

01;04

Модель установившейся функции распределения осциллирующих электронов в полном катоде

© А.Е. Дубинов, С.К. Сайков, Л.А. Сенилов

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607188 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov@ntc.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 16 декабря 2011 г.)

В рамках простой модели математического бильярда с осциллирующими стенками определен характер функции распределения по скоростям осциллирующих электронов в разряде с полым катодом при низком давлении. Функция распределения является неравновесной и допускает развитие неустойчивости плазменно-пучкового типа.

Электрический газовый разряд с полым катодом [1,2] занимает особое место среди всех других типов газовых разрядов благодаря своим уникальным свойствам и многочисленным применениям. Его свойства обусловлены так называемым эффектом полого катода (или маятниковым эффектом [3]). Этот эффект заключается в том, что энергичные электроны, однажды вылетев с катода, несколько раз пересекают газовый объем и отражаются от стенок катодной полости (точнее, от потенциального барьера прикатодного слоя), вызывая множественную ионизацию в объеме. Такое специфическое движение осциллирующих электронов продемонстрировано, например, в работе [4] с помощью моделирования PIC/МС-методом.

В разряде с полым катодом низкого давления может возникать колебательная неустойчивость прикатодного слоя [5,6], что может приводить к возникновению высокочастотной (ВЧ) модуляции разрядного тока [7]. Эту неустойчивость используют для генерации мощных ВЧ-импульсов в диапазоне частот более 50 МГц [8–10].

Для понимания физических процессов в ВЧ-генераторах с полым катодом важно знать поведение функции распределения осциллирующих электронов по скоростям (или энергиям) в режиме интенсивных колебаний тока в разряде. Ясно, что ее непосредственное измерение сопряжено с определенными трудностями, связанными с сильнейшими ВЧ-наводками в любых измерительных цепях.

Поэтому для определения функции распределения необходима разработка простых теоретических моделей ее установления. В настоящей работе предложена одна из таких моделей — модель математического бильярда с возмущаемыми стенками [11,12]. Укажем, что подобные бильярдные модели часто применяются для описания функции распределения электронов в ВЧ емкостных разрядах [13,14], которые по многим характеристикам, как указано в [15–17], сходны с разрядами с полым катодом, особенно когда последние развиваются в режиме ВЧ-генерации. Между этими разрядами имеется лишь два

небольших отличия:

— в ВЧ-разрядах потенциалы противоположных стенок электродов осциллируют в противофазе друг с другом [15], а в разряде с полым катодом — колебания приэлектродного слоя по всей поверхности катода, как было измерено в [9], происходят синфазно;

— в ВЧ-разрядах определяющее значение имеют колебания ионов между электродами, а в разряде с полым катодом — электронов внутри катодной полости.

Как правило, в ВЧ-генераторах [7–9] катодная полость имеет форму цилиндра, в одном из оснований которого располагается плоский анод. В такой конфигурации электродов осциллирующие электроны многократно отражаются от внутренней цилиндрической поверхности катода, дрейфуя вдоль оси цилиндра. Следовательно, наиболее адекватным геометрическим образом полости является круговой бильярд, в котором по причине колебаний прикатодного слоя происходят возмущения границы в виде $r(t) = r_0 + A \cos \omega t$. В дальнейшем для упрощения расчетов пренебрегаем геометрическим смещением границы от положения равновесия в момент отражения, т. е. $A \ll r_0$.

Сначала рассмотрим характер движения отдельного осциллирующего электрона в таком круговом бильярде с осциллирующими стенками. Укажем, что подобные круговые бильярды с осциллирующими стенками рассматривались в [18–20] для других целей. Очевидно, что после каждого n -го пролета электрона от одной стенки катода до другой тангенциальная компонента скорости сохраняет свое значение при отражении: $V_{\tau n+1} = V_{\tau n} = \text{const}$. Но ввиду возмущения границы угол падения не равен углу отражения, т. е. $\theta_{n+1} \neq \theta_n$ (см. обозначения на рис. 1).

Запишем двумерное рекуррентное отображение для последовательности отражений электрона от осциллирующей стенки (разностный аналог уравнений движения):

$$V_{rn+1} = V_{rn} - 2\dot{r}(t_n), \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 t_{n+1} &= t_n + \frac{x}{V_n} = t_n + \frac{2r_0 \cos(\pi/2 - \theta_n)}{\sqrt{V_{rn}^2 + V_\tau^2}} \\
 &= t_n + \frac{2r_0 V_{rn}}{V_{rn}^2 + V_\tau^2}, \quad (2)
 \end{aligned}$$

где (1) описывает преобразование радиальной скорости электрона при его отражении от движущейся стенки, а (2) — время движения электрона от стенки к стенке.

Отображение (1), (2), в принципе, позволяет детально описать характер движения отдельного электрона внутри рассматриваемой области без учета столкновений с частицами газа (в разряде низкого давления такое приближение допустимо). Анализ подобных отображений показывает, что движение частицы почти всегда является стохастическим [18–20], а на фазовой плоскости область стохастичности (говорят — „море“ стохастичности), как правило, „омывает острова“ регулярных (квазипериодических) колебаний [21].

Пример отображения Пуанкаре для (1), (2) показан на рис. 2. Он, как и ожидалось, также имеет вид стохастического моря, омывающего один крупный и множество мелких островов квазипериодичности (обратим внимание на то, что, поскольку одна из фазовых координат — угол, то фазовое пространство является цилиндрическим, а на рис. 2 показана развертка этого цилиндра).

При этом каждый выделенный электрон в своем движении либо все время находится в море стохастичности, либо все время находится на одном из островов квазипериодичности, а переход с острова на другой остров или в море запрещены. Следовательно, для нахождения функции распределения электронов важно понимать, что она должна являться композицией функций распределения электронов, вычисленных отдельно для моря стохастичности и для всех островов.

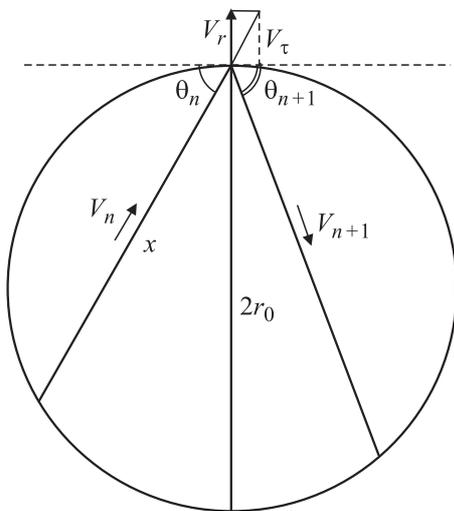


Рис. 1. Геометрия отражения электрона от стенки полого катода.

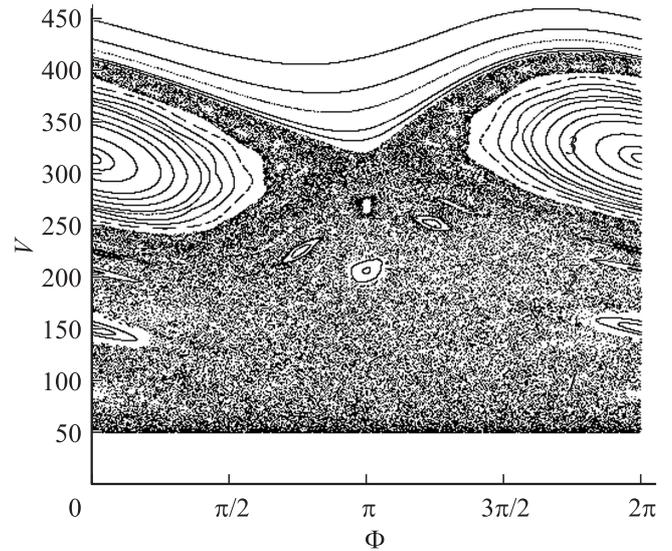


Рис. 2. Сечение Пуанкаре, построенное по результатам численного моделирования разностных уравнений (1), (2). Параметры расчета: $V_\tau = 50$, $r_0 = 10$, $A = 0.2$, $\omega = 100$; число итераций — $2 \cdot 10^5$.

Для нахождения составляющих функции распределения осциллирующих электронов по скоростям можно воспользоваться вероятностными оценками, причем для той составляющей, которая отвечает квазипериодическому движению по самому крупному острову, это можно сделать аналитически.

Сначала находим, что изменение скорости в момент каждого отражения ΔV_n равно:

$$\begin{aligned}
 \Delta V_n &= V_{n+1} - V_n = \sqrt{V_{rn+1}^2 + V_\tau^2} - V_n \\
 &= (V_{rn}^2 + 4\dot{r}(t_n)V_{rn} + 4\dot{r}^2(t_n) + V_\tau^2)^{1/2} - V_n \\
 &= \sqrt{V_n^2 + 4\dot{r}(t_n)V_{rn} + 4\dot{r}^2(t_n)} - V_n. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Введем параметр пропорциональности γ для $\Delta V_n = \gamma V_n$ вида

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{4\dot{r}(t_n)V_{rn}}{V_n^2} + \frac{4\dot{r}^2(t_n)}{V_n^2}} - 1. \quad (4)$$

Считая скорость движения границы $\dot{r}(t_n)$ много меньше скорости движения отдельного электрона, констатируем, что тогда численное значение квадратичного члена становится много меньшим единицы и им можно пренебречь:

$$\gamma \approx \sqrt{1 + \frac{4\dot{r}(t_n)V_{rn}}{V_n^2}} - 1 \approx 2 \frac{\dot{r}(t_n)V_{rn}}{V_n^2}. \quad (5)$$

Подставляя в (5) значение производной $\dot{r}(t_n) = -A\omega \sin(\omega t_n)$, получим

$$\gamma = -2A\omega \sin(\omega t_n) \frac{\sqrt{V_n^2 - V_\tau^2}}{V_n^2}, \quad (6)$$

а затем из (3) —

$$\begin{aligned} \Delta V_n &= -2A\omega \sin(\omega t_n) \frac{\sqrt{V_n^2 - V_\tau^2}}{V_n^2} V_n \\ &= -2A\omega \sin(\omega t_n) \sqrt{1 - \frac{V_\tau^2}{V_n^2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$V_{n+1} = V_n + 2A\omega \sin(\omega t_n) \sqrt{1 - \frac{V_\tau^2}{V_n^2}}. \quad (8)$$

Для аналитического нахождения функции распределения удобно перейти от рекуррентного соотношения (8) к непрерывной функции изменения скорости в зависимости от времени (или от фазы $\Phi = \omega t$). С этой целью, считая в среднем изменение скорости в результате одного отражения значительно меньшим абсолютной величины скорости частицы, введем величину средней скорости V_0 , в результате чего формула (8) преобразится к следующему виду:

$$V(\Phi) = V_0 + 2A\omega \sin(\Phi) \sqrt{1 - \frac{V_\tau^2}{V_0^2}}. \quad (9)$$

Правомерность использованного упрощения можно оправдать следующими обстоятельствами. Во-первых, изначально выбранная приближенная модель, пренебрегающая смещением границы в момент отражения, уже подразумевает, что изменение скорости ΔV_n действительно много меньше величины полной скорости V_n . Во-вторых, численно найденные функции распределения из законов изменения скорости (8) и (9) окажутся качественно схожими друг другу (ниже это будет показано). Следует отметить, что указанный прием был использован в [13] при решении аналогичной задачи по исследованию характера движения частицы между двумя параллельными стенками с возмущенными границами.

Очевидно, что выражение (9) описывает периодические колебания скорости относительно среднего значения. Рис. 3 поясняет, как для таких колебаний можно найти закон распределения скорости частицы как функцию фазы. Для этого выберем некоторый произвольный малый промежуток изменения фазы $[\Phi_1, \Phi_2]$. Считая искомую функцию фазы равномерно распределенной вдоль допустимых значений аргумента ($\Phi \in [0, 2\pi]$), вероятность попадания координаты точки внутрь $[\Phi_1, \Phi_2]$ определяется отношением длины промежутка к полному периоду: $P(\Phi \in [\Phi_1, \Phi_2]) = (\Phi_2 - \Phi_1)/2\pi$. При этом для любого $[\Phi_1, \Phi_2]$ можно поставить в однозначное соответствие отрезок значений скорости $[V_1, V_2]$. При условии, что промежуток $\Phi_2 - \Phi_1$ значительно меньше

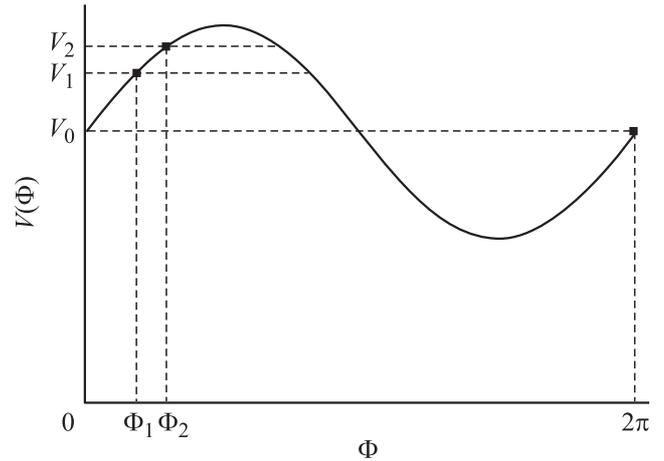


Рис. 3. Закон (9) изменения скорости в зависимости от фазы.

величины полного периода (2π), вероятность попадания значения скорости в интервал $[V_1, V_2]$ определяется, как это хорошо видно из рис. 3, по следующей простой формуле:

$$P(v \in [V_1, V_2]) = 2 \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2\pi}. \quad (10)$$

С другой стороны, вероятность $P(V \in [V_1, V_2])$ можно выразить через усредненное на участке $[V_1, V_2]$ значение плотности вероятности $\bar{\rho}_P(V)$

$$P(V \in [V_1, V_2]) = \bar{\rho}_P(V)(V_2 - V_1). \quad (11)$$

Сравнение формул (10) и (11) позволяет получить следующее соотношение:

$$\bar{\rho}_P(V)(V_2 - V_1) = \frac{1}{\pi} (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (12)$$

Устремляя сдвиг фазы ($\Phi_2 - \Phi_1$) к нулю, получаем точное выражение для плотности вероятности

$$\rho_P(V) = \frac{1}{\pi} \frac{d\Phi}{dV}. \quad (13)$$

Выражая из (9) фазу через скорость,

$$\Phi(V) = \arcsin \left(\frac{V - V_0}{2A\omega \sqrt{1 - V_\tau^2/V_0^2}} \right), \quad (14)$$

дифференцируя полученное выражение и подставляя его в (13)

$$\rho_P(V) = \frac{1}{\pi} \left[4A^2\omega^2 \left(1 - \frac{V_\tau^2}{V_0^2} \right) - (V - V_0)^2 \right]^{-1/2}, \quad (15)$$

получаем распределение вероятности для произвольного значения скорости

$$dP(V) = \frac{1}{\pi} \left[4A^2\omega^2 \left(1 - \frac{V_\tau^2}{V_0^2} \right) - (V - V_0)^2 \right]^{-1/2} dV. \quad (16)$$

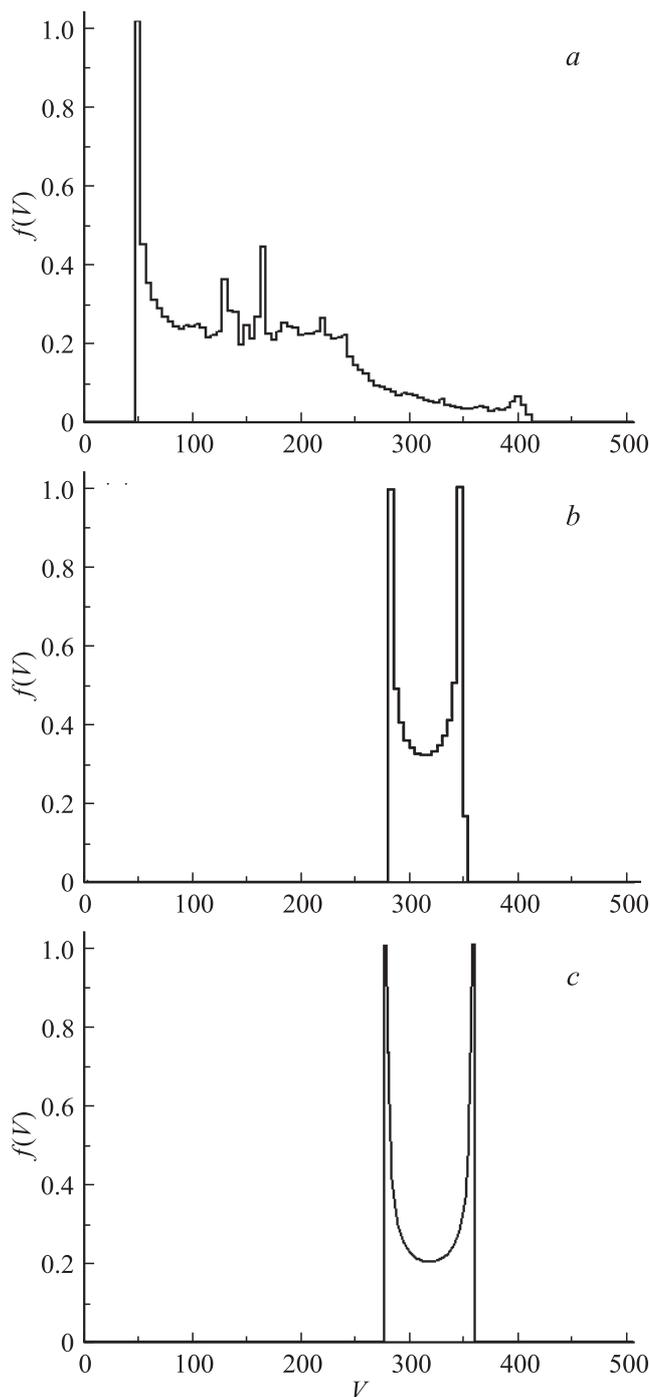


Рис. 4. Функции распределения электронов по скоростям: *a* — вычисленная по (1), (2) для электронов стохастического моря; *b* — вычисленная по (1), (2) для электронов наибольшего острова квазипериодичности; *c* — вычисленная по формуле (16) для электронов наибольшего острова квазипериодичности (все — при $V_r = 50$, $r_0 = 10$, $A = 0.2$, $\omega = 100$).

Выражение (16) следует считать итоговым законом, описывающим распределение вероятностей скорости частицы для самого крупного острова квазипериодичности.

Для построения функции распределения электронов для моря стохастичности и для крупнейшего острова квазипериодичности была произведена статистическая обработка массива вычислений отображения Пуанкаре. На рис. 4 показаны результаты вычислений: рис. 4, *a* — функция распределения для моря стохастичности, рис. 4, *b* — функция распределения для крупнейшего острова квазипериодичности, на рис. 4, *c* — функция (16). Как хорошо видно, функция распределения для острова хорошо совпадает с аналитической оценкой (16).

Следует отметить, что вид функции распределения типа (16) весьма характерен для разрядов низкого давления, в которых частицы совершают баунс-колебания между осциллирующими стенками. Например, аналогичные функции распределения для ионов формируются в емкостных ВЧ-разрядах [22–24] и даже в индуктивных ВЧ-разрядах [25,26].

Таким образом, маятниковый эффект (эффект полого катода) в режиме колебаний потенциалов стенок катода приводит к суммарной функции распределения электронов с несколькими пиками (два пика от (16) и один пик — вдоль нижней границы моря стохастичности). Суммарная функция распределения электронов допускает развитие кинетической неустойчивости плазменно-пучкового типа.

Работа поддержана грантом РФФИ № 10-02-00137.

Список литературы

- [1] Москалев Б.И. Разряд с полым катодом. М.: Энергия. 1969.
- [2] Метель А.С., Григорьев С.Н. Тлеющий разряд с электростатическим удержанием электронов. М.: Янус-К, ГОУ МГТУ „Станкин“, 2005.
- [3] Stockhausen G., Kock M. // J. Phys. D: Appl. Phys. 2001. Vol. 34. N 11. P. 1683.
- [4] Kim G.J., Lee J.K. // IEEE Transactions on Plasma Sci. 2008. Vol. 36. N 4. P. 1238.
- [5] Bliokh Yu.P., Felsteiner J., Slutsker Ya.Z. // Europhys. Lett. 1999. Vol. 46. N 6. P. 735.
- [6] Костюков И.Ю., Фрайман Г.М. // Изв. вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46. № 10. С. 976.
- [7] Arbel D., Bar-Lev Z., Felsteiner J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. N 1. P. 66.
- [8] Вялых Д.В., Дубинов А.Е., Львов И.Л. и др. // ПТЭ. 2005. № 1. С. 86.
- [9] Булычев С.В., Вялых Д.В., Дубинов А.Е. и др. // Физика плазмы. 2009. Т. 35. № 11. С. 1019.
- [10] Булычев С.В., Дубинов А.Е., Вялых Д.В. и др. // ПТЭ. 2011. № 5. С. 106.
- [11] Акиншин Л.Г., Васильев К.А., Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б. // Физ. мысль России. 1997. № 2–3. С. 87.
- [12] Лоскутов А.Ю., Рябов А.Б., Краснова А.К., Чичигина О.А. // Нелинейная динамика. 2010. Т. 6. № 3. С. 573.
- [13] Goedde C.G., Lichtenberg A.J., Lieberman M.A. // J. Appl. Phys. 1988. Vol. 64. N 9. P. 4375.

- [14] *Lieberman M.A., Godyak V.A.* // IEEE Transactions on Plasma Sci. 1998. Vol. 26. N 3. P. 955.
- [15] *Малик Д.А., Орлов К.Е., Смирнов А.С., Черноизюмская Т.В.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. № 12. С. 89.
- [16] *Гордиенко В.А., Дубинов А.Е., Журавлев С.С.* и др. // Физика плазмы. 2005. Т. 31. № 3. С. 298.
- [17] *Дубинов А.Е., Журавлев С.С., Иванов М.М., Репин П.Б.* // Теплофизика высоких температур. 2003. Т. 41. № 4. С. 503.
- [18] *Ахиезер А.И., Бакай А.С.* // ДАН СССР. 1971. Т. 201. № 5. С. 1074.
- [19] *Лоскутов А.Ю., Акишин Л.Г., Соболевский А.Н.* // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. 2001. Т. 9. № 4–5. С. 50.
- [20] *Howard J.E.* // Math. Problems in Engineering (Hindawi Publishing Corporation). 2009. Vol. 2009. N ID. P 531 024.
- [21] *Дубинов А.Е., Садовой С.А.* // Физика плазмы. 1999. Т. 25. № 12. С. 1112.
- [22] *Kushner M.J.* // J. Appl. Phys. 1985. Vol. 58. N 11. P. 4024.
- [23] *Snijkers R.J.M.M., van Sambeek M.J.M., Kroesen G.M.W., de Hoog F.J.* // Appl. Phys. Lett. 1993. V. 63. N 3. P. 308.
- [24] *Vender D., Kroesen G.M.W., de Hoog F.J.* // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. N 4. P. 3480.
- [25] *Hoekstra R.J., Kushner M.J.* // J. Appl. Phys. 1996. V. 79. N 5. P. 2275.
- [26] *Vasenkov A.V., Kushner M.J.* // J. Appl. Phys. 2004. V. 95. N 3. P. 834.