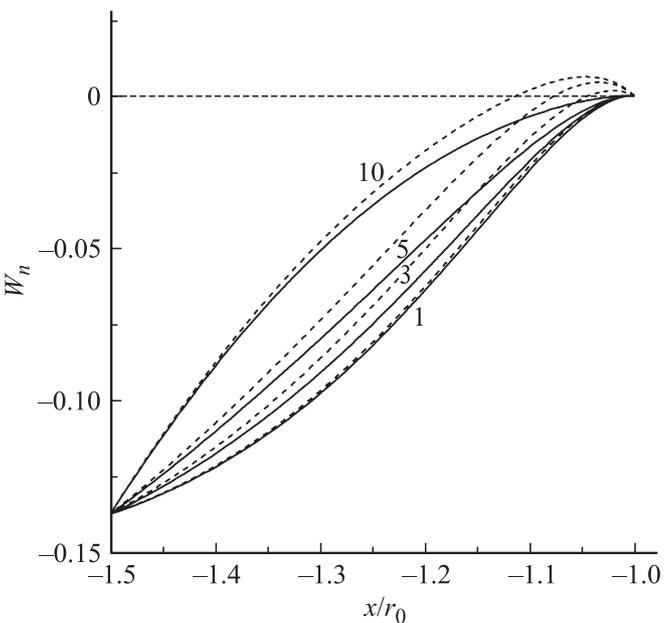
$F_x = F_r \cos \varphi$ ,  $F_y = F_r \sin \varphi$ . МГД-управление потоком часто рассматривается как способ снижения теплового потока на поверхность за счет МГД-торможения потока [9,15]. В этой связи наибольший интерес представляет исследование силы Лоренца вдоль линии торможения от внешней границы плазмы до критической точки, расположенной на передней части цилиндра. Согласно рис. 1, линия торможения совпадает с осью  $x$  при  $\varphi = \pi$ . На рис. 8 показана сила Лоренца  $F_x$ , нормированная на величину  $F_0 = \sigma B_0^2 V$ , при различных параметрах  $\beta_0$  для случая непроводящей поверхности цилиндра. Из рис. 8 следует, что на поверхности цилиндра сила Лоренца равна нулю. Отметим, что на границах области ( $x = -r_0$  и  $x = -r_1$ ) сила Лоренца не зависит от параметра Холла  $\beta_0$ . Такое поведение силы Лоренца  $F_x = -j_z B_\varphi \cos \varphi$  легко понять, анализируя выражение (27) для плотности тока  $j_z$ . Так как при непроводящей поверхности цилиндра радиальный ток  $j_r$  на границах области равен нулю, то, согласно (27), плотность тока  $j_z$  не зависит от  $\beta_0$  на границах области МГД-взаимодействия. Следовательно, и сила Лоренца не зависит от  $\beta_0$  на границах области МГД-взаимодействия. Кроме того, из (27) следует, что при  $E_z = 0$  плотность тока  $j_z$  на границах области пропорциональна радиальной скорости потока  $v_r$ . Так как на поверхности цилиндра  $v_r = 0$ , то и сила Лоренца там также обращается в нуль. Отрицательное значение силы Лоренца в области МГД-взаимодействия показывает, что сила Лоренца приводит к торможению набегающего на цилиндр потока. Наличие минимума в зависимости силы Лоренца от координаты обусловлено тем, что радиальная скорость потока уменьшается с приближением к поверхности цилиндра, а магнитное поле, наоборот, возрастает.

Из уравнения (27) следует, что в том случае, когда плотность тока  $j_r$  на поверхности цилиндра не равна нулю, или  $E_z \neq 0$ , возможно появление отличной от нуля силы Лоренца  $F_r$  на границе с поверхностью цилиндра. Но, так как на поверхности цилиндра  $v_r = 0$ , то работа силы Лоренца на этой границе будет равна нулю. Учитывая, что скорость потока  $v_r$  достаточно сильно меняется в окрестности поверхности цилиндра, представляется, что более целесообразно анализировать не силу Лоренца, а работу, которую данная сила совершает. Обозначим работу, совершаемую силой Лоренца в единицу времени в единице объема, как  $W = F_r v_r$ . На рис. 9 показана величина  $W$ , нормированная на величину  $\sigma B_0^2 V_0^2$ :  $W_n = W / (\sigma B_0^2 V_0^2)$ , при различных значениях параметра  $\beta_0$  для случаев с непроводящей и проводящей поверхностью цилиндра. Из рис. 9 видно, что в случае непроводящей поверхности цилиндра  $W_n < 0$ . Это показывает, что сила Лоренца, при данных условиях приводит к торможению потока. В случае проводящей поверхности цилиндра имеется узкая приповерхностная область, где  $W_n > 0$  и, следовательно, сила Лоренца приводит к ускорению потока в приповерхностном слое.

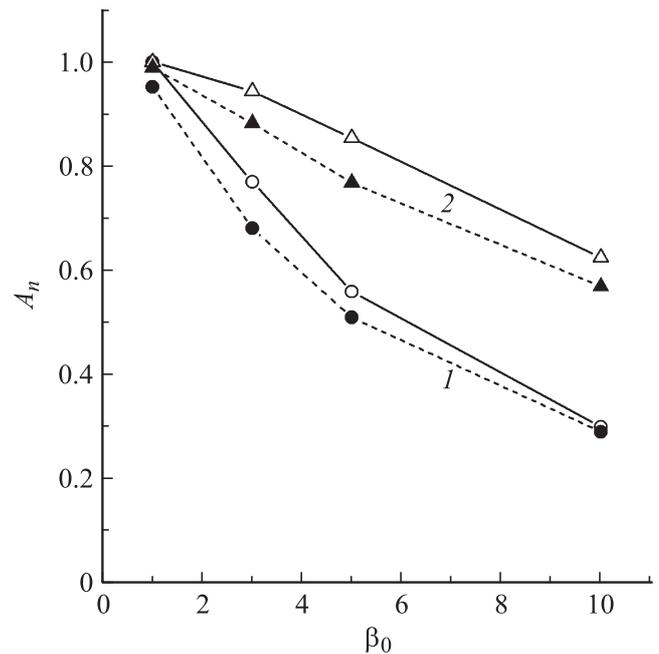
На рис. 10 показаны аналогичные зависимости  $W_n$  от координаты для области МГД-взаимодействия с  $r_1/r_0 = 1.5$ . Сравнение рис. 9 и 10 показывает, что сужение области МГД-взаимодействия приводит к уменьше-



**Рис. 9.** Величина  $W_n$  вдоль линии торможения в области МГД-взаимодействия при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ . Значения  $\beta_0$  указаны у кривых. Сплошные кривые отвечают непроводящей поверхности цилиндра, штриховые — проводящей поверхности цилиндра.



**Рис. 10.** Величина  $W_n$  вдоль линии торможения в области МГД-взаимодействия при значении параметров:  $E_z = 0$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ . Значения  $\beta_0$  указаны у кривых. Сплошные кривые отвечают непроводящей поверхности цилиндра, штриховые — проводящей поверхности цилиндра.



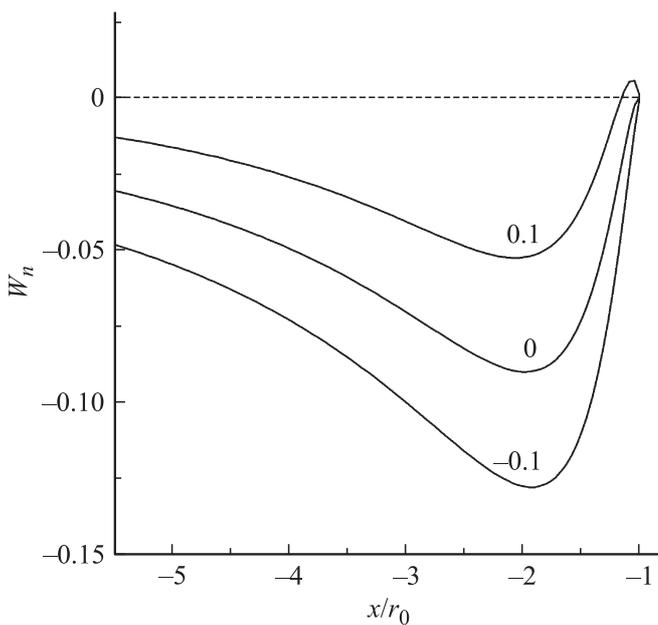
**Рис. 11.** Нормированная величина работы  $A_n$ , совершаемая силой Лоренца вдоль линии торможения на промежутке  $[-r_1, -r_0]$ , в зависимости от параметра  $\beta_0$  при  $E_z = 0$ . 1 —  $r_1/r_0 = 5.5$ ; 2 —  $r_1/r_0 = 1.5$ . Сплошные кривые отвечают непроводящей поверхности цилиндра, штриховые — проводящей поверхности цилиндра.

нию влияния параметра Холла  $\beta_0$  на величину  $W_n$ , а следовательно, и на силу Лоренца. Для количественной оценки этого эффекта проведем сравнение работы

$$A = \int_{-r_1}^{-r_0} W(x) dx,$$

совершаемой силой Лоренца на рассматриваемом промежутке МГД-взаимодействия, для различных условий. Работа, совершаемая силой Лоренца на промежутке  $[-r_1, -r_0]$ , представлена на рис. 11 в относительной форме. Величина  $A_n$  является отношением величины  $A$  для данных условий к максимальной для соответствующего значения  $r_1/r_0$  величине  $A$ . Из результатов, представленных на рис. 11, следует, что работа силы Лоренца по торможению потока в случае непроводящей поверхности цилиндра всегда больше, чем в случае проводящей поверхности цилиндра. При  $r_1/r_0 = 5.5$  увеличение параметра Холла  $\beta_0$  от 1 до 10 приводит к снижению величины  $A_n$  примерно в 3 раза. Для случая же  $r_1/r_0 = 1.5$  величина  $A_n$  снижается только в 1.5 раза. Таким образом, результаты рис. 11 показывают, что уменьшение ширины области МГД-взаимодействия позволяет снизить влияние параметра Холла на силу Лоренца.

Влияние электрического поля  $E_z$  на силу Лоренца демонстрирует рис. 12. Согласно приведенным ре-



**Рис. 12.** Величина  $W_n$  вдоль линии торможения в области МГД-взаимодействия при значении параметров:  $\beta_0 = 3$ ,  $r_1/r_0 = 5.5$ . Значения  $E_z/(VB_0)$  указаны у кривых.

зультатам, видно, что наложение поля  $E_z < 0$  на область МГД-взаимодействия приводит к увеличению работы силы Лоренца по торможению потока. Наложение же поля  $E_z > 0$  уменьшает работу силы Лоренца по торможению потока, а около поверхности цилиндра возникает область, где сила Лоренца ускоряет поток.

## Заключение

В заключение перечислим основные результаты работы. Получено общее решение электродинамических уравнений для электрического потенциала в локально-ионизованном МГД-течении при поперечном обтекании кругового цилиндра в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником. Получены аналитические формулы, позволяющие рассчитать объемную плотность силы Лоренца, действующей на поток в локально-ионизованном МГД-течении, для случая проводящей и непроводящей поверхностей цилиндра. Показано, что МГД-воздействие на локально-ионизованное течение около цилиндра может быть использовано для торможения набегающего потока. Показано, что у поверхности цилиндра в окрестности критической точки в случае проводящей поверхности цилиндра, а также при положительном значении поля  $E_z$  возникает сила Лоренца, не тормозящая, а ускоряющая поток. Проанализировано влияние параметра Холла и ширины области МГД-взаимодействия на величину силы Лоренца. Показано, что увеличение параметра Холла приводит к снижению силы Лоренца, тормозящей поток. Влияние

параметра Холла на силу Лоренца может быть снижено с помощью уменьшения ширины области МГД-взаимодействия.

## Список литературы

- [1] Фрайштадт В.Л., Куранов А.Л., Шейкин Е.Г. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 43–47.
- [2] Korchenov V.I., Vatazhin A.B., Gouskov O.V. // AIAA Paper 99–4971. 9<sup>th</sup> International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference. Norfolk, 1999.
- [3] Головачев Ю.П., Суцких С.Ю. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 2. С. 28–33.
- [4] Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B. // AIAA Paper 2001–0492. 39<sup>th</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2001.
- [5] Bityurin V., Bocharov A., Baranov D., Leonov S. // AIAA Paper 2002–0492. 40<sup>th</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2002.
- [6] Kuranov A.L., Sheikin E.G. // J. Spacecraft Rockets. 2003. Vol. 40. N 2. P. 174–182.
- [7] Gaitonde D. // AIAA Paper 2003–0172. 41<sup>st</sup> AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2003.
- [8] Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B. // AIAA Paper 2003–3763. 34<sup>th</sup> AIAA Plasmadynamics and Lasers Conference. Orlando, 2003.
- [9] Lineberry J.T., Bityurin V.A., Bocharov A.N., Baranov D.S., Vatazhin A.B., Korchenov V.I., Gouskov O.B., Alferov V.I., Boushmin A.S. // Proc. of the 3<sup>rd</sup> Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics in Aerospace Applications. Moscow, 2001. P. 15–25.
- [10] Taylor T., Riggins D.W. // AIAA Paper 2004–0859. 42<sup>nd</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2004.
- [11] Васильева Р.В., Ерофеев А.В., Лапушкина Т.А., Поняев С.А., Бобашев С.В., Ван-Ви Д. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 27–33.
- [12] Sheikin E.G., Kuranov A.L. // AIAA Paper 2005–3223. AIAA/CIRA 13<sup>th</sup> International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference. Capua, 2005.
- [13] Adamovich I., Nishihara M. // AIAA Paper 2006–1004. 44<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2006.
- [14] Bityurin V., Bocharov A., Baranov D. // AIAA Paper 2006–1008. 44<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2006.
- [15] Битюрин В.А., Бочаров А.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2006. № 5. С. 188–203.
- [16] Sheikin E.G. // AIAA Paper 2007–1379. 45<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2007.
- [17] Шейкин Е.Г. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 5. С. 1–9.
- [18] Шейкин Е.Г. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 58–65.
- [19] Sheikin E.G. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2009. Vol. 42. P. 035 201.
- [20] Sheikin E.G. // AIAA Paper 2010–0832. 48<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Orlando, 2010.
- [21] Бреев В.В., Губарев А.В., Панченко В.П. Сверхзвуковые МГД-генераторы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.

- [22] *White F.M.* Fluid Mechanics. 4<sup>th</sup> Edition. McGraw-Hill, 1999. 826 p.
- [23] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
- [24] *Чжэн П.* Отрывные течения. Т. 1. М.: Мир, 1972. 300 с.
- [25] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит., 2001. 576 с.