Журнал технической физики, 2012, том 82, вып. 6

01;03

О структуре волн на заряженной границе раздела вязких жидкостей, лежащих на твердом дне

© А.В. Климов, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
email: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 11 октября 2011 г.)

В двухслойной системе несмешивающихся вязких жидкостей для волнового движения найдены решения в первом порядке теории приближений. Определены гидродинамические потенциалы, функции тока, образующая формы и электростатический потенциал заряженной границы раздела двух вязких жидкостей, одна их которых электропроводная, а другая диэлектрическая, на твердом дне. Показано, что в случае, когда плотность верхней среды на три и более порядка меньше плотности нижней среды, или в случае, когда величина кинематической вязкости верхней среды пренебрежимо мала в сравнении с аналогичной величиной вязкости нижней среды, влияние верхней среды на движение жидкости в нижней среде пренебрежимо мало. Исследована структура волнового движения, порождаемого границей раздела сред.

Введение

Изучение физических закономерностей реализации гравитационно-капилярно-флуктуационного волнового движения в плоском слое вязкой электропроводной жидкости конечной толщины представляет интерес в связи с многочисленными техническими и технологическими приложениями [1–3]. Ранее было выполнено немало работ, посвященных капиллярно-гравитационному волновому движению в слоях вязкой жидкости [4–7], но весь спектр волнового движения не затрагивался. Тем не менее хорошо известно [1–3], что в области коротких длин волн (короче 10 nm [4]) именно силы флуктуационной природы ответственны за появление волн, которые имеют такой же закон дисперсии как гравитационные волны [1,3]. Силы флуктуационной природы возникают вблизи поверхности твердых тел (твердого дна или твердой стенки) на расстояниях ~ 100 nm и вызывают изменение физико-химических свойств жидкостей [2,8–10]. Вопрос о структуре течений (о закономерностях распределения по толщине слоя вихревой и потенциальной компонент поля скоростей), связанных с периодическим волновым движением свободной поверхности слоя вязкой жидкости конечной толщины, рассматривался в [6]. Выяснилось, что при распространении капиллярно-гравитационной волны по свободной поверхности слоя вязкой жидкости на твердом дне с длиной волны, сравнимой с толщиной слоя, поле скоростей течения жидкости, связанного с волной, имеет сложную структуру. В таком случае вихревое движение концентрируется в малой окрестности свободной поверхности и в малой окрестности твердого дна, потенциальное же течение заполняет весь объем жидкости. В ситуации, когда длина волны много больше толщины слоя жидкости, вихревое движение, порождаемое поверхностной волной, заполняет весь ее объем, причем интенсивность вихревого движения у твердого дна может значительно превышать таковую у свободной поверхности жидкости. Если же толщина слоя много больше длины волны, то вихревое движение концентрируется у свободной поверхности, а в окрестности твердого дна стремится к нулю. Это обстоятельство можно интерпретировать как утверждение, что поверхностная волна не чувствует дна.

Структура течений, связанных с периодическим волновым движением на границе раздела несмешивающихся вязких жидкостей, рассматривалась в работе [7]. Выяснилось, что вихревое движение концентрируется в малых окрестностях поверхности раздела по обе ее стороны, в слоях с толщинами порядка десятых (в зависимости от вязкости жидкости) долей длины волны. Оказалось также, что в окрестности поверхности раздела при переходе через нее величины роторов полей скоростей претерпевают разрыв. Структура гравитационно-капиллярно-флуктуационного волнового движения должна подчиняться таким же закономерностям. Оно отличается от капиллярно-гравитационного только тем, что собственно капиллярное волновое движение с присущим ему законом дисперсии $\omega \propto k\omega \propto k^{3/2}$ ограничено как со стороны длинных волн, так и со стороны коротких волновым движением с законом дисперсии $\omega \propto \sqrt{k}$, где ω — частота волны, k — ее волновое число [1,3,11].

В [1,3,11] рассмотрены особенности волнового движения в тонких слоях жидкости (с толщинами $h \leq 100$ nm), когда становится существенным влияние поля флуктуационных сил [8–10]. Значимым результатом расчетов линейного приближения является то, что в дисперсионном уравнении компоненты, порожденные действием гравитационных и флуктуационных сил, одинаковым образом зависят от волнового числа и входят в него в виде суммы. В нелинейных расчетах получено, что волновые движения жидкости, появляющиеся в результате нелинейного взаимодействия как поправки к волнам, заданным в начальный момент времени, выталкиваются полем флуктуационных сил на периферию области влияния последних. Величина же нелинейных поправок к амплитуде волны зависит от электрического поля у свободной поверхности жидкости: при наличии электрического поля нелинейные эффекты приводят к увеличению кривизны вершин поля, а в отсутствие поля к снижению их кривизны.

В настоящей работе предлагается обратить внимание на то обстоятельство, что твердое дно, создавая в жидкости поле флуктуационных сил, модифицирует свойства жидкости в прилегающем к дну тонком слое толщиной $\sim 100\,\mathrm{nm}$, проходящей по границе действия короткодействующих флуктуационных сил [8–10]. Деформация такой границы будет приводить к возникновению внутреннего волнового движения в жидкости. Исследованию особенностей такого волнового движения и посвящена настоящая работа.

Следует отдавать себе отчет, что на практике гравитационно-капиллярно-флуктуационные волны не реализуются и мы имеет дело либо с гравитационно-капиллярными, либо с капиллярно-флуктуационными волнами. Однако их удобно рассматривать вместе как отдельные ветви сплошного спектра гравитационно-капиллярно-флуктуационного волнового движения.

1. Формулировка задачи

Пусть имеются две вязкие несжимаемые жидкости. Одна из жидкостей с плотностью ρ_1 и вязкостью ν_1 заполняет в поле сил тяжести бесконечный по протяженности слой, описываемый геометрическим местом точек $-d \le z \le 0$, где d — толщина слоя. Слой первой жидкости покоится на твердом дне. Вторая жидкость с плотностью ρ_2 и вязкостью ν_2 заполняет полупространство $z > 0$ над слоем первой жидкости. Рассмотрение ведется в декартовой системе координат, где ось z направлена против направления ускорения поля силы тяжести $\mathbf{e}_z \parallel -\mathbf{g}$, а ось x — по направлению движения плоской волны $\sim \exp(st - ikx)$ (здесь $\mathbf{e}_z$ — орт оси z, s — комплексная частота волны, k — волновое число, t — время, i — мнимая единица).

Верхнюю жидкость будем считать диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, а нижнюю — идеальным проводником. Граница раздела сред характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения γ. Примем, что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной границей сред, по которой однородно распределен электрический заряд так, что в верхней жидкости в отсутствие деформации границы раздела существует однородное электростатическое поле $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{e}_z$.

Согласно существующим представлениям, молекулы жидкости, находящиеся вблизи твердой стерки, ограничены в подвижности и испытывают упорядочивающее действие со стороны стенки, а дипольные молекулы еще и ориентирующее действие [8,12]. Так, экспериментальные исследования [2,8,12] показывают, что в тонких слоях воды с толщиной $\sim 100\,\mathrm{nm}$ влияние твердой стенки приводит к увеличению ее вязкости (примерно в 1.5–2 раза), плотности (примерно на 2%) и снижению статической диэлектрической проницаемости (примерно в 3 раза). Причиной указанного изменения физических свойств с наибольшей вероятностью является изменение структуры воды (изменение системы водородных связей), которая вблизи твердой стенки становится более упорядоченной. К таким же результатам приводят и численные модельные эксперименты.

Вернемся теперь к модифицированному тонкому слою жидкости у твердой стенки, молекулы которого упорядочены и имеют преимущественную ориентацию вследствие взаимодействия со стенкой. Плотность и вязкость жидкости в пристеночном слое превышают таковые в объеме жидкости вдали от стенки [2,8,12]. Те же механизмы, которые обусловливают формирование диффузионного двойного электрического слоя у свободной поверхности жидкости, будут действовать и в пристеночном слое. Таким образом, есть основания полагать, что пристеночный слой жидкости отделен от основного ее объема некоторой границей с отличным от нуля коэффициентом межфазного натяжения [8,12]. Особенностью жидкости в пристеночном слое является то, что она находится в поле флуктуационных сил, порождаемых стенкой. Поэтому возможное волновое движение в пристеночном слое жидкости, возбуждаемое межфазной границей, будет реализовываться при определяющем влиянии флуктуационных сил.

Сказанное означает, что со стороны твердого дна на каждую жидкую частицу в слое действуют флуктуационные силы, сильно зависящие от расстояния. Для качественных оценок примем, что они обратно пропорциональны расстоянию l в третьей степени между данной жидкой частицей и твердым дном, что для слоя жидкости толщиной d можно записать в виде [1–3,8–10,12]: $F \propto l^{-3}$.

Давление флуктуационных сил на возмущенную капиллярным волновым движением границу раздела сред $z = \xi(x, t)$ определится как [1–3,8–10,12]: $p_f = A\left[6\pi(d+\xi)^3\right]^{-1}$. В реальности показатель степени „3“ в выписанном выражении зависит от расстояния и с его увеличением изменяется от трех до четырех [8,12]. Коэффициент пропорциональности A, имеющий размерность энергии, для слоя жидкости, находящегося на поверхности твердого тела, примем для нижеследующих качественных оценок равным $10^{-13}\,\mathrm{erg}$. (Согласно [8], значение константы A для воды, контактирующей с кварцем, равно $1.12 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{erg}$, а для воды, контактирующей со слюдой, — $1.53 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{erg}$).

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ поверхность границы раздела жидкостей деформируется плоской капиллярно-гравитационной волной $\xi(x, t) = \xi_0 \exp(st - ikx)$, амплитуда ξ_0 которой по модулю много меньше капиллярной постоянной нижней жидкости: $|\xi_0| \ll \alpha_1 \equiv \sqrt{\gamma/(gp_1)}$ (в общем случае амплитуда ξ_0 полагается комплексной). Поля скоростей течений жидкости в нижней и верхней средах, связанные с бегущей волной, обозначим соответственно $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r},t)$.

Положим, что поля скоростей $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r},t)$ в безразмерных переменных (например, в таких, где $\rho_1=\gamma=g+\kappa=1$, где $\kappa\equiv A/2\pi\rho_1 d^4$ — флуктуационный параметр) имеют тот же порядок малости, что и безразмерная амплитуда, которая является малым параметром задачи. За всеми безразмерными величинами оставляем прежние обозначения. Зададимся целью исследовать структуру поля скоростей волнового течения в нижней и верхней средах.

Математическая формулировка задачи, описывающая движение жидкости в анализируемой системе, в безразмерных переменных таких, что $\rho_1=\gamma=g+\kappa=1$, имеет вид

$$z>\xi:\qquad \frac{d\mathbf{U}^{(2)}}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla P_2+\nu_2\Delta\mathbf{U}^{(2)}-\nabla z,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(2)})=0,\quad \Delta\Phi=0,$$

$$-d<z<\xi:\qquad \frac{d(\mathbf{U}^{(1)})}{dt}=-\nabla P_1+\nu_1\Delta\mathbf{U}^{(1)}-\nabla z,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(1)})=0,$$

$$z=\xi:\qquad \frac{dF}{dt}=0,\quad F(x,z,t)=z-\xi(x,t),$$

$$U_x^{(1)}=U_x^{(2)},\quad U_z^{(1)}=U_z^{(2)},$$

$$\nu_1\left[\boldsymbol{\tau},(\mathbf{n},\nabla)\mathbf{U}^{(1)}+\mathbf{n},(\boldsymbol{\tau},\nabla)\mathbf{U}^{(1)}\right]$$
$$=\rho\nu_2\left(\boldsymbol{\tau},(\mathbf{n},\nabla)\mathbf{U}^{(2)}+\mathbf{n},(\boldsymbol{\tau},\nabla)\mathbf{U}^{(2)}\right),$$

$$-(P_1-P_2)+2\left(\nu_1\mathbf{n},(\mathbf{n},\nabla))\mathbf{U}^{(1)}-\rho\nu_2\mathbf{n},(\mathbf{n},\nabla)\mathbf{U}^{(2)}\right)$$
$$-P_e+P_\gamma=0,\quad \Phi=\mathrm{const},$$

$$z\to\infty:\qquad \nabla\Phi\to-E_0\mathbf{e}_z,\quad \mathbf{U}^{(2)}\to 0,$$

$$z=-d:\qquad \mathbf{U}^{(1)}=0,$$

$$t=0:\qquad \xi=\xi_0\exp(ikx)+\text{c.c.},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — орты касательной и нормали к границе раздела сред; $\rho\equiv\rho_2/\rho_1\le 1$; $P_1=P_1(\mathbf{r},t)$ и $P_2=P_2(\mathbf{r},t)$ — гидродинамическое давление в нижней и верхней жидкости соответственно; $\Phi=\Phi(\mathbf{r},t)$ — электростатический потенциал; P_e и P_γ — давление на поверхность раздела электрических сил и сил поверхностного натяжения соответственно, где

$$P_e=P_e(\mathbf{r},t)=\frac{\varepsilon_*}{8\pi}(\nabla\Phi)^2,$$

$$P_\gamma=P_\gamma(x,t)=-\frac{\partial^2\xi/\partial x^2}{[1+(\partial\xi/\partial x)^2]^{3/2}}.$$

Аббревиатура c.c. в вышеприведенном условии при $t=0$ и далее по тексту означает комплексно сопряженное слагаемое.

Поскольку сформулированная эволюционная задача характеризуется производными по времени второго порядка (производные по времени входят в уравнения Навье–Стокса и в кинематическое граничное условие), то должны быть заданы два начальных условия, а не одно. Помимо формы деформации поверхности раздела в начальный момент времени нужно задать еще и профиль поля скоростей при $t=0$. Однако в нижеследующих построениях в качестве второго начального условия использовано требование обращения в нуль начальной фазы волновой деформации. Это позволяет получить менее громоздкие финальные выражения для искомых полей скоростей волнового течения в нижней и верхней жидкостях. Удовлетворение требованию обращения в нуль начальной фазы волновой деформации обеспечивается ограничением области допустимых значений комплексной амплитуды ξ_0 областью вещественных неотрицательных значений.

После линеаризации и снесения граничных условий на невозмущенную поверхность раздела сред математическая формулировка задачи примет вид

$$z>0:\qquad \frac{\partial\mathbf{U}^{(2)}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla P_2+\nu_2\Delta\mathbf{U}^{(2)}-\nabla z,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(2)})=0,\tag{1}$$

$$\Delta\phi_*=0,\tag{2}$$

$$-d<z<0:\qquad \frac{\partial\mathbf{U}^{(1)}}{\partial t}=-\nabla P_1+\nu_1\Delta(\mathbf{U})^{(\mathbf{1})}-\nabla\mathbf{z},$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{(1)})=0,\tag{3}$$

$$z=0:\qquad -\frac{\partial\xi}{\partial t}+U_2^{(1)}=0,$$

$$U_x^{(1)}=U_x^{(2)};\quad U_z^{(1)}=U_z^{(2)},\tag{4}$$

$$\nu_1\left(\frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial U_x^{(1)}}{\partial z}\right)=\rho\nu_2\left(\frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial U_x^{(2)}}{\partial z}\right),\tag{5}$$

$$-\left(P_1+\xi\frac{\partial P_1}{\partial z}-P_2-\xi\frac{\partial P_2}{\partial z}\right)$$
$$+2\left(\nu_1\frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial z}-\rho\nu_2\frac{\partial U_z^{(2)}}{\partial z}\right)-P_{e,0}-p_e+p_\gamma=0,\tag{6}$$

$$\phi_*=-\xi\frac{\partial\Phi_0}{\partial z},\tag{7}$$

$$z\to\infty:\qquad \nabla\phi_*\to 0,\tag{8}$$

$$\mathbf{U}^{(2)}\to 0,\tag{9}$$

$$z=-d:\qquad \mathbf{U}^{(1)}=0,\tag{10}$$

$$t=0:\qquad \xi=\xi_0\exp(-ikx)+\text{c.c.},\tag{11}$$

где $\phi_0\equiv-E_0z$ — потенциал электростатического поля над невозмущенной поверхностью раздела сред, $\phi_*=\phi_*(\mathbf{r},t)$ — компонента потенциала электростатического поля, обусловленная деформацией поверхности раздела $z=\xi(x,t)$ (отметим, что $\Phi(\mathbf{r},t) = \phi_0(\mathbf{r},t)+\phi_*(\mathbf{r},t)+O(\varepsilon^2)$), $P_{e,o}$ — величина давления электрических сил на невозмущенную поверхность раздела сред, определяемая по формуле

$$P_{e,0}=\frac{\varepsilon_*}{8\pi}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\right)^2,$$

p_e и p_γ — поправки первого порядка малости к значениям давления на границу раздела сред электрических сил и сил поверхностного натяжения соответственно, вызванные возмущением поверхности раздела ξ:

$$p_e=\frac{\varepsilon_*}{4\pi}\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\frac{\partial\phi_*}{\partial z}\right),\quad p_\gamma=-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

2. Процедура отыскания решения задачи

Двумерность задачи (волновую деформацию формы поверхности раздела сред ξ и поля скоростей $\mathbf{U}^{(1)}$ и $\mathbf{U}^{(2)}$ считаем не зависящими от координаты y) позволяет выполнить разделение полей скоростей на потенциальные и вихревые составляющие на основе теоремы Гельмгольца [13]. Для этого введем скалярные потенциалы поля скоростей $\varphi^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и скалярные функции $\psi(\mathbf{r},t)$ (имеющие тот же смысл, что и функции тока [14], но несколько иначе определенные) для нижней $\varphi^{(2)}(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(2)}(\mathbf{r},t)$ — для верхней жидкостей:

$$\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r},t)=\widehat{\mathbf{N}}_1\varphi^{(1)}(\mathbf{r},t)+\widehat{\mathbf{N}}_2\psi^{(1)}(\mathbf{r},t),$$

$$\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r},t)=\widehat{\mathbf{N}}_1\varphi^{(2)}(\mathbf{r},t)+\widehat{\mathbf{N}}_2\psi^{(2)}(\mathbf{r},t),$$

$$\widehat{\mathbf{N}}_1=\nabla,\quad \widehat{\mathbf{N}}_2=\nabla\times\mathbf{n}_y, \tag{12}$$

где $\mathbf{n}_y$ — орт декартовой координаты y; $\widehat{\mathbf{N}}_1$ и $\widehat{\mathbf{N}}_2$ — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа. Эрмитовый оператор $\widehat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения, а антиэрмитовый $\widehat{\mathbf{N}}_2$ — вихревую.

Подставив разложение (12) в уравнения (1)–(3) и приняв собственные значения операторов $(\widehat{\mathbf{N}}_1^\dagger,\widehat{\mathbf{N}}_1)$ и $(\widehat{\mathbf{N}}_2^\dagger,\widehat{\mathbf{N}}_2)$ отличными от нуля (где $\widehat{\mathbf{N}}_j^\dagger$ — оператор, эрмитовосопряженный с $\widehat{\mathbf{N}}_j^\dagger$), получим систему скалярных уравнений

$$\frac{\partial\psi^{(j)}}{\partial t}-\nu_j\Delta\psi^{(j)}=0,\quad \Delta\varphi^{(j)}=0,\quad j=1,\ 2$$

$$P_1=-\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}-z,\quad P_2=-\rho\left(\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}+z\right). \tag{13}$$

Подставив разложение (12) в условия (4)–(6), оставив без внимания граничные условия (7) и (8), преобразуем граничные условия для векторных полей скоростей $\mathbf{U}^{(1)}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{U}^{(2)}(\mathbf{r},t)$ (9) и (10) в условия для скалярных функций $\varphi^{(j)}(\mathbf{r},t)$ и $\psi^{(j)}(\mathbf{r},t)$, $j=1,\ 2$.

Условие (9) преобразуется в соотношения

$$z\to\infty:\qquad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z}\to 0,\quad \frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}\to 0.$$

Условие (10) преобразуется в соотношения

$$z=-d:\qquad \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}=0, \tag{14}$$

Граничные условия на поверхности раздела жидкостей (4)–(6) примут вид

$$z=0:\qquad \frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial z}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(1)}}{\partial x}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial\psi^{(2)}}{\partial x}, \tag{16}$$

$$\nu_1\left(2\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial z^2}\right)$$
$$=\rho\nu_2\left(2\frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial z^2}\right), \tag{17}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}+\xi-\rho\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial t}-\rho\xi+2\nu_1\left(\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi^{(1)}}{\partial x\partial z}\right)$$
$$-2\rho\nu_2\left(\frac{\partial^2\varphi^{(2)}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\psi^{(2)}}{\partial x\partial z}\right)-P_{e,0}-p_e+p_\gamma=0. \tag{18}$$

Таким образом, получена система уравнений, представляющих линейную задачу в скаляризованном виде.

3. Вывод дисперсного уравнения

Ограниченные периодические по x решения будем искать в декартовой системе координат в виде

$$\xi(x,t)=a\exp(st-ikx), \tag{19}$$

$$\varphi^{(1)}(x,z,t)=f_1(t)+[B_1\,\mathrm{sh}\,(kz)+B_2\,\mathrm{ch}\,(kz)]\exp(st-ikx), \tag{20}$$

$$\psi^{(1)}(x,z,t)=[B_3\,\mathrm{sh}\,(q_1z)+B_4\,\mathrm{ch}\,(q_1z)]\exp(st-ikx), \tag{21}$$

$$\varphi^{(2)}(x,z,t)=f_2(t)+B_5\exp(-kz)\exp(st-ikx), \tag{22}$$

$$\psi^{(2)}(x,z,t)=B_6\exp(-q_2z)\exp(st-ikx), \tag{23}$$

$$\phi_*(x,z,t)=aE_0\exp(-kz)\exp(st-ikx), \tag{24}$$

$$q_1 = k\sqrt{1+\frac{s}{\nu_1 k^2}}, \quad q_2 = k\sqrt{1+\frac{s}{\nu_2 k^2}}, \quad \operatorname{Re} q_2 > 0,$$

где B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, a, s — в общем случае комплексные величины, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — комплексно-значные функции. Величины a и B_j $(j=\overline{1;6})$ имеют тот же порядок малости, что и амплитуда ξ_0 возмущения границы раздела сред в начальный момент времени, а значения функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — порядка единицы.

Подставим выражения (20), (21) в условия на дне (14) и выразим неизвестные коэффициенты B_3, B_4 через коэффициенты B_1, B_2:

$$B_3 = \frac{i}{q_1}\{-\operatorname{ch}(kd)[kB_2\operatorname{ch}(q_1 d) + q_1 B_1 \operatorname{sh}(q_1 d)] + \operatorname{sh}(kd)[kB_1\operatorname{ch}(q_1 d) + q_1 B_2\operatorname{ch}(q_1 d)]\}, \tag{25}$$

$$B_4 = \frac{i}{q_1}\{\operatorname{sh}(kd)[q_1 B_2\operatorname{ch}(q_1 d) + kB_1 \operatorname{sh}(q_1 d)] - \operatorname{ch}(kd)[q_1 B_1\operatorname{ch}(q_1 d) + kB_2\operatorname{sh}(q_1 d)]\}. \tag{26}$$

После подстановки проектов решений (19)–(23) в граничные условия (15)–(17) последние трансформируются в алгебраические уравнения для определения неизвестных величин a и B_j $(j=\overline{1;6})$:

$$sa = kB_1 - ikB_4, \tag{27}$$

$$-ikB_2 - q_1 B_3 = -ikB_5 + q_2 B_6,$$

$$kB_1 - ikB_4 = -kB_5 - ikB_6, \tag{28}$$

$$\nu_1\left[-2ik^2 B_1 - (k^2+q_1^2)B_4\right] = \rho\nu_2\left[2ik^2 B_5 - (k^2+q_2^2)B_6\right]. \tag{29}$$

Подстановка выражений (19)–(24) в граничное условие (18) и последующее разбиение данного граничного условия на порядки малости дает два других уравнения для определения неизвестных величин A, B_j $(j=\overline{1;6})$ и функций $f_1(t)$ и $f_1(t)$

$$f_1'(t) - \rho f_2'(t) - \frac{\varepsilon_* E_0^2}{8\pi} = 0, \tag{30}$$

$$(s+2\nu_1 k^2)B_2 - 2i\nu_1 k q_1 B_3 - \rho(s+2\nu_2 k^2)B_5 - 2i\rho\nu_2 k q_2 B_6 + \left(1-\rho+k^2-\frac{\varepsilon_* E_0^2}{4\pi}k\right)a = 0. \tag{31}$$

Выражение (30) характеризует баланс гидродинамических давлений со стороны нижней и верхней жидкостей на невозмущенную границу раздела сред (функции f_1 и f_2 не зависят от координат и потому не входят в итоговые выражения для полей скоростей в нижней и верхней жидкостях). Выражение (30) позволяет корректно определить величины невозмущенных компонент гидродинамического давления в нижней и верхней жидкостях. Для этого необходимо зафиксировать величину гидродинамического давления на невозмущенную границу раздела сред со стороны одной из жидкостей, например, таким образом:

$$z = 0: \qquad P_{2,0} = p_0 \equiv \text{const}, \tag{32}$$

где $P_{2,0}$ — невозмущенная компонента гидродинамического давления в верхней жидкости.

В невозмущенном слое выражения для гидродинамических давлений в нижней и верхней жидкостях имеет вид

$$P_{1,0} = -f_1'(t) - z, \quad P_{2,0} = -p[f_2'(t) + z]. \tag{33}$$

Здесь $P_{1,0}$ — невозмущенная компонента гидродинамического давления в нижней жидкости. Подставляя выражения (30) и (32) в выражение (33), получим

$$P_{1,0}(z) = p_0 - \frac{\varepsilon_* E_0^2}{8\pi} - z, \quad P_{2,0}(z) = p_0 - \rho z.$$

Итоговые выражения для величин гидродинамических давлений в нижней и верхней жидкостях имеют вид

$$P_1(x,z,t) = P_{1,0}(z) + p_1(x,z,t),$$

$$P_2(x,z,t) = P_{2,0}(z) + p_2(x,z,t),$$

где p_1 и p_2 — поправки первого порядка малости к значениям гидродинамических давлений в нижней и верхней средах соответственно, обусловленные возмущением поверхности раздела сред ξ. Так как в настоящем исследовании наибольший интерес представляют величины полей скоростей жидкости, а не давлений, величины поправок p_1 и p_2 далее подробно не рассматриваются.

Система алгебраических уравнений (25)–(29) и (31) для определения неизвестных величин a, B_j $(j=\overline{1;6})$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных a и B_j $(j=\overline{1;6})$, равен нулю. Данное требование и дает дисперсионное уравнение для отыскания спектра волн в анализируемой системе. Для записи окончательного вида дисперсионного уравнения введем вспомогательные параметры:

$$\Omega = \frac{\omega_0^2}{\nu_1^2}, \quad \omega_0^2 = k\cdot(1-\rho+k^2-Wk),$$

$$W = \frac{\varepsilon_* E_0^2}{4\pi}, \quad N = \frac{\nu_2}{\nu_1},$$

где ω_0^2 имеет смысл квадрата частоты капиллярно-гравитационной волны в анализируемой системе в предельном случае идеальных (невязких) жидкостей и бесконечной глубины нижней жидкости; параметр W характеризует устойчивость границы раздела сред к давлению. С учетом введенных параметров дисперсионное уравнение для отыскания спектра волн в анализируемой системе имеет вид

$$(k-q_2)\Big\{4k^2q_1(k^2+q_1^2)-q_1\operatorname{ch}(q_1d)$$
$$\times\big[(5k^4+2k^2q_1^2+q_1^4)\operatorname{ch}(kd)+\Omega\operatorname{sh}(kd)\big]+k\operatorname{sh}(q_1d)$$
$$\times\big[\Omega\operatorname{ch}(kd)+(k^4+6k^2q_1^2+q_1^4)\operatorname{sh}(kd)\big]\Big\}$$
$$+\rho\Big(2kq_1\Big[\Omega+(k^2-q_1^2)(3k^2+q_1^2)-2N(3k^2+q_1^2)$$
$$\times(k-q_2)\Big]\big[1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big]-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)$$
$$\times(k^2-q_1^2)^2(k-q_2)+\operatorname{sh}(q_1d)\Big\{(k^2-q_1^2)^2(q_1^2-kq_2)$$
$$\times\operatorname{ch}(kd)+\big[\Omega(k^2+q_1^2)+2k^2(k^2-q_1^2)(k^2+3q_1^2)$$
$$-4Nk^2(k^2+3q_1^2)(k-q_2)\big]\operatorname{sh}(kd)\Big\}\Big)+\rho^2\Big[(k^2-q_1^2)^2$$
$$-4Nk^2(k^2-q_1^2)+4N^2k^3(k-q_2)\Big]\Big\{2kq_1$$
$$\times\big[1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big]+(k^2+q_1^2)\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\Big\}.$$

В ниже приведенном анализе для решения вышеуказанного дисперсионного уравнения используются приближенные (численные) методы, реализованные с помощью компьютерной программы типа Maple.

4. Запись окончательных решений

Решения задачи, удовлетворяющие начальному условию (11), амплитуды которых выражены через ξ_0 — амплитуду начальной волновой деформации, имеют вид

$$\xi(x,t)=\xi_0\exp(st-ikx)+\text{c.c.},$$

$$\varphi^{(1)}(x,z,t)=\big\{\xi_0\big[B_1\operatorname{sh}(kz)+B_2\operatorname{ch}(kz)\big]$$
$$\times\exp(st-ikx)+\text{c.c.}\big\},$$

$$B_1=\frac{s}{k}\frac{1}{\Delta}\big[\nu_1(k^2+q_1^2)\big(k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)-q_1\operatorname{ch}(q_1d)$$
$$\times\operatorname{sh}(kd)\big)-\rho\nu_2\big\{q_1(k+q_2)\big[k\big(1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big)$$
$$+q_1\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big]+k(k-q_2)\big[k\operatorname{sh}(q_d)\operatorname{ch}(kd)$$
$$-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big]\big\}\big].$$

$$B_2=\frac{s}{k}\frac{1}{\Delta}\big(\nu_1\big\{2k^2q_1+(k^2+q_1^2)\big[k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)$$
$$-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big]\big\}-\rho\nu_2\big\{k(k-q_2)$$
$$\times\big[q_1\big(1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big)+k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big]$$
$$+q_1(k+q_2)\big[k\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)-q_1\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big]\big\}\big),$$

$$\psi^1(x,z,t)=\xi_0\left[B_2\operatorname{sh}(q_1z)+B_4\operatorname{ch}(q_1z)\right]$$
$$\times\exp(st-ikx)+\text{c.c.},$$

$$B_3=is\frac{1}{\Delta}\Big(\nu_1\big[k^2+q_1^2-2k^2\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)+2kq_1$$
$$\times\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big]-\rho\nu_2\Big((k-q_2)$$
$$\times\left\{k\big[1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big]+q_1\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\right\}$$
$$+(k+q_2)\left[k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)-q_1\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\right]\Big)\Big)$$

$$B_4=-is\frac{1}{\Delta}\Big(2\nu_1k\big[k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big]$$
$$-\rho\nu_2\Big\{-(k+q_2)\big[q_1\big(1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\big)+k\operatorname{sh}(q_1d)$$
$$\times\operatorname{sh}(kd)\big]+(k-q_2)\big[k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)$$
$$-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big]\Big\}\Big),$$

$$\varphi^{(2)}(x,z,t)=\left\{\xi_0B_5\exp(-kz)\exp(st-ikx)+\text{c.c.},\right\}$$

$$B_5=\frac{s}{k(k-q_2)}\frac{1}{\Delta}\Big(\nu_1\Big[kq_1\left(3k^2+q_1^2\right)\left(1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\right)$$
$$-q_2(k^2-q_1^2)\big[k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big]$$
$$+k^2(k^2+3q_1^2)\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\Big]-\rho\nu_2\left(k^2+q_2^2\right)\Big\{2kq_1$$
$$\times\left[1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\right]+\left(k^2+q_1^2\right)\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\Big\}\Big),$$

$$\psi^{(2)}(x,z,t)=\xi_0B_6\exp(-q_2z)\exp(st-ikx)+\text{c.c.},$$

$$B_6=\frac{is}{k-q_2}\frac{1}{\Delta}\Big\{\nu_1\big(q_1\left(3k^2+q_1^2\right)\left[1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\right]\big)$$
$$-\left(k^2-q_1^2\right)\left[k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\right]$$
$$+k\left(k^2+3q_1^2\right)\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)-2\rho\nu_2k\big\{2kq_1$$
$$\times\left[1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\right]+\left(k^2+q_1^2\right)\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\big\}\Big\},$$

$$\phi_*(x,z,t)=\xi_0E_0\exp(-kz)\exp(st-ikx)+\text{c.c.},$$

$$\Delta=s\left[k\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)-q_1\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\right]-\rho\nu_2(k+q_2)$$
$$\times\left\{2kq_1\left[1-\operatorname{ch}(q_1d)\operatorname{ch}(kd)\right]+\left(k^2+q_1^2\right)\operatorname{sh}(q_1d)\operatorname{sh}(kd)\right\}.$$

Выпишем теперь компоненты векторов $\mathbf{U}^{(1)}(x,z,t)$ и $\mathbf{U}^{(2)}(x,z,t)$ — поле скоростей течения нижней и верхней жидкостей:

$$U_x^{(1)}(x,z,t)=-i\xi_0\Big\{k\big(B_1\operatorname{sh}(kz)+B_2\operatorname{ch}(kz)\big)$$
$$-iq_1\big[B_3\operatorname{ch}(q_1z)+B_4\operatorname{sh}(q_1z)\big]\Big\}\exp(st-ikx)+\text{c.c.},$$

$$U_z^{(1)}(x,z,t)=\xi_0k\Big\{B_1\operatorname{ch}(kz)+B_2\operatorname{sh}(kz)$$
$$-i\left[B_3\operatorname{sh}(q_1z)+B_4\operatorname{ch}(q_1z)\right]\Big\}\exp(st-ikx)+\text{c.c.},$$

$$U_x^{(2)}(x,z,t)=-\xi_0\left[ikB_5\exp(-kz)-q_2B_6\exp(-q_2z)\right]$$
$$\times\exp(st-ikx)+\text{c.c.},$$

$$U_z^{(2)}(x,z,t)=-\xi_0k\left[B_5\exp(-kz)+iB_6\exp(-q_2z)\right]$$
$$\times\exp(st-ikx)+\text{c.c.}$$

5. Анализ полученных результатов

Расчеты показывают, что зависимости от глубины величин компонент поля скоростей U_x и U_z и величины ротора поля скоростей в нижней среде в случае, когда нижней средой является вода, а верхней средой — воздух (при этом $\nu_1=0.002$, $\nu_2=0.03$, $\rho=0.001$), аналогичны зависимостям, приведенным в [6] для капиллярно-гравитационных волн. Воздух практически не оказывает влияния на течение воды в слое. Достаточно очевидно то, что данный факт обусловлен низкой плотностью верхней среды (воздуха). Согласно расчетным данным, верхняя среда практически не оказывает влияния на распределение поля скоростей в нижней среде, когда $\rho \le 0.001$ и $N \equiv \nu_2/\nu_1 \le 15$. В то же время при $\rho > 0.001$ или $N > 15$ влияние верхней среды заметно сказывается на распределении поля скоростей в нижней среде (в большей степени — на интенсивности вихревого движения нижней среды вблизи границы раздела сред, в меньшей степени — на величинах компонент поля скоростей).

Таким образом, при расчетах течений, наблюдаемых в тонких слоях жидкости при волновом движении, при наличии над слоем жидкости верхней среды, плотность которой как минимум на три порядка меньше плотности нижней среды ($\rho \le 0.001$) и кинематическая вязкость которой меньше величины кинематической вязкости нижней среды более чем в 15 раз ($N \le 15$), допускается применять упрощенные математические модели, не учитывающие влияние верхней среды (например, модель, описанную в [6]), а не вышеописанную математическую модель, которая может оказаться сложной для расчета. В то же время при расчетах течений в тонких слоях жидкости при $\rho > 0.001$ или $N > 15$ должны применяться математические модели, учитывающие влияние верхней среды.

Численный анализ описанной выше математической модели показывает, что при наличии над слоем жидкости верхней среды с $\rho > 0.001$ наблюдается уменьшение величины горизонтальной компоненты поля скоростей нижней жидкости в узком слое, прилегающем к границе раздела сред. На рис. 1 приведены зависимости для случая, когда плотности нижней и верхней сред сравнимы друг с другом: $\rho = 0.9$ (ситуация, реализуемая для жидкостной эпитаксии или для стратифицированной по физико-химическим свойствам жидкости [15]). Анализ зависимостей, приведенных на рис. 1 *a* показывает, что величина горизонтальной компоненты поля скоростей в узком слое нижней жидкости, прилегающем к границе раздела сред, стремительно убывает с приближением к границе раздела сред и при $z = 0$ становится близкой к нулю. Толщина вышеуказанного слоя нижней жидкости вблизи границы раздела сред имеет порядок сотых долей длины капиллярно-гравитационной волны. Величина вертикальной компоненты поля скоростей в пределах всего слоя нижней жидкости меняется не столь значительно. Расчеты (рис. 1, *b*) показывают, что в верхней среде также наблюдается уменьшение величины горизонтальной компоненты поля скоростей в узком слое вблизи граница раздела сред. В частности, в случае с $\rho = 0.9$ величина горизонтальной компоненты поля скоростей в указанном слое стремительно убывает с приближением к границе раздела сред и при $z = 0$ близка к нулю. Интенсивность вихревой компоненты течения жидкостей вблизи границ увеличивается, как это видно из рис. 1, *c*. В верхней жидкости она спадает до

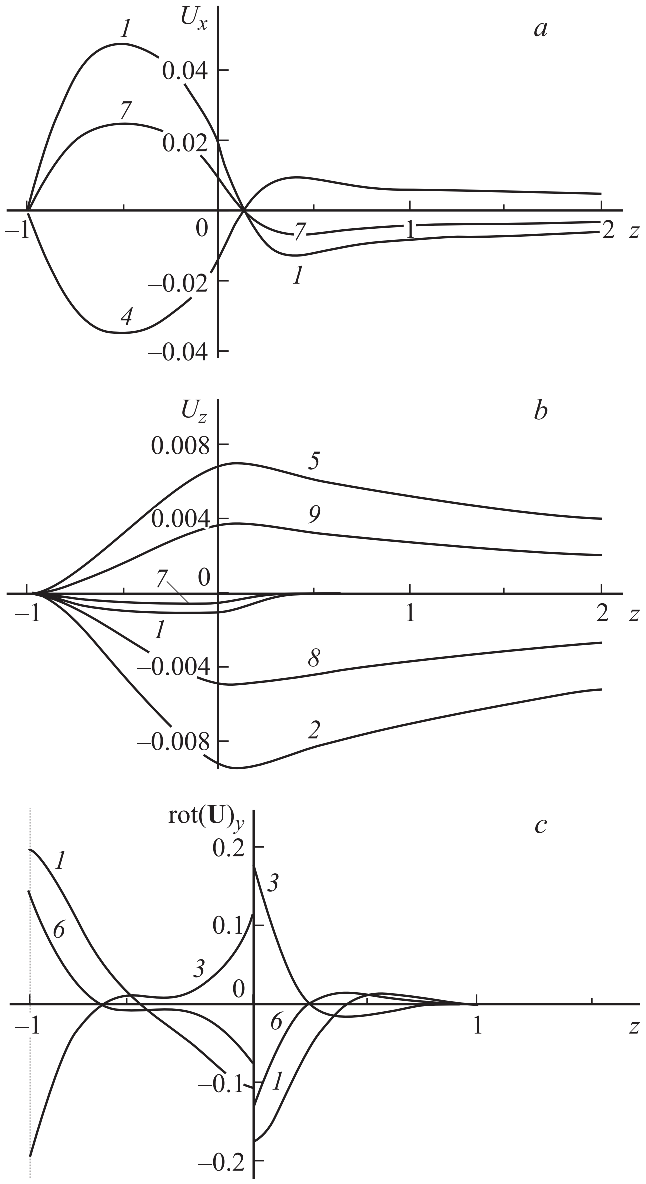

Рис. 1. Зависимости величин компонент поля скоростей U_x (*a*), U_z (*b*), ротора поля скоростей (*c*) течения жидкостей от безразмерной вертикальной координаты (в сечении $x = 0$), рассчитанные при $d = 1$, $W = 0$, $\rho = 0.9$, $\nu_1 = 0.003$, $\nu_2 = 0.002$, $k = 0.3$, $\xi_0 = 0.05$ в различные моменты времени: *1* — $t = 0$; *2* — $t = 0.2T$; *3* — $t = 0.35T$; *4* — $t = 0.5T$; *5* — $t = 0.7T$; *6* — $t = 0.85T$; *7* — $t = T$; *8* — $t = 1.2T$; *9* — $t = 1.7T$. Здесь и далее на последующих рисунках: T — длительность интервала времени, условно называемого периодом волны, величина которой обратно пропорциональна частоте волны $\omega = \mathrm{Im}\, s$ и определяется по формуле $T = 2\pi/omega = 2\pi/(\mathrm{Im}\, s)$.

нуля на расстоянии порядка глубины нижней жидкости. Вихревое движение хотя и охватывает весь нижний слой, как это и должно быть для волн, длина которых сравнима с толщиной слоя, но является малоинтенсивным (рис. 1, *c*). Для сравнения на рис. 2 приведена зависимость от вертикальной координаты ротора поля

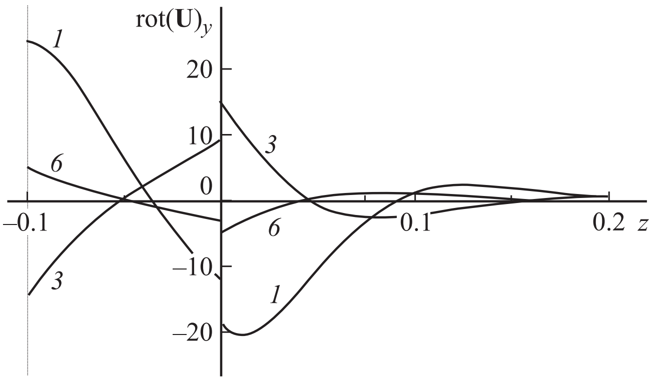

Рис. 2. Зависимости величины ротора поля скоростей течения жидкостей от безразмерной вертикальной координаты (в сечении $x = 0$), рассчитанные при $d = 0.1$, $W = 0$, $\rho = 0.9$, $\nu_1 = 0.003$, $\nu_2 = 0.02$, $k = 3$, $\xi_0 = 0.05$ в различные моменты времени: *1* — $t = 0$.

скоростей, рассчитанная при том же значении $kd = 0.3$, но в десять раз меньшей толщине слоя жидкости и на порядок большей длине волны. Видно, что в этом случае интенсивность ротора на 2 порядка больше.

Отметим, что зависимость на рис. 1 и 2 построены при величине безразмерной кинематической вязкости верхней среды $\nu_2 = 0.002$. Расчеты показывают, что для компонет поля скоростей U_x и U_z нижней среды, экспоненциально затухающих во времени, при увеличении кинематической вязкости верхней среды скорость затухания также увеличивается. Причем увеличение скорости наблюдается не только вблизи границы раздела нижней и верхней сред, но и во всем слое нижней жидкости, включая придонную область. Кроме того, с увеличением кинематической вязкости верхней среды наблюдается более стремительное убывание величины горизонтальной компоненты поля скоростей нижней жидкости в узком слое, прилегающем к границе раздела сред, с приближением к граниче раздела сред. Увеличение кинематической вязкости верхней среды приводит также к увеличению интенсивности вихревого движения нижней среды вблизи границы раздела сред, в то время как вблизи твердого дна в нижней среде заметного изменения величины интенсивности вихревого движения не наблюдается.

С уменьшением величины кинематической вязкости верхней среды все описанные выше эффекты уменьшаются и в пределе при $\nu_2 \to 0$ полностью исчезают. Данный факт обусловлен тем (и расчеты это подтверждают), что верхняя идеальная (невязкая) среда не оказывает какого-либо влияния на поле скоростей нижней вязкой жидкости. На основании данного факта можно сделать следующий вывод: при расчетах течений в слоях вязкой жидкости конечной толщины при наличии над слоем жидкости невязкой верхней среды (или среды с вязкостью пренебрежимо малой в сравнении с вязкостью нижней среды) допускается применять упрощенные математические модели, не учитывающие влияние верхней среды.

На рис. 3 приведены зависимости компонент скорости и ротора, рассчитанные для $k = 3$ и $d = 1$. Видно, что качественно и количественно по сравнению с рис. 1 вид кривых заметно изменился. Для рассматриваемых коротких волн вихревое движение отлично от нуля только вблизи дна и возле границы раздела сред.

Заметим, что зависимости на рис. 3 построены для волны с волновым числом $k = 3$. Расчеты показывают, что с уменьшением длины волны (с увеличением

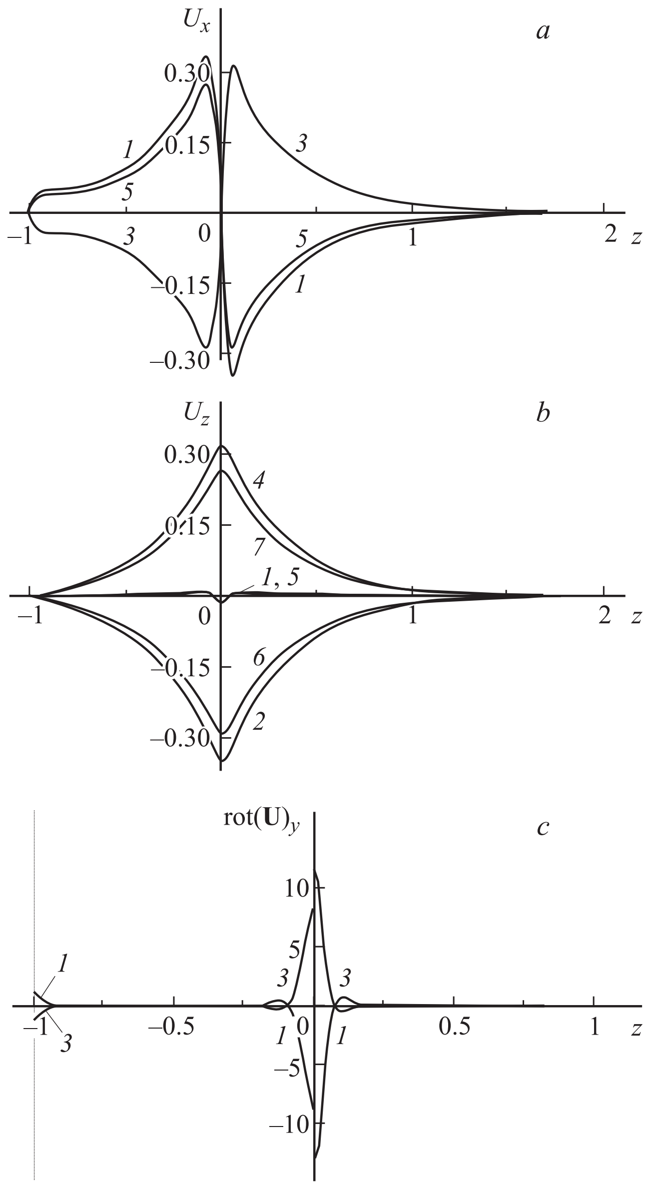

Рис. 3. Зависимости величин компонент поля скоростей U_x (*a*), U_z (*b*), ротора поля скоростей (*c*) течения жидкостей от безразмерной вертикальной координаты (в сечении $x = 0$), рассчитанные при $d = 1$, $W = 0$, $\rho = 0.9$, $\nu_1 = 0.003$, $\nu_2 = 0.002$, $k = 3$, $\xi_0 = 0.05$ в различные моменты времени: *1* — $t = 0$; *2* — $t = 0.25T$; *3* — $t = 0.5T$; *4* — $t = 0.75T$; *5* — $t = T$; *6* — $t = 1.25T$; *7* — $t = 1.75T$.

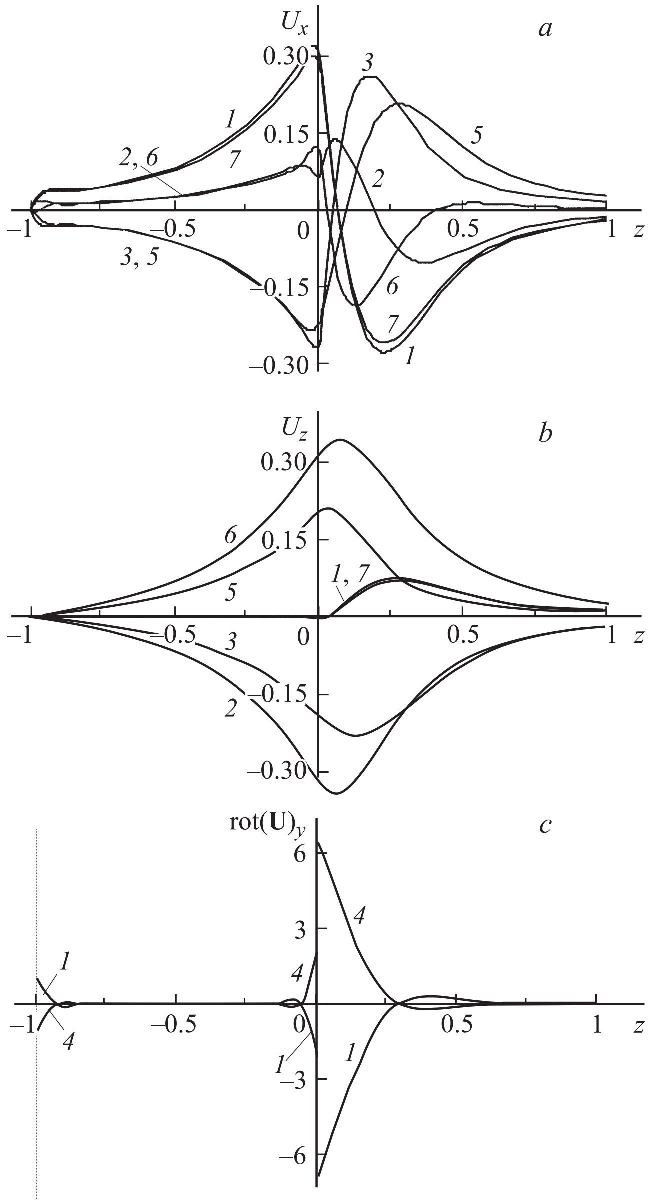

Рис. 4. Величины компонент поля скоростей U_x (a), U_z (b), ротора поля скоростей (c) в нижней (при $z < 0$) и верхней (при $z > 0$) средах в зависимости от безразмерной вертикальной координаты (в сечении $x = 0$), рассчитанные в случае, когда нижней средой является вода ($\nu_1 = 0.002$), а верхней средой — воздух ($\nu_2 = 0.003$) при $d = 1$, $W = 1.99$, $k = 3$, $\xi_0 = 0.05$ в различные моменты времени: *1* — $t = 0$; *2* — $t = T.5$; *3* — $t = 2T/5$; *4* — $t = T/2$; *5* — $t = 3T/5$; *6* — $t = 4T/5$; *7* — $t = T$.

волнового числа) структура поля скоростей в нижней жидкости, обусловленного волной, меняется следующим образом: движение жидкости вблизи дна уменьшается, сосредотачиваясь в основном в узком приповерхностном слое вблизи границы раздела сред; амплитудные значения компонент поля скоростей и ротора поля скоростей вблизи границы раздела сред увеличиваются.

Приведенные на рис. 4 зависимости построены при массовых плотностях, характерных для воды и воздуха, и поверхностной плотности электрического заряда на границе раздела сред, близкой к критической для реализации ее неустойчивости:

$$W \to W_{\mathrm{cr}}, \qquad W_{\mathrm{cr}} = 2\sqrt{1-\rho}$$

(при $\rho = 0.9$ $W_{\mathrm{cr}} \approx 0.6325$). Из сравнения рис. 3 и 4 видно, что при увеличении поверхностной плотности электрического заряда на границе раздела сред формы зависимостей компонент поля скоростей и величины ротора сохраняются.

Заключение

При распространении гравитационно-капиллярно-флуктуационной волны (естественно, в реальности имеем дело либо с гравитационно-капиллярными либо с капиллярно-флуктуационными волнами) по горизонтальной плоской поверхности раздела двух вязких несмешивающихся сред в случае, когда плотность верхней среды на 3 порядка меньше плотности нижней среды, и величина кинематической вязкости верхней среды не превышает величину кинематической вязкости нижней среды существенно больше, чем на порядок (например, в ситуации, когда нижней средой является вода, а верхней средой — воздух), верхняя среда не оказывает влияния на движение жидкости в нижней среде. Данный факт позволяет при расчетах течений в тонких слоях воды при наличии воздуха над слоем применять упрощенные математические модели, не учитывающие влияние верхней среды (например, модель, описанную в работе [6]).

При наличии над слоем жидкости верхней среды с плотностью, сравнимой с плотностью нижней среды, характер волнового движения нижней среды вблизи границы раздела сред существенно отличен от характера волнового движения, когда влияние верхней среды не учитывается. В частности, наблюдается значительное уменьшение величины горизонтальной компоненты поля скоростей вблизи границы раздела сред и движение жидких частиц на границе раздела приобретает сугубо вертикально ориентированный характер.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

[1] *Саночкин Ю.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 24–29.

[2] *Алтоиз Б.А., Кириян С.В., Шатагина Е.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 37–40.

[3] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 6. С. 30–35.

[4] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 21–30.

[5] *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 31–46.

[6] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 51–57.
[7] *Григорьев А.И., Пожарицкий Д.М., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 9. С. 36–42.
[8] *Дерягин Б.В.* Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 205 с.
[9] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкости. М.: Наука, 1975. 592 с.
[10] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2 М.: Наука, 1978. 448 с.
[11] *Климов А.В., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 10. С.14–21.
[12] *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 400 с.
[13] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
[14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд-во ЯрГу, 2010. 180 с.
[15] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 8–17.