Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 12

01

Модель векторной гравиметрии на базе корректируемой двухкомпонентной инерциальной навигационной системы

© А.С. Девятисильный

Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
690041Владивосток, Россия
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

(Поступило в Редакцию 21 февраля 2012 г.)

Предложено преобразование корректируемой трехкомпонентной инерциальной навигационной системы в двухкомпонентную систему с сохранением функции оценки напряженности гравитационного поля Земли. Приведены результаты вычислительного эксперимента.

Введение

В работе [1] исследована модель векторной гравиметрической системы, сконструированной на базе трехкомпонентной (3D) инерциальной навигационной системы (ИНС), корректируемой измерениями, доставляемыми навигационной спутниковой системой (НСС) типа ГЛОНАСС и бортовой астросистемой. В такой корректиируемой 3D-ИНС показания трех ньютонометров (акселерометров), представляющие измеренные значения трех компонент вектора кажущегося ускорения [2], непосредственно используются в алгоритме функционирования системы при интегрировании векторного уравнения Ньютона или динамической группы уравнений (ДГУ) [3], моделирующих движение материальной точки в гравитационном поле Земли (GE-поле). Наличие в составе интегрированной системы (ИС) астросистемы обусловливает независимое решение кинематической задачи — оценки параметров вращения приборного координатного трехгранника, что и было учтено при исследовании модели ИС. Основное внимание уделено второй ее части, динамической, которая представлена ДГУ и моделями измерений, доставляемых НСС; результаты анализа именно этой части модели непосредственно характеризуют возможности функции оценки напряженности GE-поля.

В настоящей работе показано, как возможность оценки напряженности GE-поля может быть сохранена в рамках представлений о двухкомпонентных (2D) ИНС, отличающихся от 3D-ИНС тем, что в их алгоритме функционирования используются измерения только двух „горизонтальных" ньютонометров и соответственно интегрируется только часть уравнений из ДГУ.

Основные модели

Как и в [1], примем, что астросистема самостоятельно решает проблему оценки ориентации системы отсчета, в которой интегрируются уравнения движения объекта-носителя. Это дает возможность далее обращаться только к ДГУ и спутниковой позиционной информации, представив исходную идеализированную (невозмущенную погрешностями) математическую модель обратной задачи, решаемой ИС, в форме уравнений типа „состояние–измерение"

$$\dot{q}_i = -e_{ikj}\omega_k q_j + p_i, \quad q_i(0) = q_{i0},$$
$$\dot{p}_i = -e_{ikj}\omega_k p_j + G_i(\mathbf{q}) + F_i, \quad p_i(0) = p_{i0},$$
$$z_i = q_i, \quad i, j, k = \overline{1,3}, \tag{1}$$

где $q_i, p_i, G_i, F_i, \omega_i, z_i$ — компоненты соответственно векторов $\mathbf{q}$ (радиус-вектор местоположения объекта-носителя), $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ — напряженность GE-поля, $\mathbf{F}$ — равнодействующая удельных сил негравитационной природы или кажущееся ускорение, $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость вращения правой ортогональной системы отсчета $oq = oq_q q_2 q_3$, в проекции на оси которой в (1) записаны все векторы, $\mathbf{z}$ — измеренное НСС значение радиуса-вектора места объекта-носителя, c_{ikj} — символ Леви–Чивита (здесь и далее устанавливается правило суммирования по повторяющимся индексам).

Не нарушая общности, примем, что система отсчета oq является геоцентрической с осью oq_3, направленной по радиусу-вектору объекта-носителя, и осями oq_1 и oq_2, направленными соответственно на восток и север, оси системы oq коллинеарны осям сопровождающего приборного трехгранника, физически реализуемого на борту подвижного объекта,

При переходе к модели идеализированной 2D-системы с учетом ориентации координатных осей приборного трехгранника в уравнениях (1) полагаем $i = \overline{1,2}$, $|\mathbf{q}| = q_3 = r$, $z_3 = r$, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{G}(q_1, q_2, z_3) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, r)$, где $\mathbf{x} = (q_1, q_2)^T$, $p_3 = \dot{z}_3 - \omega_2 q_1 + \omega_1 q_2$, т.е., что существенно, переход к новой модели требует оценки производной измеряемой НСС координаты q_3, т.е. $\dot{z}_3$.

Обращаясь к физическим реалиям, отметим наличие погрешностей в измерениях векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{q}$, в определении начальных значений $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{p}_0$, а также в представлениях о векторе $\mathbf{G}(\mathbf{q})$. Полагая достаточно малыми все эти погрешности, выполним переход к линейным представлениям в вариациях, сформулировав, таким образом, обратную задачу „в малом“:

$$\delta\dot{q}_i = -e_{ikj}\omega_k\delta q_j + \delta p_i - e_{ikj}\nu_k q_i, \quad \delta q_i(0) = \delta q_{i0},$$

$$\delta\dot{p}_i = \left(\frac{\partial G_i(\mathbf{x}, r)}{\partial q_i}\right)\delta q_i - e_{ikj}\omega_k\delta p_j + \left(\frac{\partial G_i(\mathbf{x}, r)}{\partial r}\right)\varepsilon_r - e_{ikj}\nu_k p_j + g_i + f_i, \quad p_i(0) = p_{i0},$$

$$\dot{g}_i = \chi_i(t), \quad g_i(0) = g_{i0},$$

$$\delta z_i = \delta q_i + \varepsilon_i; \quad i = \overline{1,2}; \quad j,k = \overline{1,3}, \tag{2}$$

где

$$\delta q_i = q_i - \tilde{q}_i, \quad \delta p_i = p_i - \tilde{p}_i,$$

$$g_i = G_i(\mathbf{q}) - \tilde{G}_i(\mathbf{x}, r), \quad \tilde{G}_i(\mathbf{x}, r) = -\frac{\mu q_i}{r^3}$$

— i-я компонента центральной составляющей напряженности GE-поля, $\chi_i(t)$ — скорость изменения g_i на траекторее движения носителя, $\tilde{q}_i$ и $\tilde{p}_i$ — результат интегрирования ДГУ с использованием измеренных значений ω_k $(k = \overline{1,3})$ и F_i $(i = \overline{1,2})$ с замещением в модели $\tilde{G}_i(\mathbf{x}, r)$ значения r значением $z_3 = \tilde{r} = r + \varepsilon_3$, ν_k $(k = \overline{1,3})$ и f_i $(i = \overline{1,2})$ — осевые компоненты инструментальных погрешностей гироскопов и ньютонометров: $\varepsilon_1 = \varepsilon_{q_1} + r\beta_2$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{q_2} + r\beta_1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_r = \varepsilon_{q_3}$, причем $\varepsilon_{q_1}, \varepsilon_{q_2}, \varepsilon_{q_3}$ — погрешности определения координат носителя с помощью НСС, а β_1 и β_2 — угловые инструментальные погрешности астросистемы.

Задача (2) разрешима относительно вектора состояния $(\delta q_1, \delta p_1, \delta q_2, \delta p_2, g_1, g_2)^T$, но при ее решении, что очевидно, не оценивается компонента GE-поля $g_3 = G_3 - \tilde{G}_3$, поэтому она может рассматриваться только как задача коррекции 2D-ИНС, но не задача векторной гравиметрии. Это объясняется тем, что в случае 2D-схемы доступны только две модельные компоненты вектора $\mathbf{q}$ (т.е. $\tilde{q}_1$ и $\tilde{q}_2$), вследствие чего построение линейной невязки измерения, подобной той, что имела место в случае 3D-ИНС, невозможна, и, следовательно, невозможна постановка в подобном же виде (представляемом уравнениями (2) с невязкой $\delta z = \delta q_3 + \varepsilon_r$) и обратной задачи „в малом“.

В качестве отправной точки дальнейших построений, доказывающих возможность постановок обратных задач „в малом“ вида „состояние–измерение“ с уравнениями (2), обратимся к движению объекта по сфере известного радиуса с центром в начале системы отсчета oq. При движении по сфере очевидны равенства $p_3 = 0$ и $\dot{p}_3 = 0$, которые с учетом третьего и шестого уравнений ДГУ в (1) можно представить в виде следующих условий такого движения:

$$\dot{q}_3 - \omega_2 q_1 + \omega_1 q_2 = 0, \tag{3}$$

$$\omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 + G_3 + F_3 = 0, \tag{4}$$

$$\ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)q_1 - (\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3)q_2 + \omega_1 p_2 - \omega_2 p_1 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)q_3 = 0, \tag{5}$$

$$\ddot{q}_3 - (\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)q_1 - (\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3)q_2 + G_3 + F_3 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)q_3 = 0, \tag{6}$$

$$\ddot{q}_3 + (\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3)q_1 - (\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3)q_2 + 2\omega_2 p_1 - 2\omega_1 p_2 + G_3 + F_3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)q_3 = 0, \tag{7}$$

где (5) — результат дифференцирования (3), а (6) и (7) — соответственно сумма и разность (4) и (5), причем (7) — это формальная запись реализации на оси oq_3 принципа Д’Аламбера.

Заметим также, что при движении по сфере утверждения (3)–(7) эквивалентны утверждению ($\dot{q}_3 = 0$, $\ddot{q}_3 = 0$, $F_3 = -G_3 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)r$), а при движении по произвольной поверхности условия (3)–(6), вообще говоря, нарушаются, но условие (7) — принцип Д’Аламбера — остается в силе. Иное имеет место при интегрировании ДГУ 2D-ИНС, выполняемом, как отмечалось выше, в условиях присутствия погрешностей в измерениях и оценках начальных состояний. В этом случае вне зависимости от того, движется ли объект по сфере или не по ней, нарушаются все условия (3)–(7). Такие нарушения можно интерпретировать как дополнительные невязки измерений при постановке обратных задач „в малом“ (по сути задач коррекции 2D-ИНС) с уравнениями вида (2).

Из пяти условий (3)–(7) наиболее приемлемы для реализации в задачах коррекция условия (3) и (4), так как они не содержат производных угловой скорости вращения системы отсчета, что при построении невязок освобождает от нахождения оценок этих производных и что в общем случае требуется при обращении к условиям (5)–(7) (заметим, что случай обращения к (7) как наиболее характерному из этих трех условий достаточно подробно исследован в [4]). Поэтому остановимся на невязках (3) и (4). Они представляются следующим образом:

$$\delta z_a = \varepsilon_{\dot{r}} - \omega_2\delta q_1 + \omega_1\delta q_2, \tag{8}$$

где $\varepsilon_{\dot{r}}$ — погрешность оценивания значения $\dot{r}$ по измеренному значению r, т.е. $z_3 = r + \varepsilon_r$;

$$\delta z_b = \omega_2\delta p_1 - \omega_1\delta p_2 + g_3 + f_3 + \varepsilon_{\ddot{r}}, \tag{9}$$

где f_3 — инструментальная погрешность дополнительного (к схеме 2D-ИНС) ньютонометра при таком (только для формирования невязки) нетрадиционном (в сравнении со схемой 3D-ИНС) его использовании; $\tilde{\ddot{r}} = \ddot{r} + \varepsilon_{\ddot{r}}$ — оценка значения $\ddot{r}$, $\varepsilon_{\ddot{r}}$ — погрешность оценивания значения $\ddot{r}$.

С учетом (8) и (9) в рамках концепции векторной гравиметрии возможны два варианта модели обратной задачи „в малом“. Первый представляется уравнениями (2), (8), (9); второй — уравнениями (2), (9). Последний, как базовый, и был исследован в вычислительном эксперименте.

Вычислительный эксперимент

Прежде всего необходимо отметить достаточно просто устанавливаемый аналитически факт калмановской наблюдаемости [5] системы „состояние–измерение“ $((2),(9))$ на стационарных траекториях (т. е. при движении объекта по геоцентрическими параллелям с постоянной скоростью), что указывает на преемственность этого свойства от аналогичной системы, сконструированной на базе 3D-ИНС [1], и, следовательно, на потенциальную возможность построения асимптотически устойчивого алгоритма динамического обращения [6] для решения обратной задачи, представляемой моделью $((2),(9))$. С учетом этого цель численного исследования — верификация численной разрешимости задачи $((2),(9))$ в условиях конечной точности вычислений и измерений.

При проведении эксперимента использованы те же, что и в работе [1], значения параметров движения и погрешностей, а именно предполагалось, что объект движется на широте $\varphi = 45^\circ$ в восточном направлении с относительной (к Земле) скоростью $V = 100$ m/s, а среднеквадратические значения компонент погрешностей $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{f}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\varepsilon_{\dot r}, \varepsilon_{\ddot r}$ соответственно есть $\sigma_\varepsilon = 5m$, $\sigma_j = 10^{-3}$ m/s^2, $\sigma_\nu = 10^{-3}$ deg/h, $\sigma_\beta = 10^{-6}$ rad, $\varepsilon_{\dot r} = 10^{-2}$ m/s, $\varepsilon_{\ddot r} = 10^{-3}$ m/s^2.

Обусловленность задачи $((2),(9))$ характеризуется сигнулярными числами обусловленности μ и μ_N соответствующих исходного и нормированного по столбцам конечномерных операторов задачи верифицировалась, как и в [1], при относительной компьютерной точности представления чисел $e_1 = 2.2 \cdot 10^{-16}$. Оценки значений чисел обусловленности — $\mu = 10^6$ и $\mu_N = 2$ — сравнивались с критическим для оператора значением $\mu^* = 10^9$. При этом гарантирующее сохранение свойства наблюдаемости условие $(\mu_N < \mu < \mu^*)$ при возмущении оператора задачи вычислительной средой так же, как и в [1], выполняется.

Численное решение задачи выполнялось с применением методологии и алгоритма динамического обращения калмановского типа [4]; анализ решения показал, что его характеристики практически не отличались от тех, что имели место в случае системы на базе 3D-ИНС [1].

Заключение

В работе показано, что при построении векторной гравиметрической системы на базе 2D-ИНС возможна такая ее организация, при которой сохраняются все функциональные свойства, которые реализуются в системе на базе 3D-ИНС.

Исследование выполнено при частичной поддержке РФФИ–ДВО (грант № 11–01–98501-р_восток_а) и ДВО РАН (гранты № 12–1–0–03–005).

Список литературы

[1] *Девятисильный А.С.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 1. С. 143–146.
[2] *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987. 320 с.
[3] *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.
[4] *Девятисильный А.С.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 3. С. 103–105.
[5] *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с. (Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. Topics in mathematical system theory. NY: McGraw-Hill, 1969).
[6] *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.* // Вестн. РАН. 2006. Т. 76. № 7. С. 615–624.