

01;10

## Идеальная фокусировка в теории электростатических спектрографов

© Н.К. Краснова

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: n.k.krasnova@mail.ru

(Поступило в Редакцию 7 июля 2011 г. В окончательной редакции 29 ноября 2011 г.)

Ставится задача синтеза полевых структур, в которых реализуется спектрографический принцип разделения потоков заряженных частиц и одновременно осуществляется идеальная фокусировка по углу в плоскости симметрии для каждой энергии. Поиск таких спектрографических сред эффективно осуществляется с помощью обратных задач механики. Предложено два подхода: один — методом приведения к интегральному уравнению Абеля, второй — применением теоремы Гурса. Подробно описаны алгоритмы синтеза спектрографических сред с идеальной фокусировкой потоков, указаны возможные варианты решений, относящихся к представителям двух классов структур — с потенциалами, однородных по Эйлеру, и однородными потенциалами с логарифмической особенностью. Отмечаются перспективы создания светосильных спектрографов в энергоанализе.

### Введение

В современной электронной спектроскопии используются энергоанализирующие системы двух типов — спектрометры и спектрографы. Такая классификация основана на различном принципе их действия. Главное их отличие между собой состоит в том, что в спектрометрах все электроны спектра прогоняются по единой хорошо сфокусированной на детектор траекторной струе. Достигается это за счет изменения потенциала на электродах — электрической развертки. В спектрографах весь поток пространственно разделяется полем на парциальные струи, каждая со своей энергией, и он фокусируется на отдельные локальные детекторы — группы пикселей на позиционно-чувствительном детекторе. Потенциал поля при этом поддерживается постоянным. Вполне очевидно, что электронно-оптическая задача синтеза эффективного спектрографа гораздо труднее, чем для спектрометра. Требование достаточно качественной фокусировки по углу одновременно для множества струй разной энергии на протяженной плоской пластине выглядит весьма жестким и труднодостижимым. Однако интерес к спектрографам по ряду причин нарастает с каждым днем и потому растет число работ, посвященных данной теме [1–3]. Традиционный подход состоит в том, чтобы приспособить к работе спектрографа хорошо известные энергоанализаторы, работавшие до сих пор как спектрометры. Кое-какие успехи на этом пути есть, но главный бич — кривизна фокальной поверхности, недостаточная чувствительность и узкий диапазон регистрируемых энергий — до сих пор преодолеть не удалось. Здесь нужны принципиально иные подходы.

### Постановка задачи

В лаборатории Санкт-Петербургского политехнического университета решили отказаться от привычной

схемы и выдвинули проблему определения электростатических полевых структур, в которых идея спектрографа воплощалась бы наиболее естественным образом. Их назвали спектрографическими средами. Довольно быстро выяснилось, что наиболее подходят для этого электрические поля с потенциалами, являющимися однородными по Эйлеру функциями с кратностью, отличной от нуля. В дальнейшем изложении для краткости будем именовать их однородными потенциалами. Общее выражение таких потенциалов в сферической системе координат  $(\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \gamma, \psi)$  имеет вид

$$\Phi = \rho^n F(\gamma, \psi), \quad n \neq 0. \quad (1)$$

Потенциал  $\Phi$  — лапласов, гармонический. Нулевая эквипотенциаль здесь  $F(\gamma, \Phi) = 0$  — либо плоскость, либо коническая поверхность. Из классической механики известно, что в полях с однородными потенциалами действует специальный принцип подобия, позволяющий строить бесконечное множество взаимно подобных траекторий за счет перестройки кинетической энергии по закону

$$W = W_0 k^n, \quad (2)$$

где  $W_0$  — минимальная энергия фиксируемого спектра, и точки прилета

$$\rho = \rho_0 k, \quad (3)$$

где  $\rho_0$  — точка прилета соответствующей минимальной энергии  $W_0$ . Из этого принципа немедленно следует электронно-оптическое толкование, исключительно ценное для электронной спектрографии. Оно состоит в том, что пучок электронов, выходящий из начала координат и образующий при фиксированной энергии  $W_0$  где-то в пространстве точечное изображение, при перестройке энергий по закону (2) образует целый луч таких изображений. Если этот луч является фрагментом нулевой эквипотенциали для (1), то, располагая вдоль него линейный позиционно-чувствительный детектор,

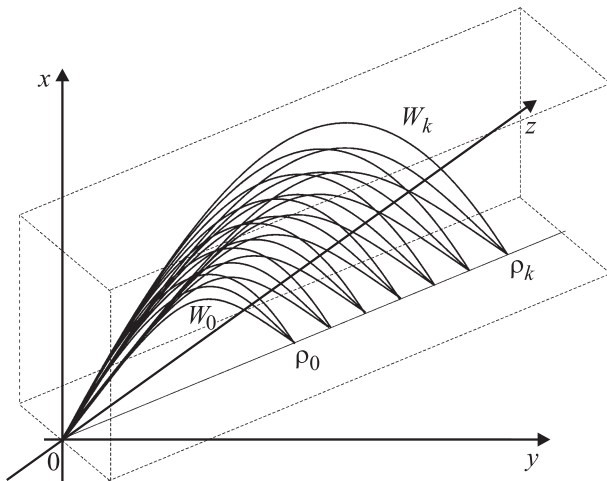


Схема работы идеального спектрографа. Луч  $\rho_0\rho_k$  — местоположение фокусов,  $W_0$  — минимальная энергия заряженных частиц потока,  $W_k$  — максимальная энергия частиц.

можем измерить (зафиксировать) сразу все (или почти все) энергии. Это, как раз, и есть схема идеального спектрографа (см. рисунок). Отсюда следует очевидный вывод: искать выгодные электронно-оптические схемы спектрографов целесообразно, именно, в классе (1).

Несколько лет назад нам удалось обобщить эту идею и построить класс гармонических потенциалов, обобщающий класс (1), в котором также действует специальный принцип подобия, но с другим законом преобразования энергий [4]

$$\Phi = P(x, y, z) \ln R(x, y, z) + Q(x, y, z), \quad (4)$$

где  $P, Q$  — однородные функции кратности  $n$ , а  $R$  — однородная кратности  $m$ ,  $n$  и  $m$  могут быть любыми вещественными числами. В целом функция  $\Phi$  — гармоническая, но  $P, Q, R$  порознь обычно не гармонические, хотя иногда выгодно брать  $P(x, y, z)$  именно гармонической. Данный класс богаче, чем (1), и в нем можно разыгрывать с большим успехом разнообразные идеи спектрографии. В частности, одной из главных проблем для обоих классов спектрографических сред является поиск систем с высоким качеством угловой фокусировки по углам разлета частиц на старте. Как показывает наш опыт работы в теории спектрометров, наиболее эффективен такой поиск с помощью обратных задач механики. Таким способом, в частности, удается построить множество систем с идеальной фокусировкой в плоскости симметрии поля. Такие системы особенно интересны благодаря их большой светосиле при значительной, часто очень большой дисперсии [5,6]. Обратный подход оказывается продуктивным и для теории спектрографов на базе однородных структур (1) и (4).

## Синтез спектрографических сред с идеальной фокусировкой

Рассмотрим сначала более простой класс (1), наложим на функцию  $R(\gamma\psi)$  условие симметрии по азимутальному углу  $\psi$

$$F(\gamma, \psi) = F(\gamma, -\psi). \quad (5)$$

В плоскости симметрии  $x, z$  ( $\psi = 0$ ) ход потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi|_{y=0(\psi=0)} &= r^n f(\gamma), \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия (5) и (6) вместе с уравнением Лапласа формулируют задачу Коши для потенциала, позволяющую восстановить пространственный ход потенциала по виду функции  $f(\gamma)$ . Эта задача решена в работе [7].

Итак, займемся поиском спектрографических сред типа (1) с идеальной фокусировкой в плоскости симметрии. Для этого надо сначала разобраться с интегрируемостью уравнений движения в полях данного класса, чтобы математически строго поставить обратные задачи движения. Выпишем уравнение Гамильтона–Якоби для укороченного действия  $S(r, \gamma)$  в плоскости симметрии в полярных координатах

$$\frac{1}{2} \left( S_r^2 + \frac{1}{r^2} S_\gamma^2 \right) r^n f(\gamma) = E, \quad (7)$$

где  $E$  — полная энергия. Все исследование ведется в безразмерных переменных, способ введения которых подробно описан в монографии [8]. Здесь непосредственно видно, что полный интеграл находится в форме

$$S = S_1(r) + S_2(\gamma) \quad (8)$$

методом разделения переменных в единственном случае  $n = -2$ . Именно с ним и следует разобраться в первую очередь. Конечно, можно было бы сразу определить действие формой (8) и через нее выразить траектории, но предпочтем более наглядный в физическом плане путь через лагранжевы уравнения.

Имеем функцию Лагранжа и уравнения движения с набором начальных условий в стандартной форме

$$L = \frac{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\gamma}^2}{2} - \frac{f(\gamma)}{r^2}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} \ddot{r} = r\dot{\gamma}^2 + \frac{2f(\gamma)}{r^3}, \\ \frac{d}{d\tau} r^2 \dot{\gamma} = -\frac{f'(\gamma)}{r^2}, \end{cases} \quad (10)$$

$$r|_{\tau=0} = r_0 = z_0, \quad \dot{r}|_{\tau=0} = \dot{r}_0 = \dot{z}_0,$$

$$\gamma|_{\tau=0} = 0, \quad r\dot{\gamma}|_{\tau=0} = r_0\dot{\gamma}_0 = \dot{x}_0,$$

$$f(\gamma)|_{\gamma=0} = 0.$$

Домножим (11) на  $r^2\dot{\gamma}$ , получим интегрируемое соотношение

$$\frac{d}{d\tau} \frac{r^4 \dot{\gamma}^2}{2} = \frac{d}{d\tau} f(\gamma), \quad (12)$$

из которого получается первый интеграл вида

$$\frac{r^4 \dot{\gamma}^2}{2} = A - f(\gamma), \quad (13)$$

где  $A = \frac{r_0^4 \dot{\gamma}_0^2}{2} = \frac{r_0^2 x_0^2}{2}$ . Из (13) выражаем  $r \dot{\gamma}^2$  и встраиваем в (10), получим чисто радиальное уравнение (одномерное движение)

$$\dot{r} = \frac{2A}{r^3}, \quad (14)$$

которому отвечает интеграл энергии

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{A}{r^2} = \frac{\dot{r}_0^2}{2} + \frac{A}{r_0^2} = \frac{z_0^2 + x_0^2}{2} = W. \quad (15)$$

Отсюда

$$\dot{r} = \sqrt{2} \sqrt{W - \frac{A}{r^2}}. \quad (16)$$

Далее из (13)

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2} \frac{\sqrt{A - f(\gamma)}}{r^2}. \quad (17)$$

Деление (17) на (16) дает уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{d\gamma}{dr} = \frac{\sqrt{A - f(\gamma)}}{r^2 \sqrt{W - A/r^2}}. \quad (18)$$

Интегрируя (18), получим

$$\int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{A - f(\gamma)}} = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{W - A/r^2}}. \quad (19)$$

Вычисляя элементарный интеграл справа в (19), получим уравнение траектории в геометризованной форме, связывающее  $r$  и  $\gamma$ ,

$$\int_0^\gamma \frac{d\gamma}{\sqrt{A - f(\gamma)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{A}{W} \frac{1}{r_0}} - \arcsin \sqrt{\frac{A}{W} \frac{1}{r}} \right]. \quad (20)$$

Если  $f(\gamma) > 0$  — монотонная функция, то на частицу действует возвращающая к оси  $z$   $\gamma = 0$  сила. Угол  $\gamma$  доходит до вершины  $\gamma_{\max}$ , где скорость  $\dot{\gamma}$  обращается в 0, и далее  $\gamma$  падает до нуля. При возвращении  $\gamma$  к 0 координата  $r$  сместится в положение  $r = P$ , так что для определения  $P$  из (20) образуется уравнение

$$2 \int_0^{\gamma_{\max}} \frac{d\gamma}{\sqrt{A - f(\gamma)}} = \frac{1}{\sqrt{A}} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{A}{W} \frac{1}{r_0}} - \arcsin \sqrt{\frac{A}{W} \frac{1}{P}} \right], \quad (21)$$

где  $\gamma_{\max}$  есть решение уравнения  $A - f(\gamma_{\max}) = 0$ .

Если для монотонной функции  $f(\gamma)$  взять обратное представление

$$\gamma = R(f), \quad R(0) = 0, \quad (22)$$

интегральное соотношение (21) превратиться в интегральное уравнение Абеля относительно функции  $R'(f)$

$$\int_0^A \frac{R'(f) df}{\sqrt{A - f}} = N(A, W, r_0, P), \quad (23)$$

где введены обозначения

$$N = \frac{1}{2\sqrt{A}} \left[ \arcsin a\sqrt{A} - \arcsin b\sqrt{A} \right],$$

$$a = \frac{1}{r_0 \sqrt{W}}, \quad b = \frac{1}{P \sqrt{W}}.$$

Если фиксировать  $r_0, W$  и назначить функцию  $P(A)$  по своему желанию, то из интегрального уравнения можно найти по методу Абеля функцию  $R'(f)$ , обеспечивающую нужный нам ход зависимости  $P$  от параметра  $A$ . Имеем в этом случае

$$R'(f) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{df} \int_0^f \frac{N(A) dA}{\sqrt{f - A}}. \quad (24)$$

Интегрируя (24) с учетом условия (22), получим ключевую формулу для данного класса спектрографических сред, позволяющую решать весьма важные обратные задачи

$$\gamma = R(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^f \frac{N(A) dA}{\sqrt{f - A}}. \quad (25)$$

При фиксированной энергии  $W_0$  можно поставить очень интересную задачу о спектрографической среде, обладающей идеальной фокусировкой по углу влета  $\theta$  в заданной точке  $P_0$  при условии, что источник в точке  $r_0 = z_0$  точечный. В качестве параметра фокусировки выступает более удобный, чем  $\theta$ , параметр

$$A = \frac{r_0^2 x_0^2}{2} = r_0^2 \cdot W \sin^2 \theta. \quad (26)$$

При  $W = W_0$   $A$  — вполне эквивалентный угловой параметр. Если положить  $P = P_0 = \text{const}$  величиной, не зависящей от  $A$ , то для определения функции поля  $R(f)$ , отвечающей за идеальную фокусировку, имеем из (25) и (23) следующее представление:

$$\gamma = R(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^f \left[ \frac{\arcsin a\sqrt{A}}{\sqrt{A(f - A)}} - \frac{\arcsin b\sqrt{A}}{\sqrt{A(f - A)}} \right] dA. \quad (27)$$

Оба интеграла вполне идентичны по форме с разницей в параметрах  $a$  или  $b$ . При  $W = W_0 = \text{const}$  и  $P = P_0 = \text{const}$  оба параметра ( $a$  и  $b$ ) из (23) вполне конкретные числа.

Рассмотрим только один интеграл

$$J = \int_0^f \frac{\arcsin a\sqrt{A}}{\sqrt{A(f - A)}} dA. \quad (28)$$

Интеграл этот несобственный в двух точках, элементарный он или нет, заранее не определить, но можно применить следующий искусственный прием.

Вычислим производную  $J$  по  $a$

$$\frac{dJ}{da} = \int_0^f \frac{dA}{\sqrt{(f-A)(1-a^2A)}} = \frac{1}{a} \ln \frac{1+a\sqrt{f}}{1-a\sqrt{f}}. \quad (29)$$

Тривиальное интегрирование опускаем. При  $a=0$  интеграл (28), очевидно, обращается в 0, тогда из (29) следует

$$J = \int_0^a \frac{1}{a} \ln \frac{1+a\sqrt{f}}{1-a\sqrt{f}} da. \quad (30)$$

Этот интеграл заведомо неэлементарный, поэтому нет смысла пытаться проинтегрировать (27) в известных элементарных функциях. Однако интеграл (30) легко разложить в степенной ряд по величине  $\alpha = a\sqrt{f}$  и проинтегрировать. Опуская промежуточные простые выкладки, сразу же запишем ряд для  $J$

$$J = 2\sqrt{f} \left( a + \frac{a^3}{9}f + \frac{a^5}{25}f^2 + \frac{a^7}{49}f^3 + \frac{a^9}{81}f^4 + \dots \right). \quad (31)$$

Заменяя в (31)  $a$  на  $b$  и далее вычисляя  $R(f)$  по формуле (27), получим окончательно следующее представление для „идеальной“ функции  $R(f)$ , обеспечивающей идеальную фокусировку по углу  $\theta$ :

$$\gamma = R(f) = \frac{\sqrt{f}}{\pi} \left[ (a-b) + \frac{a^3-b^3}{9}f + \frac{a^5-b^5}{25}f^2 + \frac{a^7-b^7}{49}f^3 + \frac{a^9-b^9}{81}f^4 + \dots \right]. \quad (32)$$

Если  $a < 1$  и  $b < 1$ , то ряд (32) весьма быстро сходится в области  $0 < f < 1$  и вполне пригоден как для вычисления функции  $R(f)$ , так и для обратной  $f(\gamma)$ .

Так или иначе, авторы показали, что существует двухпараметрическое семейство потенциалов, однородной кратности  $n = -2$  (с параметрами  $a$  и  $b$ ), обеспечивающих идеальную угловую фокусировку по углу  $\theta$  в плоскости симметрии. Действуя нашими методами восстановления подобных структур в пространстве [7], можно полностью описать комплексный потенциал этих замечательных структур. Заметим, что принцип подобия дает идеальную фокусировку при любых энергиях  $W$ .

## Применение теоремы Гурса

Можно осуществить и принципиально иной подход к синтезу спектрографических сред с идеальной фокусировкой на идеях, совершенно не похожих на предыдущие. Этот подход основан на применении теоремы Гурса, который давно и успешно применяется в нашей лаборатории. Суть теоремы Гурса сводится к следующему. Если уравнение Гамильтона–Якоби для

плоскости подвергнуть конформному преобразованию вместе с изоэнергетическим семейством траекторий, то получится уравнение, которое можно трактовать физически как новое уравнение Гамильтона–Якоби, но с нулевой полной энергией  $E^* = 0$  и новым потенциалом  $\Phi(u, v)$ . Математически этот переход выглядит следующим образом. Уравнение Гамильтона–Якоби с потенциалом  $\varphi(x, z)$  для укороченного действия

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = E - \varphi(x, z). \quad (33)$$

Преобразуем к конформным координатам  $u, v$ , порожденным аналитической функцией комплексного переменного

$$\xi = z + ix, \quad (34)$$

$$z + ix = \xi(\omega), \quad \omega = u + iv. \quad (35)$$

Простые вычисления дает уравнение

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial v} \right)^2 \right] = - \left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|^2 \{ \varphi[x(u, v), z(u, v)] - E \}. \quad (36)$$

Новый потенциал при  $E = \text{const}$

$$\Phi(u, v) = - \left| \frac{d\xi}{d\omega} \right|^2 \{ \varphi - E \} \quad (37)$$

можно трактовать как физическую сущность в декартовой плоскости  $u, v$ , которое дает новое семейство траекторий с  $E^* = 0$ , получающееся из старых преобразованием (35). Это малоизвестная теорема Гурса практически никогда не применяется в традиционной электронной оптике, но ее роль может быть очень значительной. В частности, имея всего одну систему с идеальной фокусировкой, таким способом можно превратить в бесконечное множество таких идеальных систем, электронно-оптические свойства которых будут управляться выбором аналитической функции  $\xi(\omega)$  при сохранении идеальной фокусировки.

На кафедре физической электроники был реализован энергоанализатор „Тутанхамон“ с идеальной фокусировкой [5], ход потенциала которого в плоскости симметрии задавался как

$$f(x) = \text{th}^2 \pi x. \quad (38)$$

Покажем, что любое двумерное поле, с ходом потенциала в средней плоскости  $f(x)$  легко превратить в спектрографическую среду с помощью теоремы Гурса. Действительно, имеем

$$\frac{S_x^2 + S_z^2}{2} = E - f(x). \quad (39)$$

Положим

$$\xi = z + ix = \ln \omega = \ln \sqrt{u^2 + v^2} - i \text{arctg} \frac{v}{u}. \quad (40)$$

Из (36) получим

$$\frac{S_u^2 + S_v^2}{2} = -\frac{1}{u^2 + v^2} \left[ f \left( \arctg \frac{v}{u} \right) - E \right]. \quad (41)$$

Если переобозначить для удобства оси, вернувшись к старым обозначениям  $x, z$ , то  $\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{x^2 + z^2} = r$ ,  $\arctg(v/u) = \arctg(x/z) = \gamma$ . Таким образом, представление (41) в привычной форме примет вид

$$\frac{S_x^2 + S_z^2}{2} = -\frac{1}{r^2} [f(\gamma) - E], \quad (42)$$

а это есть однородная спектрографическая среда кратности  $n = -2$  при любом выборе функции  $f(x)$ . На основании выше изложенного можно сформулировать следующие утверждения.

**Теорема 1.** Преобразование Гурса для всех одномерных потенциальных полей с логарифмической функцией в качестве базовой порождает класс однородных по Эйлеру полей кратности  $n = -2$ .

**Следствие 1.** Применим теорему к потенциалу „Тунхамона“ (38), получим „спектрографический“ однородный потенциал с идеальной угловой фокусировкой при  $E = W = 1$

$$\Phi = \frac{1}{r^2} [\operatorname{th}^2 \pi \gamma - 1] = -\frac{1}{r^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \pi \gamma}. \quad (43)$$

## Синтез идеальных сред с логарифмической особенностью

В работе [9] была решена задача построения класса скрещенных полей с потенциалом вида

$$\varphi = kz + f(x), \quad (44)$$

обладающих при любом  $k$  идеальной фокусировкой. При  $k = 0$ , очевидно, должен получиться потенциал (38). Способом приведения к уравнению Абеля, подобным вышеизложенному, можно построить в неявной форме класс потенциалов  $f(x)$  посредством уравнения

$$x = \frac{1}{k\pi} \left\{ \sqrt{f(1+k)} - \sqrt{f} + \frac{1+k-f}{2} \right. \\ \left. \times \ln \frac{\sqrt{1+k} + \sqrt{f}}{\sqrt{1+k} - \sqrt{f}} - \frac{1-f}{2} \ln \frac{1+\sqrt{f}}{1-\sqrt{f}} \right\}, \quad k \neq 0. \quad (45)$$

Применим к (44) теорему Гурса, взяв преобразование (40). Очевидно, получим потенциал

$$\Phi = \frac{1}{u^2 + v^2} \left\{ k \ln \sqrt{u^2 + v^2} + f \left( \arctg \frac{v}{u} \right) \right\}. \quad (46)$$

Получили спектрографическую среду с логарифмической особенностью, которая, как мы доказали в работе [4], подчиняется обобщенному принципу подобия. Если брать  $f(x)$  из класса (45), то получим однопараметрическое семейство таких сред с идеальной фокусировкой. Итак, доказана еще одна теорема.

**Теорема 2.** Преобразование Гурса с логарифмической функцией  $\xi = \ln \omega$ , примененное к классу скрещенных полей с потенциалом  $\varphi = kz + f(x)$ , порождает новый класс спектрографических сред с логарифмической особенностью.

## Заключение

Мы применили два подхода к решению поставленной задачи — поиску спектрографических сред с идеальной фокусировкой по углу в плоскости симметрии. Оба способа рожают многообразные структуры, поскольку допустимы вариации в ходе самого аналитического решения. Полученные примеры спектрографических сред относятся к двум классам — с потенциалами, однородными по Эйлеру, и однородными потенциалами с логарифмической особенностью. Структуры из обоих классов могут служить весьма перспективной базой для создания светосильных спектрографов.

## Список литературы

- [1] Frank H. Read // Rev. Sci. Instrum. 2002. Vol. 73. N 3. P. 1129.
- [2] Cizmar P., Müllerová I., Jacka M., Pratt A. // Rev. Sci. Instrum. 2007. Vol. 78. P. 053 714.
- [3] Овсянникова Л.П., Фишкова Т.Я. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 133–135.
- [4] Голиков Ю.К., Краснова Н.К. // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5–11.
- [5] Голиков Ю.К., Уткин К.Г., Григорьев Д.В. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 9. С. 128–132.
- [6] Голиков Ю.К., Косячков А.А., Черепин В.Т. Энергомассоанализатор. А. с. 1 265 890 СССР. Заявл. 02.01.85. Оpubл. 23.10.86. Бюл. № 39.
- [7] Голиков Ю.К., Краснова Н.К. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 2. С. 9–15.
- [8] Голиков Ю. К., Краснова Н.К. Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 409 с.
- [9] Голиков Ю.К. Энергоанализирующие свойства электростатических полей с плоскостью симметрии. Автореф. Канд. дис. Л.: ЛПИ, 1977. 105 с.