

01;03

Вихресток в условиях теплового кризиса с учетом реальных свойств газа

© А.Н. Кучеров

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,
140180 Жуковский, Московская область, Россия
email: ank@aerocentr.msk.su

(Поступило в Редакцию 4 октября 2011 г. В окончательной редакции 2 марта 2012 г.)

Обсуждены изменения постановки задачи для вихресточника и вихрестока при учете изменения коэффициента теплоемкости и показателя адиабаты двухатомного газа (на примере воздуха) с повышением температуры от трехсот до нескольких тысяч градусов Кельвина. Проведено исследование теплового кризиса для вихрестока, вычислены критические значения энергетического параметра. Показано уменьшение минимального радиуса вихрестока при тепловыделении. Варьировались параметры подобия: безразмерная циркуляция (или расход), энергетический параметр, местоположение и толщина области тепловыделения. Выполнены оценки погрешности модели газа с постоянными коэффициентами теплоемкости и показателем адиабаты.

Введение

В работах [1–4] исследовался тепловой кризис в поле течения источника (стока), вихресточника (вихрестока) в приближении совершенного газа при постоянных теплоемкостях C_p , C_v и показателе адиабаты γ . Суть явления теплового кризиса — невозможность стационарного течения с заданным расходом и циркуляцией при достижении радиальной компонентной скорости u величины, равной скорости звука c (и, следовательно, при достижении радиальным числом Маха $M_r = u/c$ значения единица) вследствие тепловыделения в некотором слое поля течения. Исследуемые явления встречаются как фрагменты более сложных течений с теплоподводом в открытом или ограниченном боковыми стенками пространстве. Энергия может быть подведена с помощью лазерного излучения [5–8], электрического разряда [9–14], химических реакций.

В экспериментах и теоретических численных исследованиях отмечены высокие температуры в несколько тысяч градусов, требующие учета реальных свойств газа, в первую очередь, зависимости коэффициентов теплоемкости C_p , C_v и показателя адиабаты γ от температуры. Тепловой кризис в поле вихресточника (стока) происходит при высоких температурах при большой циркуляции (малом расходе), при значительном удалении области тепловыделения от сечения минимального радиуса, с увеличением показателя адиабаты (переход от многоатомного газа к одноатомному), с увеличением протяженности области энерговыведения [1,15,16]. Возможно увеличение температуры в критическом сечении на порядок и более.

В качестве примера исследуем тепловой кризис в вихрестоке из затопленного пространства для реального воздуха при изменении C_p , C_v , γ с ростом температуры T на порядок по сравнению с температурой T_0 на бесконечности.

Постановка задачи

В диапазоне температур 500–3000 К коэффициенты теплоемкости C_p , C_v и показатель адиабаты γ существенно зависят от температуры [17,18], как показано на рисю 1, кривой 2, эксперимент. Примем для внутренней энергии E_v и теплоемкостей C_v , C_p :

$$E_v = \frac{R}{\mu} \left[\frac{5}{2} T + X(T) \right], C_v = C_{v0} + \frac{R}{\mu} X_T(T), C_p = C_v + \frac{R}{\mu}, \quad (1)$$

$$X(T) = X_{O_2} \frac{T_{O_2}}{\exp(T_{O_2}/T) - 1} + X_{N_2} \frac{T_{N_2}}{\exp(T_{N_2}/T) - 1},$$

$$X_T(T) = \frac{dX}{dT}.$$

Здесь $T_{O_2} = 2228$ К, $T_{N_2} = 3336$ К — характеристические колебательные температуры, $X_{O_2} = 0.21$, $X_{N_2} =$

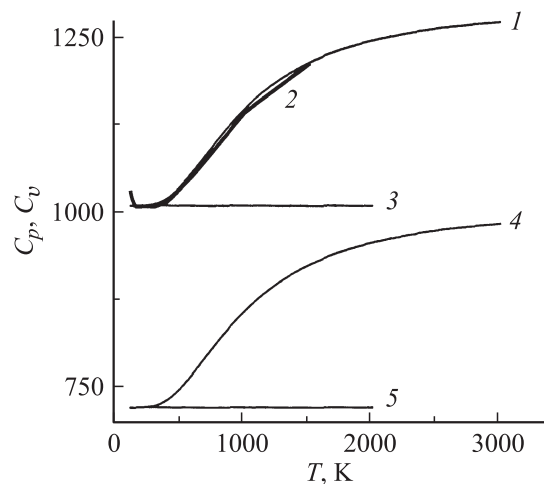


Рис. 1. Коэффициенты теплоемкости $C_p(T)$, $C_v(T)$: 1, 4 — по формуле (1), 2 — эксперимент [18] при давлении 0.1 МПа \approx 1 atm; 3, 5 — C_{p0} , C_{v0} , газ с постоянными теплоемкостями.

$= 0.79$ — молярные доли для кислорода и азота, $\mu = \mu_{O_2}X_{O_2} + \mu_{N_2}X_{N_2}$, $\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol — молярная масса кислорода, $\mu_{N_2} = 28$ kg/kmol — молярная масса азота, $\mu \approx 28.84$ kg/kmol — молярная масса смеси, R — универсальная газовая постоянная, $C_{v0} = 5R/2\mu$ [14,19,20]. На рис. 1 представлены теплоемкости $C_p(T)$, $C_v(T)$, вычисленные по формулам (1), кривые 1, 4, а также постоянные теплоемкости C_{v0} , C_{p0} , кривые 3, 5, и экспериментальная зависимость для $C_p(T)$, (кривая 2) [18]. Величина $C_p(T)$ составляет для модели газа с постоянной теплоемкостью 1009 и 1272 J/(K · kg) при $T = 3000$ K с учетом реальных свойств. Величина $C_v(T)$ возрастает от 720.7 до 984.2 J/(K · kg). Показатель адиабаты $\gamma(T) = C_p(T)/C_v(T)$ уменьшается от значения $\gamma_0 = C_{p0}/C_{v0} = 1.4$ до 1.29.

С учетом изменений C_p , C_v , γ с температурой, уравнения сохранения массы, количества движения, энергии и уравнение состояния запишем в физических переменных [1–4,15,16]:

$$r\rho u = \frac{m_0}{2\pi}, \quad (2)$$

$$u \frac{du}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0 \quad \text{или} \quad V \frac{dV}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = 0, \quad (3)$$

$$V^2 = u^2 + v^2,$$

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{v}{r}, \quad v = \frac{\Gamma_0}{2\pi r}, \quad (4)$$

$$\rho u \frac{dH}{dr} = g(r), \quad H = h(T) + \frac{V^2}{2}, \quad (5)$$

$$h = \frac{R}{\mu} \left[\frac{7}{2}T + X(T) \right], \quad g = f(r) \times \begin{cases} g_0, \\ q_0\rho(r), \end{cases}$$

$$p = \rho T \frac{R}{\mu}. \quad (6)$$

Здесь r — координата, u , v , V — радиальная, азимутальная компоненты скорости и полная скорость, ρ — плотность, p — давление, h , H — энтальпия и полная энтальпия газа, $g(r)$ — интенсивность тепловыделения, g_0 [W/m³], q_0 [W/kg] — характерные значения (для двух моделей теплоподвода, в единицу объема и на единицу массы. Принято: $g_0 = \rho_0 q_0$, ρ_0 — характерная плотность), $f(r)$ — безразмерная функция, m_0 [kg(s/m)] — физический расход газа на один погонный метр, Γ_0 (m²/s) — физическая размерная циркуляция. Приведем также скорость звука c , полное и радиальное числа Маха M , M_r (M_r — критерий теплового кризиса):

$$c^2 = \gamma(T) \frac{R}{\mu} T, \quad \gamma(T) = \frac{C_p}{C_v} = \gamma_0 \frac{1 + [(\gamma_0 - 1)/\gamma_0]X_T}{1 + (\gamma_0 - 1)X_T},$$

$$M^2 = \frac{V^2}{c^2}, \quad M_r^2 = \frac{u^2}{c^2}. \quad (7)$$

Отнесем r к минимальному радиусу r_0 ($M_r(r_0) = 1$), плотность ρ — к плотности ρ_0 на бесконечности в затопленном пространстве, давление p — к значению p_0

на бесконечности, скорости u , v , V , c — к максимальной скорости $u_0 = \sqrt{2\gamma_0 p_0 / (\gamma_0 - 1)\rho_0}$ (достигается при истечении в вакуум), температуру T — к $T_0 = \mu p_0 / R\rho_0$, энтальпии h , H — к значению $h_0 = \gamma_0 p_0 / (\gamma_0 - 1)\rho_0$. В результате получим безразмерные уравнения

$$r\rho u = m \equiv \frac{m_0}{2\pi\rho_0 u_0 r_0}, \quad (8)$$

$$u \frac{du}{dr} + \frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{v^2}{r} = 0$$

или

$$V \frac{dV}{dr} + \frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0\rho} \frac{d\rho}{dr} = 0 \quad V^2 = u^2 + v^2, \quad (9)$$

$$rv = \Gamma \equiv \frac{\Gamma_0}{2\pi r_0 u_0}, \quad (10)$$

$$\frac{dH}{dr} = \frac{rf(r)}{\gamma_0 m} \times \begin{cases} E \\ Q\rho(r) \end{cases}, \quad (11)$$

$$E = \frac{(\gamma_0 - 1)g_0 r_0}{u_0 p_0}, \quad Q = \frac{(\gamma_0 - 1)\rho_0 q_0 r_0}{u_0 p_0},$$

$$H = T + h_\varepsilon + V^2, \quad h_\varepsilon(T) = \frac{(\gamma_0 - 1)X(T)}{\gamma_0 T_0},$$

$$E_v(T) = \frac{T}{\gamma_0} + h_\varepsilon,$$

$$p = \rho T, \quad (12)$$

$$c^2 = \frac{\gamma_0 - 1}{2} T \frac{\gamma(T)}{\gamma_0},$$

$$M_r^2 = \frac{2\gamma_0 u^2}{(\gamma_0 - 1)T\gamma(T)}, \quad M^2 = \frac{2\gamma_0 V^2}{(\gamma_0 - 1)T\gamma(T)}, \quad (13)$$

Здесь m — безразмерный расход газа, Γ — безразмерная циркуляция, E , Q — параметры энергоподвода при интенсивности тепловыделения в единицу объема g_0 или на единицу массы q_0 . Интеграл уравнения сохранения энергии (11) есть

$$H = \Phi(r) \equiv 1 + h_{\varepsilon,0} + \frac{1}{\gamma_0 m} \times \begin{cases} EF(r) \\ QF_\rho(r) \end{cases},$$

$$F = \int_{r_b}^r f r dr, \quad F_\rho = \int_{r_b}^r \rho f r dr, \quad (14)$$

где $h_{\varepsilon,0} = h_\varepsilon|_{r \rightarrow \infty} \approx h_\varepsilon(T \approx 1)$ — малая величина при условиях на бесконечности, близких к нормальным. Например, при $T_0 \approx 300$ K находим $h_{\varepsilon,0} \approx 3 \cdot 10^{-4} \ll 1$. Интегральные функции $F(r)$, $F_\rho(r)$, $\Phi(r)$ характеризуют энергию (мощность), подведенную к рассматриваемому текущему сечению радиусом r . Начальная и замыкающая координаты области энерговыделения равны $r_{in} = r_1$, $r_{ex} = r_2$ для вихресточника и $r_{in} = r_2$, $r_{ex} = r_1$ для вихрестока. Тепловое запыряние потока наступает при $M_r = 1$ внутри (в пределе — на краю) области теплоподвода. Функция $f(r)$ задана. В работах [1–3,15,16]

рассматривались постоянная $f = C$ в интервале $[r_1, r_2]$, линейная $f(r) = C_L(r_2 - r_1)$ и другие функции, нормированные к единице

$$2\pi \int r f dr = 1,$$

при этом постоянные равны

$$C = \frac{1}{\pi(r_2^2 - r_1^2)},$$

$$C_L = \frac{1}{2\pi \left[-(r_2^3 - r_1^3)/3 + r_2(r_2^2 - r_1^2)/2 \right]}.$$

Параметрами (критериями) подобия, являются безразмерные величины из уравнений и краевых условий: расход m (циркуляция Γ), параметр энергоподвода E (или Q), начальная координата r_{in} или число Маха M_{in} , показатель адиабаты γ_0 , совокупность параметров X_{O_2} , X_{N_2} , T_{O_2}/T_0 , T_{N_2}/T_0 , характеризующих отличие воздуха от модели газа с постоянными теплоемкостями и показателями адиабаты.

Вихреисточник (сток) без теплоподвода

Примем, что газ на бесконечности в затопленном пространстве имеет температуру $T_0 = 288.15$ К, давление $p_0 = 101\,325$ Па (плотность $\rho_0 \approx 1/22$ кг/м³, стандартная атмосфера на уровне моря [21]). Интеграл сохранения энергии (14) запишем в виде

$$V^2 = 1 + h_{\epsilon,0} - T - h_{\epsilon}(T). \quad (15)$$

Величина h_{ϵ} на бесконечности мала и с уменьшением координаты r убывает. Подставляя V^2 из (15) в (9), находим

$$p = \rho^{\gamma_0} \psi(T)^{\gamma_0-1}, \quad p = \frac{T^{\frac{\gamma_0}{\gamma_0-1}}}{\psi(T)},$$

$$\rho = \frac{T^{\frac{1}{\gamma_0-1}}}{\psi(T)}, \quad \psi = C_m \exp \left[\int_T^1 \frac{X_T dT}{T} \right]. \quad (16)$$

Условия сохранения полной энтальпии (15) и аналог условия изэнтропичности (16) с точностью до малых поправок $\sim h_{\epsilon}$ соответствуют выражениям для газа с постоянными теплоемкостями. Постоянную C_m выберем так, чтобы условие $p = \rho^{\gamma_0}$ выполнялось в некоторой точке пространства с параметрами газа (T, p) , наиболее близко соответствующими условиям, при которых на практике наблюдают постоянные C_{p0} , C_{v0} , γ_0 . Это может быть сечение минимального радиуса $r = r_m = 1$, удаленное на большое расстояние сечение $r \rightarrow \infty$ или любое другое, например начальное для зоны теплоподвода $r = r_{in}$. Если это есть сечение, удаленное на большое расстояние в случае вихресточка, величина $C_m = 1$. Коэффициент $\psi_m = \psi(T_m)$ характеризует отличие связи $p(\rho)$ в сечении минимального радиуса

$$p_m|_{r=1} = \rho_m^{\gamma_0} \psi_m^{\gamma_0-1}$$

от соответствующей связи $p_m = \rho_m^{\gamma_0}$ при изэнтропическом течении.

Подставляя $u = m/r\rho$ и $v = \Gamma/r$ в (15), получим решение $r(T)$:

$$r^2 = \frac{\Gamma^2 + \frac{m^2 \psi^2(T)}{T^{2/(\gamma_0-1)}}}{1 + h_{\epsilon,0} - T - h_{\epsilon}}. \quad (17)$$

Полученное решение незначительно отличается от решения в газе с постоянными теплоемкостями, если малы величины h_{ϵ} , $|\psi - 1|$. Известный факт — наличие минимального сечения, условие минимума $dr/dT = 0$ при $T = T_m$, $r = r_m = 1$ и решение (17) дают нам уравнения

$$\frac{m^2 \psi_m^2}{T_m^{2/(\gamma_0-1)}} = \frac{\gamma_0 - 1}{2} T_m \frac{\gamma_m}{\gamma_0}, \quad (18)$$

$$\frac{m^2 \psi_m^2}{T_m^{2/(\gamma_0-1)}} = 1 + h_{\epsilon,0} - T_m - h_{\epsilon,m} - \Gamma^2. \quad (19)$$

В левой части (18) стоит u_m^2 , в правой — скорость звука c_m^2 , следовательно, при r_m радиальное число Маха равно единице $M_{r,m} = 1$. Приравняв правые части (18) и (19), находим

$$T_m \left(1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \frac{\gamma_m}{\gamma_0} \right) + h_{\epsilon,m} = 1 + h_{\epsilon,0} - \Gamma^2. \quad (20)$$

Это — основное уравнение для нахождения температуры T_m в сечении минимального радиуса $r_m = 1$. Если задана циркуляция Γ , вычислим T_m , затем скорость u_m (скорость звука $c_m = u_m$), расход m из (19) и остальные величины ρ_m , p_m , V_m , M_m .

Физическое условие $M_{r,m} = 1$ задает минимальное сечение $r_m = 1$ в вихреисточнике (стоке) для реального газа, так же как и для газа с постоянными теплоемкостями.

Выражения (18), (19) дают связь между расходом m и циркуляцией Γ , как и в газе с постоянными теплоемкостями [1,15]. При h_{ϵ} , $X_T \ll 1$ из (18), (19) следует известное выражение для газа с постоянными теплоемкостями: $T_m = 2(1 - \Gamma^2)/(\gamma_0 + 1)$.

При $\Gamma = 0$ расход максимален $m = m_{max}$. Находим T_m из (20), m из (19), u_m из (18), $c_m = u_m$ и остальные величины ρ_m , p_m , V_m , M_m из (16), (15), (13). Удобно задавать расход в долях максимального $m = m_{max}/n$, где n — число. Если $\Gamma \neq 0$ и задан расход m , величину T_m находим из (18), затем Γ из (19) и величины u_m , ρ_m , V_m , M_m из (18), (16), (15), (13).

При выбранных условиях на бесконечности ($T_0 = 288.15$ К, $p_0 = 101\,325$ Па) зависимости $\Gamma(m)$ для воздуха, с учетом изменения $C_p(T)$, $C_v(T)$, слабо отличаются от аналогичных, вычисленных ранее для газа с постоянными теплоемкостями.

Решение (17) дает нам начальные условия на входе в зону теплоподвода при $r = r_{in}$, величины u_{in} , ρ_{in} , p_{in} , V_{in} , T_{in} , $M_{r,in}$, M_{in} для вихреисточника и вихресточка. Внутри зоны энергоподвода достаточно решить одно дифференциальное уравнение для любой искомой величины [15], а для других использовать связи из (8)–(13). Рассмотрим конкретные варианты.

Вихресток из затопленного пространства с теплоподводом

На рис. 2 показаны распределения температуры $T(r)$, радиального и полного числа Маха $M_r(r)$, $M(r)$ (со знаком „-“ для сравнения). Для единичной в долях r_0 длины зоны энерговыделения $d = r_2 - r_1 = 1$ варьировали расход m (циркуляцию Γ) при $r_1 = 1.1$ (рис. 2, *a, b*, кривые 1–3) и удаляли зону энергоподвода от минимального сечения (увеличивали r_1 от 1.1 до 2, рис. 2, *a, b*, кривые 2, 4, 5) при фиксированном расходе $m = m_{\max}/4 \approx 0.06469$ (циркуляции $\Gamma \approx 0.6083$). Критические значения энергетического параметра E_{cr} , интеграла полной мощности Φ_{cr} , температуры T_{cr} и показателя адиабаты γ_{cr} равны: кривая 1 — $m = m_{\max} \approx 0.2583$ ($\Gamma = 0$), $E_{cr} \approx 0.370$, $\Phi_{cr} \approx 1.1628$, $T_{cr} \approx 279.3$ К, $\gamma_{cr} \approx 1.399$; 2 — $m_{\max}/4 \approx 0.06469$ (0.6084), $E_{cr} \approx 3.07$, $\Phi_{cr} \approx 6.402$, $T_{cr} \approx 1388$ К, $\gamma_{cr} \approx 1.3156$; 3 — $m_{\max}/8 \approx 0.03229$ (0.707), $E_{cr} \approx 7.150$, $\Phi_{cr} \approx 26.17$, $T_{cr} \approx 5351$ К, $\gamma_{cr} \approx 1.288$ при вариациях расхода (циркуляции); 4 — $r_1 = 1.5$ ($r_2 = 2.5$), $E_{cr} \approx 10.25$, $\Phi_{cr} \approx 19.04$, $T_{cr} \approx 3971$ К, $\gamma_{cr} \approx 1.290$; 5 — $r_1 = 2$ ($r_2 = 3$), $E_{cr} \approx 22.40$, $\Phi_{cr} \approx 40.36$, $T_{cr} \approx 8237$ К, $\gamma_{cr} \approx 1.2867$ при вариациях координаты r_1 . Температура многократно возрастает в обоих случаях, особенно вблизи критического сечения. Показатель адиабаты уменьшается до значений $\gamma \approx 1.287$. Отметим немонотонное изменение полного числа Маха $M(r)$, рис. 2, *b*, кривая 6. Вначале преобладает рост скорости звука, модуль $|M(r)|$ убывает, достигает минимума, затем преобладает рост модуля полной скорости V и величина $|M(r)|$ растет до критического сечения, в котором $|M(r)| > 1$.

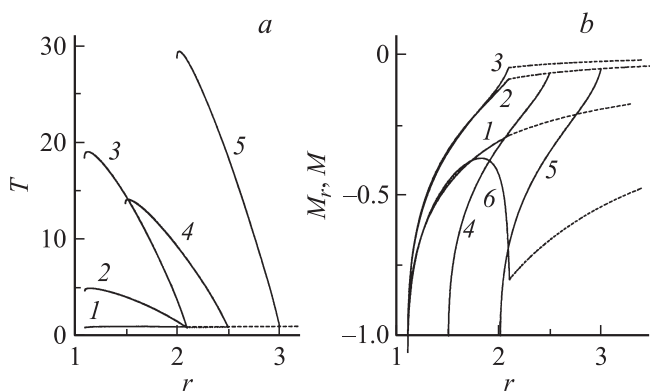


Рис. 2. Вихресток с теплоподводом по закону $f = C$ в интервале $[r_1, r_2 = r_{in} = r_1 + 1]$: *a* — температура $T(r)$ при $r_1 = 1.1 = \text{const}$, $r_2 = 2.1$ и различном расходе m : кривая 1 — $m_{\max} \approx 0.2583$ ($\Gamma = 0$); 2 — $m_{\max}/4 \approx 0.06469$ (0.60837); 3 — $m_{\max}/8 \approx 0.03229$ (0.7071); расход $m = m_{\max}/4 \approx 0.06469 = \text{const}$ (0.60837), координату r_1 варьируем: 4 — $r_1 = 1.5$ ($R_2 = 2.5$); 5 — $r_1 = 2$ ($R_2 = 3$); *b* — радиальные $M_r(r)$ (кривые 1–5) и полное $M(r)$ (б) числа Маха: 6 — $r_1 = 1.1$, $m_{\max}/8$. Пунктир — без теплоподвода, $f = 0$.

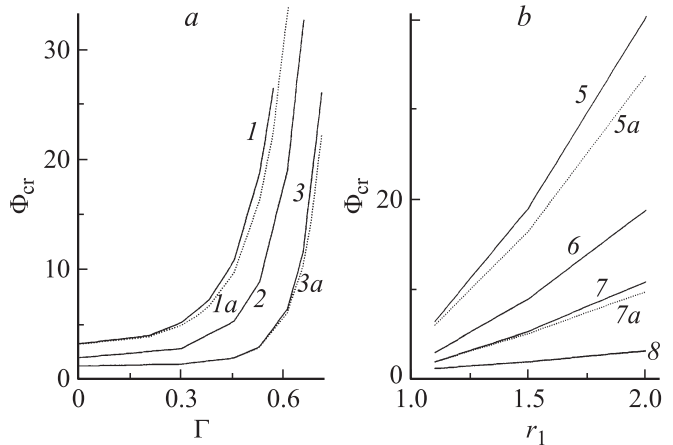


Рис. 3. Зависимости интеграла энергии Φ_{cr} в сечении $r_{cr} = r_1$ от циркуляции Γ (*a*) и от замыкающей координаты r_1 (*b*) при длине зоны $d = 1$: (*a*) 1 — $r_1 = 2$, 2 — $r_1 = 1.5$, 3 — $r_1 = 1.1$; (*b*) 5 — $m_{\max}/4$, 6 — $3m_{\max}/8 \approx 0.09687$ ($\Gamma \approx 0.5280$); 7 — $m_{\max}/2 \approx 0.12916$ (0.4541); 8 — m_{\max} ; 1*a*, 3*a*, 5*a*, 7*a* — воздух с постоянной теплоемкостью.

На рис. 3, *a, b* приведены зависимости интеграла полной энергии в критическом сечении Φ_{cr} от циркуляции Γ (рис. 3, *a*) при $r_1 = 1.1$ (кривая 1), 1.5 (2), 2 (3) и от координаты замыкающего сечения области энергоподвода r_1 (рис. 3, *b*) при расходе $m \approx 0.06469$ (циркуляции $\Gamma \approx 0.6084$, кривая 5), 0.0970 (0.528, 6), 0.1293 (0.4542, 7) и 0.2588 ($\Gamma = 0$, кривая 8) для газа с переменной теплоемкостью и постоянной теплоемкостью (кривые 1*a*, 3*a*, 5*a*, 7*a*).

В приведенных примерах относительные отличия (от случая газа с постоянной теплоемкостью) по параметру энергоподвода E_{cr} достигают 14.1%, по подведенной энергии Φ_{cr} — 13.4% по теплоемкости $C_p(T_{cr})$ — 21.3% при $r_1 = 2$, $m \approx 0.09705$ ($\Gamma \approx 0.528$) и $\Delta E_{cr}/E_{cr} \approx 14.8\%$, $\Delta \Phi_{cr}/\Phi_{cr} \approx 14.2\%$, $\Delta C_p/C_p \approx 21.7\%$ при $r_1 = 1.1$, $m \approx 0.0323$ ($\Gamma \approx 0.707$). Заметим, что даже малые расхождения в значениях E_{cr} , Φ_{cr} для моделей газа с постоянной и переменной теплоемкостью могут привести к сильному эффекту: в одном варианте тепловой кризис есть, в другом его нет.

Модель интенсивности тепловыделения $g(r)$ в единицу объема (E -вариант) и на единицу массы (Q -вариант) также важна. При $\Gamma \approx 0.7767$, $r_1 = 1.1$, $d = 0.3$ расхождения Q - и E -вариантов составили $\Delta \Phi_{cr}/\Phi_{cr} \approx 15.1\%$, $\Delta T_{cr}/T_{cr} \approx 15.8\%$.

Течение за зоной энергоподвода. Абсолютно минимальное сечение r_{mm}

За зоной энергоподвода течение изэнтропическое в случае газа с постоянной теплоемкостью. С учетом изменения теплоемкостей и показателя адиабаты с ростом температуры для двухатомного газа имеем при

$r < r_1 = r_{\text{ex}}$ в вихрестоке:

$$\frac{p(r)}{p_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{\gamma_0} \sigma^{\gamma_0-1}(T) = \frac{(T/T_1)^{\gamma_0/(\gamma_0-1)}}{\sigma(T)},$$

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{(T/T_1)^{1/(\gamma_0-1)}}{\sigma(T)}, \quad \sigma = \exp\left[\int_T^{T_1} \frac{X_T dT}{T}\right]. \quad (21)$$

Здесь $p_1 = p(r_1)$, $\rho_1 = \rho(r_1)$. Интеграл сохранения энергии (15) и решение (17) для $r(T)$ примут вид

$$\Phi_1 = T + h_\varepsilon(T) + \frac{1}{r^2} \left(\Gamma^2 + \frac{m^2}{\rho^2} \right),$$

$$r^2 = \frac{\Gamma^2 + \frac{m^2 \sigma^2(T)}{\rho_1^2 (T/T_1)^{2/(\gamma_0-1)}}}{\Phi_1 - T - h_\varepsilon(T)}. \quad (22)$$

Условие минимума $dr/dT = 0$ при $r = r_m$ можно записать

$$r_m^2 = \frac{2m^2}{\gamma_0 - 1} \frac{T_1^{2/(\gamma_0-1)} \sigma_m^2}{\rho_1^2 T_m^{(\gamma_0+1)/(\gamma_0-1)}} \frac{\gamma_m}{\gamma_0}. \quad (23)$$

Используя решение (22) $r(T)$ при $r = r_m$ и (23), получим уравнение для $T_m = T(r_m)$:

$$\frac{\Gamma^2 + \frac{m^2 \sigma_m^2}{\rho_1^2 (T_m/T_1)^{2/(\gamma_0-1)}}}{\Phi_1 - T_m - h_{\varepsilon,m}} = \frac{2m^2}{\gamma_0 - 1} \frac{T_1^{2/(\gamma_0-1)} \sigma_m^2}{\rho_1^2 T_m^{(\gamma_0+1)/(\gamma_0-1)}} \frac{\gamma_m}{\gamma_0} \quad (24)$$

Вычислив T_m , значение r_m находим из (22) или (23), плотность ρ_m и давление p_m находятся из (21), компоненты скорости u_m , v_m и числа Маха — по формулам (18), (10), (13). При некоторых достаточно больших значениях циркуляции Γ координата r_m может быть меньше единицы [4,1]. При $E < E_{\text{cr}}$ координата $r_m(E)$ убывает до значения $r_{\text{mm}} = \min[r_m(E)]$ (абсолютного минимума) с убыванием E до соответствующего значения E_{mm} , затем вновь начинает расти и обращается в единицу при $E = 0$. Исследуем тенденции изменения абсолютно минимального радиуса r_{mm} при вариации циркуляции Γ , координаты r_1 и толщине зоны d .

На рис. 4,а приведены зависимости $r_m(E)$ при циркуляциях $\Gamma \approx 0-0.7767$. Максимальные значения температуры составили $T_{\text{cr}} \approx 0.9426-10.897$ для вариантов 1-6 соответственно. Расхождения со случаем газа с постоянной теплоемкостью максимальны для вариантов 6, б а. Погрешность модели газа с постоянной теплоемкостью составила при расчете критических значений энергетического параметра E_{cr} (при $r_{\text{cr}} = r_1 = 1.1$) и минимального радиуса r_m (при $E \approx 1.60$) приблизительно 13% и 5% соответственно. На рис. 4,б показаны зависимости абсолютно минимального радиуса r_{mm} (кривые 1), соответствующих значений энергетического параметра E_{mm} (2), а также критические значения параметра энергоподвода E_{cr} (3) от циркуляции Γ при $r_1 = 1.1$, $d = 0.3$ для модели реального воздуха. Величина r_{mm} становится меньше 1 при $\Gamma > 0.56697$.

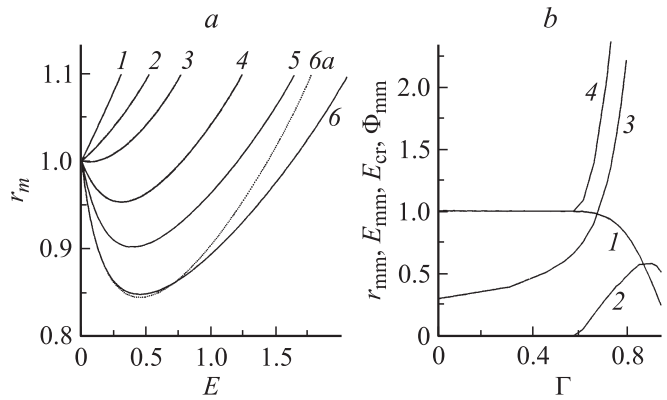


Рис. 4. а — зависимости минимального радиуса r_m от энергетического параметра E при циркуляциях Γ : 1 — $\Gamma = 0$, 2 — 0.4541, 3 — 0.60837, 4 — 0.70718, 5 — 0.7475, 6 — 0.7767, б а — газ с постоянной теплоемкостью; б — 1 — абсолютно минимальный радиус r_{mm} , 2 — энергетический параметр E_{mm} , 3 — критические значения E_{cr} , 4 — полная энергия Φ_{mm} как функции Γ ; $f = \text{const} = 0.4244$, $\gamma_0 = 1.4$, $r_1 = 1.1$, $d = 0.3$.

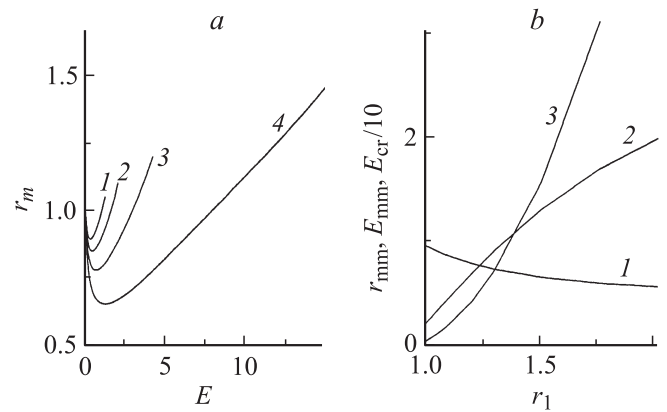


Рис. 5. а) — зависимости минимального радиуса $r_m(E)$ при различных координатах r_1 ; 1 — $r_1 = 1.05$, 2 — 1.1, 3 — 1.2, 4 — 1.5; б) 1 — абсолютно минимальный радиус $r_{\text{mm}}(r_1)$, 2 — соответствующий параметр энергоподвода $E_{\text{mm}}(r_1)$, 3 — критический параметр $E_{\text{cr}}(r_1)$; $\Gamma \approx 0.7767$, $d = 0.3$.

С дальнейшим ростом циркуляции Γ (уменьшением расхода m от значения 0.00202) величина E_{mm} растет от нуля до некоторого максимального значения $E_{\text{mm}} \approx 0.5851$ (при циркуляции $\Gamma \approx 0.8954$), затем начинает убывать (см. кривые 2). Тепловой кризис характеризуется полной энергией $\Phi_{\text{cr}} = 1 + h_{\varepsilon,0} + E_{\text{cr}}/2\pi\gamma_0 m$, где $F(r_1) = 1/2\pi$ в силу нормировки функции f . Абсолютно минимальный радиус r_{mm} характеризуется энергией $\Phi_{\text{mm}} = \Phi_1(E_{\text{mm}}) = 1 + h_{\varepsilon,0} + E_{\text{mm}}/2\pi\gamma_0 m$. При циркуляции $\Gamma > 0.8954$, хотя величина E_{mm} начинает убывать, отношение E_{mm}/m продолжает расти, так что затраченная энергия Φ_{mm} растет (кривые 4).

На рис. 5,а показаны изменения минимального радиуса $r_m(E)$ с ростом координаты r_1 при фиксированной толщине $d = 0.3$ (зона тепловыделения смещается как целое) и циркуляции $\Gamma \approx 0.7767$. Координата замы-

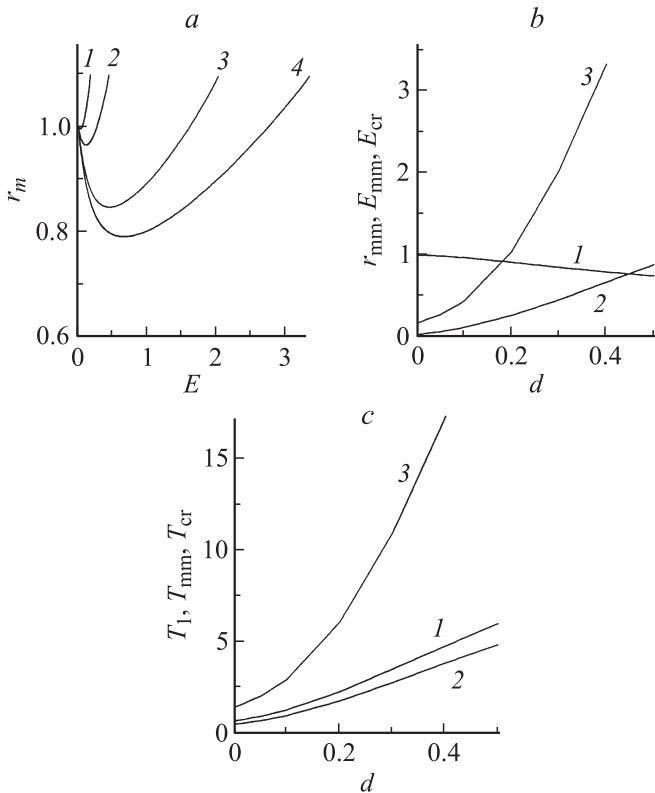


Рис. 6. Зависимости: *a*) — минимального радиуса $r_m(E)$ при различных размерах d области энергоподвода, 1 — $d = 0$, 2 — 0.1, 3 — 0.3, 4 — 0.4; *b*) — абсолютно минимального радиуса $r_{\min}(d)$ — 1, соответствующих значений энергетического параметра $E_{\min}(d)$ — 2, критических значений энергетического параметра $E_{\text{cr}}(d)$ — 3; *c*) — температуры в замыкающем сечении $T_1(d)$ — 1, температуры в сечении абсолютно минимального радиуса $T_{\min}(d)$ — 2, критической температуры $T_{\text{cr}}(d)$ — 3; циркуляция $\Gamma \approx 0.7767$, $r_1 = 1.1$.

кающего сечения r_1 равна 1.05 (кривая 1), 1.1 (2), 1.2 (3), 1.5 (4). Абсолютный минимальный радиус r_{\min} (кривая 1), соответствующий параметр энергоподвода E_{\min} (2) и критические значения параметра энергоподвода E_{cr} (3) приведены на рис. 5, *b* как функции r_1 . Величина r_{\min} монотонно убывает, а величины E_{\min} , E_{cr} монотонно растут с ростом координаты r_1 , причем темп изменений нарастает для E_{cr} и убывает для E_{\min} .

На рис. 6, *a* построены зависимости минимального радиуса r_m от энергетического параметра E при изменении толщины зоны тепловыделения $d = 0, 0.1, 0.3, 0.4$ при фиксированных координате замыкающего сечения $r_1 = 1.1$ и циркуляции $\Gamma \approx 0.7767$. Начальное сечение для вариантов 1, 2, 3, 4 составляет $r_2 = 1.1, 1.2, 1.4, 1.5$. На рис 6, *b* собраны зависимости от толщины d для абсолютно минимального радиуса r_{\min} (кривая 1), энергетического параметра E_{\min} (2) и критических значений энергетического параметра E_{cr} (3). Например, при $d = 0.4$ абсолютно минимальный радиус равен $r_{\min} \approx 0.7917$, значение энергетического параметра есть $E_{\min} \approx 0.6661$, температура $T_{\min} \approx 3.80$. На рис. 6, *c*

приведены зависимости от толщины d для температуры в замыкающем сечении энергоподвода $T_1(d)$, температуры абсолютно минимального сечения $T_{\min}(d)$, температуры в критическом сечении $T_{\text{cr}}(d)$ при циркуляции $\Gamma \approx 0.7767$. Во всех названных сечениях $r_1, r_{\min}, r_{\text{cr}}$ температура нарастает с увеличением d . С ростом d увеличиваются отличия от модели газа с постоянной теплоемкостью.

В пределе $d = 0$ в сечении $r_1 = r_2$ справедливо уравнение (9) в виде

$$\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0} p_1 + \rho_1 u_1^2 = \frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0} p_2 + \rho_2 u_2^2 \equiv I_2. \quad (25)$$

Предположим, что $E = E_{\text{cr}}$, т.е. сечение r_1 есть критическое. Равенство $M_r = 1$ дает

$$u_{\text{cr}} = (\gamma_0 - 1) T_{\text{cr}} \gamma_{\text{cr}} / 2\gamma_0.$$

Уравнения сохранения массы, энергии и уравнение состояния вместе с (25) в критическом сечении $r_{\text{cr}} = r_1$ после исключения величин $U_{\text{cr}}, \rho_{\text{cr}}$ дают значения E_{cr} и T_{cr} :

$$E_{\text{cr}} = 2\pi\gamma_0 m \left[T_{\text{cr}} \left(1 + \frac{\gamma_0 - 1}{2} \frac{\gamma_{\text{cr}}}{\gamma_0} \right) + h_{\varepsilon, \text{cr}} - h_{\varepsilon, 0} - 1 + \frac{\Gamma^2}{r_1^2} \right],$$

$$T_{\text{cr}} = \frac{2r_1^2 I_2^2 \gamma_{\text{cr}} / \gamma_0}{(\gamma_0 - 1) m^2 [(\gamma_{\text{cr}} + 1) / \gamma_0]^2}. \quad (26)$$

В докритическом диапазоне значений энергетического параметра $0 \leq E < E_{\text{cr}}$ приходим к квадратичному уравнению для $\tau = T_1 + 2h_{\varepsilon, 1} \gamma_0 / (\gamma_0 - 1)$ или T_1 , которое решается с помощью итераций. В примере рис. 6, *a*, кривая 1, получили критическое значение энергетического параметра $E_{\text{cr}} \approx 0.1695$, абсолютно минимальный радиус $r_{\min} \approx 0.996$ и значение $E_{\min} \approx 0.0255$.

Заключение

Расчет теплового кризиса в реальном газе удобно начинать из областей, близких к изэнтропическим, как в газе с постоянной теплоемкостью. В уравнениях появляются поправки — функции от температуры, которые с ростом температуры становятся существенными в критических сечениях. Поправки растут с увеличением циркуляции, с удалением зоны теплоподвода от минимального сечения, с увеличением толщины зоны тепловыделения.

В докритическом режиме $E < E_{\text{cr}}$ за область теплоподвода координата минимального радиуса r_m может быть меньше первоначального значения $r_m = 1$. Существует абсолютно минимальный радиус $r_{\min} = \min[r_m(E)]$ при некотором значении энергетического параметра E_{\min} . Область существования стационарного течения вихресток возрастает (r_{\min} убывает) вместе с возрастанием энергозатрат $\Phi_{\min} = \Phi_1(E_{\min})$ при увеличении циркуляции, при удалении зоны энергоподвода от минимального сечения, с ростом толщины зоны d .

В стоке ($\Gamma = 0$) минимальный радиус r_m всегда больше или равен единице, но в вихрестоке при превышении некоторого значения циркуляции Γ , которое зависит от расположения зоны тепловыделения r_1 и ее протяженности d , появляется абсолютно минимальный радиус r_{min} . Зависимость соответствующего энергетического параметра E_{min} от циркуляции Γ имеет экстремум — максимум.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы № П-09 президиума РАН.

Список литературы

- [1] Кучеров А.Н. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 7. С. 35–42.
- [2] Кучеров А.Н. // ИФЖ. 2010. Т. 83. № 5. С. 873–877.
- [3] Kogan M.N., Kucherov A.N. // The 9th International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. M., 2010. Proceedings. P.59–69.
- [4] Кучеров А.Н. // Ученые записки ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 4. С. 47–57.
- [5] Третьяков П.К., Грачев Г.Н., Иванченко А.И., Крайнев В.Л., Пономаренко А.Г., Тищенко В.Н. // Доклады РАН. 1994. Т. 336. № 4. С. 466–467.
- [6] Третьяков П.К., Гаранин Г.Ф., Грачев Г.Н., Крайнев В.Л., Пономаренко А.Г., Тищенко В.Н., Яковлев В.И. // Доклады РАН. 1996. Т. 351. № 3. С. 339–340.
- [7] Борзов В.Ю., Михайлов В.М., Рыбка И.В., Савищенко Н.П., Юрьев А.С. // ИФЖ. 1994. Т. 66. № 5. С. 515–520.
- [8] Зудов В.Н., Третьяков П.К., Тупикин А.В., Яковлев В.И. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 5. С. 140–153.
- [9] Гридин А.Ю., Ефимов Б.Г., Забродин А.В., Климов А.И. и др. Препринт № 19. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1995. 31 с.
- [10] Алферов В.И. // Изв. РАН МЖГ. 2004. № 6. С. 163.
- [11] Ершов А.П., Сурконт О.С., Тимофеев И.Б., Шибков В.М., Черников В.А. ТВТ 2004. Т. 42. № 4. С. 516–522.
- [12] Ершов А.П., Сурконт О.С., Тимофеев И.Б., Шибков В.М., Черников В.А. ТВТ 2004. Т. 42. № 5. С. 669–675.
- [13] Ершов А.П., Сурконт О.С., Тимофеев И.Б., Шибков В.М., Черников В.А. ТВТ 2004. Т. 42. № 6. С. 856–864.
- [14] Громов В.Г., Ершов А.П., Левин В.А., Шибков В.М. ТВТ 2006. Т. 44. № 2. С. 185–194.
- [15] Кучеров А.Н. Препринт ЦАГИ № 158. М.: Издательский отдел ЦАГИ, 2010. 40 с.
- [16] Кучеров А.Н. Препринт ЦАГИ № 157. М.: Издательский отдел ЦАГИ, 2009. 36 с.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика (Т. 5). М.: Наука, 1964. 568 с.
- [18] Физические величины. Справочник. Ред. И.С. Григорьев, Е.З. Мейлихов. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
- [19] Гриффит В.Ц. „Основные результаты экспериментов на ударных трубах“. М.: Гос. изд. лит. по атомной науке и технике, 1963. С. 267. (Fundamental data obtained from shock-tube experiments. Ed. A. Ferri. Oxford: Pergamon Press, 1961).
- [20] Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. Ред. Г.И. Майкапар. М.: Машиностроение, 1972. 344 с.
- [21] Глаголев Ю.А. Справочник по физическим параметрам атмосферы. Л.: Гидрометеорологическое изд-во, 1970. 212 с.