Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 12

01;03

Двухпараметрическое семейство точных решений для профиля поверхности проводящей жидкости в неоднородном электрическом поле

 Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева

Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
e-mail: nick@iep.uran.ru

(Поступило в Редакцию 11 января 2012 г.)

Исследованы возможные равновесные конфигурации свободной поверхности проводящей жидкости во внешнем неоднородном электрическом поле. Жидкость находится в вершине клиновидного электрода, а противоэлектродом является тонкая прямая проводящая нить, расположенная параллельно ребру клина. С помощью метода конформных отображений получено двухпараметрическое семейство точных решений для формы поверхности. Решения описывают деформацию поверхности вплоть до отрыва капли с электрода.

Во внешнем электрическом поле на свободной поверхности проводящей жидкости индуцируется заряд. Его взаимодействие с приложеным полем приводит к деформации поверхности, исходная форма которой определялась (в отсутствие поля) влиянием только капиллярных сил. Рассмотрение подобной ситуации приводит к задаче нахождения равновесной конфигурации поверхности, для которой электростатические силы компенсируются капиллярными. Для случая осевой симметрии задачи известно единственное нетривиальное решение — конус Тейлора [1]. Для плоской симметрии задачи эффективным оказывается использование метода конформных преобразований, в рамках которого был получен целый ряд точных решений [2–5]. В настоящем сообщении представлено новое семейство точных аналитических решений для формы границы проводящей жидкости в сильно неоднородном электрическом поле.

Рассмотрим систему двух электродов, один из которых представляет собой клин (считаем что линейный угол области над клином равен Θ), а другой — прямую проводящую нить, расположенную на расстоянии L параллельно ребру клина. Будем считать нить бесконечно тонкой; в таком случае разность потенциалов между электродами формально бесконечна, а конечным будет заряд Q, приходящийся на единицу длины нити. Пусть проводящая жидкость находится на вершине клиновидного электрода, причем контактный угол между свободной поверхностью жидкости и поверхностью электрода равен $\pi/2$. Положим, что ось z прямоугольной системы координат $\{x, y, z\}$ совпадает с ребром клина. Считаем, что задача обладает плоской симметрией: поверхность инварианта по отношению к сдвигу вдоль нити, а все величины зависят лишь от переменных x и y. В этих переменных занимаемая жидкостью область является ограниченной, и мы будем говорить о ней как о „двумерной капле".

В отсутствие внешнего электрического поля ($Q = 0$) равновесной конфигурацией жидкости является сегмент цилиндра с круглым поперечным сечением радиуса R_0. При наличии поля ($Q \neq 0$) двумерная капля будет вытягиваться вдоль его силовых линий; при этом постоянной будет оставаться площадь сечения жидкости ($\Theta R_0^2/2$) плоскостью $\{x, y\}$.

Следует отметить, что данная электростатическая задача с математической точки зрения идентична гидродинамической задаче о деформации свободной поверхности плоским течением идеальной жидкости, обусловленной наличием линейных вихрей, которая решалась численно в работе [6]. Для предельного случая, когда $L \to \infty$ и $Q \to \infty$, она эквивалентна задаче, рассмотренной нами недавно в работе [5]. Сходные задачи рассматривались также в работах [7,8].

Распределение потенциала электрического поля Φ в плоскости $\{x, y\}$ задается двумерным уравнением Пуассона

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = -\varepsilon_0^{-1} Q \delta\big(x - L\cos(\Theta/2), y - L\sin(\Theta/2)\big),$$

где $\delta(x, y)$ — дельта-функция. Его следует решать совместно с условием, что поверхности клина и капли эквипотенциальны ($\Phi = 0$), а также условием того, что на бесконечном удалении от заряженной нити потенциала электрического поля стремится к нулю ($\Phi \to 0$).

Равновесная конфигурация свободной поверхности проводящей жидкости определяется условием баланса электростатического и капиллярного давлений

$$\varepsilon_0(\nabla\Phi)^2 + T\kappa + P = 0. \tag{1}$$

Здесь T — коэффициент поверхностного натяжения, κ — кривизна свободной поверхности, P — разность давлений внутри и вне капли (в отсутствие внешнего поля $P = T/R_0$), а ε_0 — электрическая постоянная. Для поверхности, задаваемой параметрическими выражениями $y = Y(\tau)$ и $x = X(\tau)$ с параметром τ, возрастающим в направлении против часовой стрелки, кривизна определяется формулой

$$\kappa = (Y_\tau X_{\tau\tau} - X_\tau Y_{\tau\tau})(X_\tau^2 + Y_\tau^2)^{-3/2}. \tag{2}$$

Для удобства перейдем к безразмерным переменным при помощи замен

$$x \to R_0 x, \quad y \to R_0 y, \quad \Phi \to \sqrt{2TR_0/\varepsilon_0}\phi.$$

При этом вместо разности давлений P, погонной плотности заряда Q и межэлектродного расстояния L будем использовать следующие безразмерные выражения:

$$p = PR_0/T, \quad q = Q(32\pi^2\varepsilon_0 TR_0)^{-1/2}, \quad l = L/R_0.$$

Введем комплексный потенциал электрического поля $w = \phi - i\psi$, который является аналитической функцией переменной $z = x + iy$ всюду в области над каплей и над клиновидным электродом, за исключением точки $z = l\cos(\Theta/2) + il\sin(\Theta/2)$, где находится заряженная нить. Функция ψ является гармонически сопряженной к потенциалу электрического поля ϕ; условие $\psi = \mathrm{const}$ задает силовые линии поля.

Осуществим конформное преобразование $z = z(\xi)$ области вне капли в область вне круга единичного радиуса в комплексной плоскости новой переменной ξ. При этом потребуется, чтобы преобразование отображало грани клина $\arg z = 0$ и $\arg z = \Theta$ на лучи $\arg\xi = 0$ и $\arg\xi = \Theta$. Тогда задача нахождения комплексного потенциала с условием $\mathrm{Re}\, w = 0$ на неизвестной нам свободной поверхности жидкости и на гранях сводится к задаче с аналогичным условием на дуге единичной окружности $|\xi| = 1$ и на лучах $\arg\xi = 0$ и $\arg\xi = \Theta$. Ее решение дается соотношением

$$\begin{aligned} w = {} & 2q\ln(\xi^\gamma + ia^\gamma) + 2q\ln(\xi^\gamma - ia^{-\gamma}) \\ & - 2q\ln(\xi^\gamma - ia^\gamma) - 2q\ln(\xi^\gamma + ia^{-\gamma}), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\gamma \equiv \pi/\Theta \ge 1/2$, а вещественный параметр a задает расстояние от заряженной нити до вершины клина в новых переменных.

Параметризуем дугу окружности $|\xi| = 1$, соответствующую свободной поверхности в новых переменных, как $\xi = e^{i\tau}$, где $\tau \equiv \arg\xi$ — вещественный параметр, изменяющийся в интервале $0 \le \tau \le \Theta$. Тогда форма границы жидкости будет задаваться следующим параметрическим выражением:

$$z = Z(\tau) \equiv X(\tau) + iZ(\tau) \equiv z(e^{i\tau}).$$

Условие баланса давлений (1) с учетом соотношений (2) и (3) перепишем в виде

$$\frac{32q^2\gamma^2\beta(1-\beta)^2(1-\cos 2\gamma\tau)}{(1+\beta^2+2\beta\cos 2\gamma\tau)^2} + \frac{\mathrm{Im}\,(Z_\tau \overline{Z}_{\tau\tau})}{|Z_\tau|} + p|Z_\tau|^2 = 0, \qquad (4)$$

где $\beta = a^{-2\gamma}$. В итоге задача поиска профиля заряженной поверхности проводящей жидкости свелась к нахождению аналитической функции $z = z(\xi)$, удовлетворяющей на свободной поверхности условию (4), на гранях клина — условию $\arg z = \arg\xi$, а также условию $z \to \lambda\xi$ на бесконечности. Здесь λ — вещественная константа, значение которой определяется из требования, что при деформации площадь поперечного сечения капли s не меняется. При любых q и l будет

$$s = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int_0^\Theta Z\overline{Z}_\tau\, d\tau = \Theta/2, \qquad (5)$$

где воспользовались известным соотношением для вычисления площади через контурный интеграл, являющийся следствием формулы Грина.

Будем искать частное решение для $z(\xi)$ в виде

$$z(\xi) = z_0 + \lambda\int\left(1 + \frac{\alpha}{\beta + \xi^{2\gamma}}\right)^2 d\xi, \qquad (6)$$

где α — вещественный параметр, характеризующий амплитуду деформации поверхности капли (при $\alpha = 0$ капля не деформирована; ее поверхность представляет собой окружность). Постоянная z_0 выбирается из соображения, что начало координат должно совпадать с вершиной клина. Это выражение является аналитическим в требуемой области — особенности имеются только внутри окружности единичного радиуса.

Подставляя выражение (6) в условие (4), получаем систему алгебраических уравнений на параметры задачи. Удобно взять в качестве независимых переменных параметры γ и β, характеризующие угол раствора клина и межэлектродное расстояние. Остальные параметры задачи выражаются через них:

$$\begin{aligned} \alpha = {} & \frac{(\beta+1)(1-2\beta-4\gamma)}{2\beta} \\ & + \frac{\sqrt{(\beta+1)\big(16\gamma\beta + (\beta+1)(1-4\gamma)^2\big)}}{2\beta}, \end{aligned} \qquad (7)$$

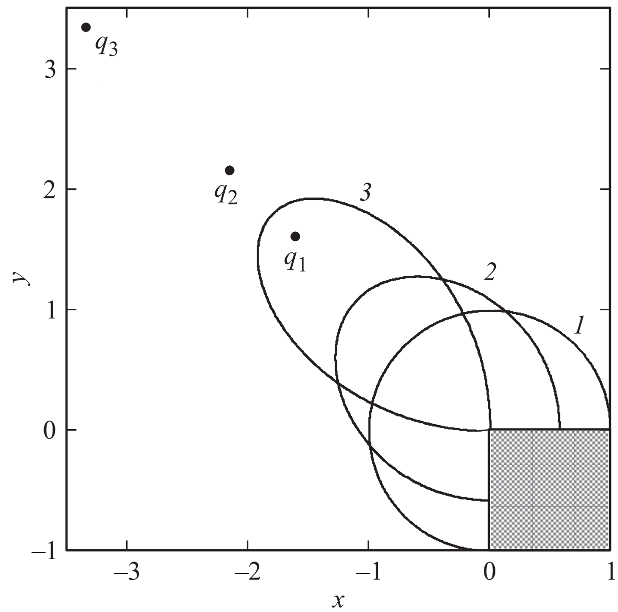
$$p = \frac{\beta}{\lambda(\alpha+\beta)}, \quad q^2 = \frac{\alpha\lambda\big((2\gamma+1)(\beta^2+\alpha\beta+1) - 2\big)}{16\gamma^2\beta(1-\beta)^2}.$$

Напомним, что нормировочный параметр λ определяется из условия (5). Связь между межэлектродным расстоянием l и его аналогом в конформных переменных $a \equiv \beta^{-1/(2\gamma)}$ можно найти из (6) интегрированием в плоскости ξ по отрезку, соединяющему вершину капли и нитевидный электрод, который удобно параметризовать как $\xi = \rho e^{i\Theta/2}$, где ρ — параметр,

$$l = \lambda\int_1^a\left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \rho^{2\gamma}}\right)^2 d\rho + |Z(\Theta/2)|.$$

Очевидно, что найденное решение имеет смысл только, когда $q^2 \ge 0$. Пороговое значение β_0 коэффициента β, соответствующее этому условию, легко найти из требования $\alpha = 0$ (если заряда нет, то капля не будет деформироваться). Получим для него из (7):

$$\beta_0 = -2\gamma + \sqrt{4\gamma^2 + 1}.$$



Характерные формы поверхности при $\gamma = 2/3$ $(\Theta = 3\pi/2)$ для *1* — $\beta = \beta_0 = 1/3$, *2* — $\beta = 0.28$, *3* — $\beta = \beta_c \approx 0.22$. Точками изображены положения нитевидного электрода. Приведенным конфигурациям соответствуют $l = 2.28$, 3.06, 4.74 и $q = 0$, 0.21, 0.34.

Анализ решений показал, что при $\gamma \geq \gamma_c$ где $\gamma_c = (5 + \sqrt{5})/8 \approx 0.905$, допустимые значения β находятся в диапазоне $0 < \beta \leq \beta_0(\gamma)$. При $1/2 < \gamma < \gamma_c$ допустимые значения β находятся в диапазоне $\beta_c(\gamma) \leq \beta \leq \beta_0(\gamma)$, где β_c — критическое значение параметра β, при котором поверхность жидкости становится самопересекающейся и, следовательно, решения теряют физический смысл (см. рисунок, где изображены соответствующие полученным точным решениям профили поверхности капли для $\gamma = 2/3$).

Таким образом, в работе найдено новое двухпараметрическое семейство точных решений задачи о равновесной конфигурации поверхности проводящей жидкости, деформируемой сильно неоднородным электрическим полем. При изменении межэлектродного расстояния и погонного заряда нити поверхность жидкости сильно деформируется вплоть до появления точки самопересечения, что соответствует отрыву капли от клиновидного электрода.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 10–08–96016 и 11–08–00434) в рамках программы президиума РАН „Фундаментальные проблемы нелинейной динамики“ (проект 12–П–2–1023).

Список литературы

[1] *Taylor G.I.* // Proc. R. Soc. London A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.
[2] *Зубарев Н.М.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 116. Вып. 6(12). С. 1990–2005.
[3] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В., Иванов П.К.* // ПЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 20. С. 84–88.
[4] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // ПЖТФ. 2009. Т. 36. Вып. 9. С. 54–59.
[5] *Зубарев Н.М., Зубарева О.В.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 1. С. 42–52.
[6] *Blyth M.G., Vanden-Broeck J.-M.* // SIAM J. Appl. Math. 2005. Vol. 66. N 1. P. 174–186.
[7] *Crowdy D.* // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. N 10. P. 2836–2845.
[8] *Shercliff J.A.* // Proc. R. Soc. London, Ser. A. 1981. Vol. 375. P. 455–473.