

К теории теплообмена касающихся сферических частиц

© С.Н. Дьяконов, Б.В. Рюмшин, Л.В. Котлярова

Орловский государственный университет,
302026 Орел, Россия
e-mail: s.dyakonov@univ-orel.ru, rbv@phys-math.ru

(Поступило в Редакцию 10 сентября 2010 г. В окончательной редакции 18 февраля 2011 г.)

Теоретически рассмотрен установившийся массоперенос химически активной примеси к поверхности неподвижной „гантелевидной“ частицы, которая состоит из двух твердых соприкасающихся неравных реагирующих шаров. Окружающая среда покоится, и численная концентрация реагента вдали от агрегата шаров поддерживается постоянной. Химическая гетерогенная реакция первого порядка протекает с достаточно большой конечной скоростью и считается изотермической. Решение граничной диффузионной задачи описывается осесимметричным уравнением Лапласа в системе тангенциально-сферических координат вращения. Посредством интегрального преобразования Ханкеля нулевого порядка и его свойства из граничных условий для преобразованных функций получается система двух линейных возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Приближенно определяются частные интегралы и средние вспомогательные числа Шервуда. Решение поставленной задачи применяется в различных технологических приложениях, связанных с горением или химическими реакциями на границе раздела между непрерывной и дискретной фазами в дисперсной системе, в области метеорологии, при изучении проблем загрязнения окружающей среды и т.д.

Введение

В реальных дисперсных системах химически реагирующие пузыри, твердые или жидкие частицы имеют различную форму поверхности и находятся друг от друга на произвольных расстояниях. Если эти расстояния будут сравнимы с характерными размерами взаимодействующих капель, то отвод массы или тепла от граничной поверхности каждого тела затрудняется. Эффект стесненной системы нередко оказывает существенное влияние на интенсивность массотеплообмена одиночной частицы, а значит и совокупности частиц как целого. Поэтому значительный интерес представляет изучение влияния формы поверхности и сближения частиц на интенсивность и время их горения, испарения или конденсационного роста. При этом ввиду гидродинамического взаимодействия наиболее вероятными являются парные сближения [1].

Работы [2,3] представляют собой по сути первые попытки описания диффузионного режима испарения двух одинаковых удаленных шаровых капель чистой жидкости, взвешенных в бинарной газовой смеси. В работе [4] построена достаточно полная и более строгая обобщенная теория процесса диффузионного испарения двух крупных неподвижных сферических капель с разными радиусами, находящихся в бинарной газовой смеси на произвольных расстояниях друг от друга. В системе бисферических координат вращения при малых относительных перепадах температуры впервые были получены аналитические выражения для полей температуры и концентрации летучего компонента в окрестности испаряющихся капель; также выведены формулы для оценки суммарных потоков тепла и массы, отводимых от каждой граничной поверхности.

При гетерогенном горении молекулы газообразной среды химически реагируют с молекулами вещества твердой аэрозольной частицы. Гетерогенное горение наблюдается, например, в топках теплоэнергетических установок [5,6], в зонах просветления аэродисперсных систем лазерным излучением [7–9].

В работе [10] получено выражение для скорости высокотемпературного квазистационарного горения одиночной сфероидальной частицы углерода, когда коэффициенты молекулярного переноса компонентов внешней газовой смеси предполагаются постоянными. Авторы [11] теоретически исследовали квазистационарное свободное и осложненное внутренним тепловыделением гетерогенное горение одиночного тела сферической, сфероидальной и эллипсоидальной формы, а также двух взаимодействующих неподвижных шаровых частиц. Изучался диффузионный режим быстро протекающей гетерогенной реакции, когда концентрация молекул окислителя вблизи граничной поверхности считается равной нулю. Квазистационарное аналитическое решение было проведено при значительных перепадах температуры в окрестности частиц для произвольной температурной зависимости коэффициентов молекулярного переноса газовых компонентов. В предельных случаях исчезающе малых чисел Пекле обнаруживаются характерные особенности [4,11]. При одинаковых объемах заметно быстрее сгорают сильно вытянутые и сплюснутые частицы. Сближение частиц существенно сказывается на времени сгорания меньшей частицы, когда ее размеры много меньше размеров более крупной. Процесс свободного горения или испарения (внутренние источники тепла отсутствуют и следующее закону Стефана–Больцмана лучеиспускание не влияет на термодиффузионные распределения) идет при одном и том же значении тем-

пературы внутри частицы и на межфазных границах раздела, вне зависимости от их формы и расстояния между летучими частицами.

Теплопередача от двух соприкасающихся сферических тел при малых числах Кнудсена описывается в работе [12]. Затем были сделаны первые попытки построения теории установившегося термофоретического переноса двух твердых нелетучих контактирующих шаров вдоль линии геометрических центров [13–15]. В неоднородно нагретом вязком простом газе рассматривался гидродинамический режим движения со скольжением при исчезающе малых числах Рейнольдса и Пекле. Аналитическое решение граничной тепловой задачи сопряжения для низкотеплопроводного агрегата получено в линейном по малым параметрам приближении. В качестве малых параметров выбраны относительные отклонения коэффициентов удельной теплопроводности частиц от удельной теплопроводности внешней среды.

Одной из главных задач теории внешнего массообмена твердой частицы, капли или пузыря является определение локального (дифференциального) и полного (интегрального) диффузионных потоков растворенного в окружающей жидкости химически активного вещества на поверхность дискретной фазы. Дифференциальный поток характеризует интенсивность массообмена, отнесенного к единице площади реагирующей поверхности в разных ее точках, интегральный — описывает суммарный массообмен частицы с внешней средой. В промышленных условиях скорость гетерогенного катализа на взвешенных каплях или пузырях определяется в значительной мере величиной полного диффузионного притока реагента к поверхности дискретной фазы. Поэтому в различных приложениях обычно применяется безразмерное число Шервуда $Sh \geq 0$, которое представляет собой абсолютную величину среднего значения диффузионного безразмерного потока [16].

Цель данной работы заключается в вычислении вспомогательных чисел Шервуда Sh_1 и Sh_2 при стационарном диффузионном режиме реагирования на поверхности двух касающихся неравных шаров, взвешенных в неподвижной бесконечно протяженной окружающей среде. Эти интегральные характеристики интенсивности внешнего массообмена находятся приближенно в предельном случае, когда скорость гетерогенного физико-химического превращения реагента оказывается существенно больше скорости его диффузионного подвода к межфазной границе.

Постановка задачи

Рассматривается установившийся процесс диффузии в неограниченной изотропной жидкости к поверхности неподвижного „гантелевидного“ тела, состоящего из двух твердых контактирующих шаров с произвольными радиусами R_1 и R_2 . На межфазной границе раздела сред наблюдается химическая изотермическая реакция

первого порядка, протекающая с достаточно большой конечной скоростью $K_W \equiv \text{const}$. Внутри жидкого бинарного раствора реагент является химически нейтральным компонентом с постоянным коэффициентом взаимной диффузии D . Вдали от шаров катализатора пространственное распределение реагирующей примеси поддерживается равномерным с численной концентрацией C_∞ . В точке наблюдения с радиус-вектором $\mathbf{r} = (x, y, z)$ диффундирующий реагент имеет численную концентрацию $C \equiv C(\mathbf{r})$. Молекулы растворителя (водного или неводного) не испытывают физико-химического превращения на поверхности дискретной фазы — поглощение или выделение отсутствует, и плотность полного потока молекул этого сорта на межфазной границе равна нулю: на любой единичной площади реагирующей поверхности чисто диффузионный поток растворителя компенсируется конвективным потоком, связанным с гидродинамическим стефановским течением в окрестности шаров. Относительная доля реагирующей примеси считается исчезающе малой — молекулярный механизм переноса растворенного реагента доминирует по сравнению с его конвективным транспортом. Пространственное распределение реагента описывается уравнением Лапласа подобно случаю неподвижного жидкого раствора.

Применяется сопряженная ортогональная система тангенциально-сферических координат ξ, η, φ вращения: h_ξ, h_η, h_φ — метрические коэффициенты; $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\varphi$ — правая тройка ортов, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta$. Начало системы круговых цилиндрических координат ρ, φ, z располагается в точке контакта шаров, и полярная ось z является линией их геометрических центров. Справедливы соотношения

$$z = \frac{2\eta}{\eta^2 + \xi^2}, \quad \rho = \frac{2\xi}{\eta^2 + \xi^2},$$

$$h \equiv h_\xi = h_\eta = \frac{\xi^2 + \eta^2}{2}, \quad h_\varphi = \frac{1}{\rho},$$

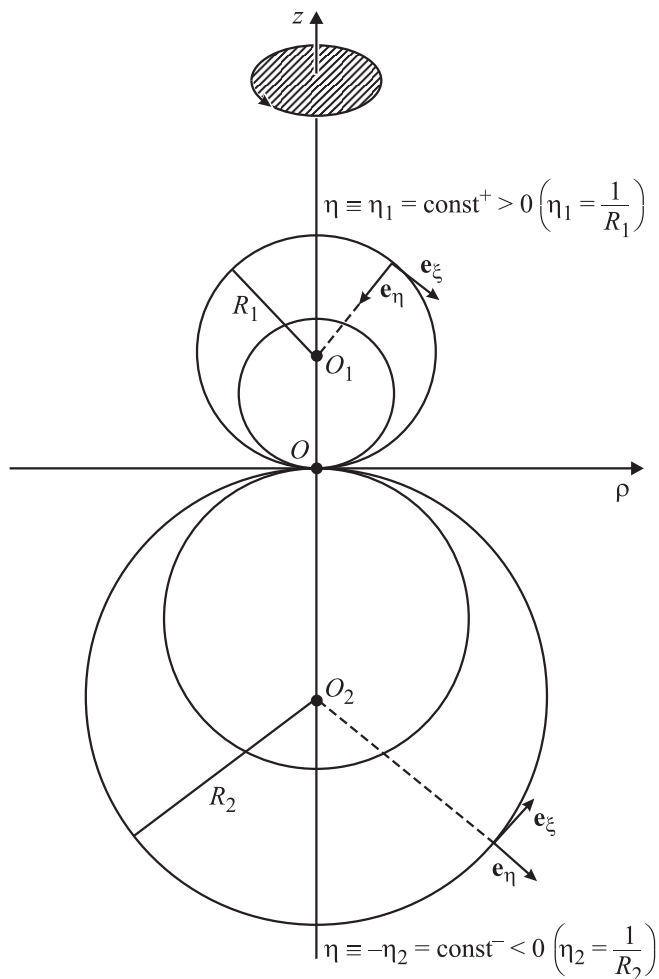
$$-\infty < \xi < +\infty, \quad -\infty < \eta < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Единичные векторы \mathbf{e}_ξ и \mathbf{e}_η являются касательными к координатным линиям ξ и η соответственно, а ориентированы в направлении возрастания ξ и η . Сферические координатные поверхности $\eta \equiv \eta_1 = \text{const}^+ > 0$, $\eta \equiv -\eta_2 = \text{const}^- < 0$ первой и второй частиц имеют радиусы кривизны $R_1 = \eta_1^{-1}$ и $R_2 = \eta_2^{-1}$ соответственно; дифференциальный элемент площади dS_η поверхности $\eta = \text{const}$ представляется в виде [17,18]

$$dS_\eta \equiv \frac{d\xi d\varphi}{h_\xi h_\varphi} = \frac{\rho}{h} d\xi d\varphi = \frac{4\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2} d\xi d\varphi.$$

Интенсивность суммарного массообмена шаровых тел с окружающей жидкостью характеризуется интегралом по поверхности $S = S_1 \cup S_2$

$$I \equiv -D \oint_S \nabla C d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^2 I_i, \quad I_i \equiv -D \oint_{S_i} \nabla G d\mathbf{S}_i.$$



Тангенциально-сферические координаты в меридиональной плоскости.

Пусть в качестве пространственного линейного масштаба выступает половина среднего гармонического радиусов R_1 и R_2

$$R \equiv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\eta_1 + \eta_2} \leq \min\left(R_1 = \frac{1}{\eta_1}, R_2 = \frac{1}{\eta_2}\right).$$

Такое определение характерной длины R обладает преимуществами в особых случаях, когда в газообразной среде взвешены реагирующие контактирующие аэрозольные частицы с существенно различными размерами и исследуется относительное влияние газокинетических эффектов (например, требуется корректный учет пограничных температурных или концентрационных скачков, играющих значительную роль при достаточно большой кривизне межфазной поверхности): $R = \min(R_1, R_2)$ при $R_1 \ll R_2$ или $R_2 \ll R_1$.

После обезразмеривания исходных координат, площади S_i , потока I_i

$$z = Rz', \quad \rho = R\rho', \quad \eta = \frac{\eta'}{R}, \quad \xi = \frac{\xi'}{R},$$

$$S_i = R^2 S'_i, \quad I_i = DC_\infty R I'_i,$$

штрихи сверху опускаются и задача формулируется следующим образом:

$$\Delta\gamma = 0, \quad \gamma = \frac{C_\infty - C}{C_\infty}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial n}\Big|_{S_i} = k_W(\gamma - 1)\Big|_{S_i},$$

$$k_W = -\frac{K_W R}{D} \geq 0; \quad \gamma|_{r \rightarrow \infty} = 0.$$

Здесь γ — степень превращения реагента; k_W — безразмерная константа скорости гетерогенной реакции; $\partial/\partial n \equiv \mathbf{n}\nabla$ — производная в направлении безразмерного единичного вектора \mathbf{n} внешней нормали к поверхности $\eta = \text{const}$: $\mathbf{n} \equiv -\mathbf{e}_\eta$ при $z > 0$, $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_\eta$ при $z < 0$. Линейные осесимметричные дифференциальные операторы ∇ и Δ Гамильтона и Лапласа имеют представления

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_\eta h \frac{\partial}{\partial \eta} + \mathbf{e}_\xi h \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{h^2}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right\}.$$

Без ограничения общности предполагается, что растворенный во внешней среде реагент диффундирует из бесконечно удаленных областей и поглощается на поверхности шаров: степень превращения химически активного вещества удовлетворяет условию $0 \leq \gamma \leq 1$, причем абсолютная величина скорости $K_W \leq 0$ гетерогенной реакции равна количеству реагента, испытавшего физико-химическое превращение на единице площади межфазной границы раздела за единицу времени. Правая часть соотношения на реагирующей поверхности S_i обычно не отражает реальную кинетику каталитического химического превращения и лишь определяет его эффективную скорость. Предельный случай $k_W \rightarrow \infty$ соответствует диффузионному режиму поглощения реагента, когда граничное условие записывается в форме $\gamma|_{S_i} = 1$.

Совершенно аналогичную математическую модель имеет задача о внешнем теплообмене по линейному закону Ньютона двух контактирующих изотермических шаров с одинаковым коэффициентом теплоотдачи $H = \text{const} > 0$ (плотность нормального потока тепла прямо пропорциональна разности температур между граничной поверхностью и окружающей жидкостью с постоянной удельной теплопроводностью χ)

$$\Delta t = 0, \quad t = \frac{T_\infty - T}{T_\infty - T_W};$$

$$\frac{\partial t}{\partial n}\Big|_{S_i} = \chi(t - 1)\Big|_{S_i}, \quad \chi = \frac{HR}{\chi}; \quad t|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

(T, T_∞, T_W — размерные температуры в жидкости, на бесконечности и внутри частиц).

Решение диффузионной задачи

Для любой непрерывной и дважды дифференцируемой на действительной полуоси $\lambda \in (0, \infty)$ безразмерной функции $f(\lambda)$, ограниченной в точке $\lambda = 0$ и быстро убывающей на бесконечности, вводится интегральное преобразование Ханкеля нулевого порядка [17]

$$\mathcal{K}_0[f(\lambda); \xi] \equiv \int_0^{\infty} f(\lambda) J_0(\lambda \xi) \lambda d\lambda, \quad 0 \leq \xi < \infty.$$

Здесь $J_0(\lambda \xi)$ есть цилиндрическая функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

В работах [18,19] приводится общая структура решения объемного уравнения Лапласа в системе тангенциально-сферических координат, когда полученный интеграл на бесконечности $\xi = \eta = 0$ обращается в нуль, а на оси симметрии $\xi = 0$ является регулярным. Так как в данной задаче вдали от реагирующих шаров $\gamma = 0$, то диффузионное возмущение описывается осесимметричным скалярным распределением

$$\begin{aligned} \gamma \equiv \gamma(\xi, \eta) &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \int_0^{\infty} X(\lambda, \eta) J_0(\lambda \xi) d\lambda \\ &\equiv \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \mathcal{K}_0 \left[\frac{X(\lambda, \eta)}{\lambda}; \xi \right], \end{aligned}$$

$$X(\lambda, \eta) = X_+(\lambda) \exp(\eta \lambda) + X_-(\lambda) \exp(-\eta \lambda),$$

где неизвестные функции $X_{\pm} = X_{\pm}(\lambda)$ вычисляются из граничных условий.

Частная производная от степени превращения реагирующей примеси

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial \eta} &\equiv \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \mathcal{K}_0 \left[\frac{X(\lambda, \eta)}{\lambda}; \xi \right] \\ &+ \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \mathcal{K}_0 \left[\lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta}; \xi \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \left\{ \eta \mathcal{K}_0 \left[\frac{X(\lambda, \eta)}{\lambda}; \xi \right] \right. \\ &\left. + (\xi^2 + \eta^2) \mathcal{K}_0 \left[\lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\lambda \eta}; \xi \right] \right\} \end{aligned}$$

представляется с учетом свойства интегрального преобразования Ханкеля [17]

$$\xi^2 \mathcal{K} [f(\lambda); \xi] = -\mathcal{K}_0 \left[\frac{d^2 f(\lambda)}{d\lambda^2} + \lambda^{-1} \frac{df(\lambda)}{d\lambda}; \xi \right].$$

В результате η — составляющая плотности локального (дифференциального) диффузионного потока реагента, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\eta} \nabla \gamma &= \frac{1}{2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \mathcal{K}_0 \left[\lambda^{-1} \left(\eta X(\lambda, \eta) \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta^2 \lambda \right) \left\{ \lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta} \right\}; \xi \right]. \end{aligned}$$

Тогда условия на границе $S = S_1 \cup S_2$ записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 \left[\lambda^{-1} \left(\eta_1 R X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=\eta_1 R} - \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_1^2 R^2 \lambda \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1 R} \right\}; \xi \right] \\ = -2k_w \left\{ \mathcal{K}_0 \left[\lambda^{-1} X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=\eta_1 R}; \xi \right] - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta_1^2 R^2}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 \left[\lambda^{-1} \left(-\eta_2 R X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=-\eta_2 R} - \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_2^2 R^2 \lambda \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-\eta_2 R} \right\}; \xi \right] \\ = +2k_w \left\{ \mathcal{K}_0 \left[\lambda^{-1} X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=-\eta_2 R}; \xi \right] - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta_2^2 R^2}} \right\}, \end{aligned}$$

где неотрицательные значения

$$\eta_1 R \equiv \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad \eta_2 R \equiv \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

определяют безразмерные координатные поверхности сферических частиц.

Так как равенство изображений приводит к равенству функций-оригиналов и справедливо известное тождество Липшица

$$\mathcal{K}_0 \left[\frac{\exp(-|\eta| \lambda)}{\lambda}; \xi \right] \equiv \int_0^{\infty} \exp(-|\eta| \lambda) J_0(\lambda \xi) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

то получают два обыкновенных дифференциальных взаимосвязанных уравнения

$$\begin{aligned} \eta_1 R X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=\eta_1 R} - \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_1^2 R^2 \lambda \right) \\ \times \left\{ \lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1 R} \right\} = -2k_w (X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=\eta_1 R} \\ - \exp(-\eta_1 R \lambda)), \\ \eta_2 R X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=-\eta_2 R} + \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_2^2 R^2 \lambda \right) \\ \times \left\{ \lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-\eta_2 R} \right\} = -2k_w (X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=-\eta_2 R} \\ - \exp(-\eta_2 R \lambda)). \end{aligned}$$

Далее они интегрируются относительно функций

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_1 R} \\ &= X_+(\lambda) \exp(\eta_1 R \lambda) - X_-(\lambda) \exp(-\eta_1 R \lambda), \\ f_2 &\equiv \lambda^{-1} \frac{\partial X(\lambda, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-\eta_2 R} \\ &= X_+(\lambda) \exp(-\eta_2 R \lambda) - X_-(\lambda) \exp(\eta_2 R \lambda), \end{aligned}$$

которые предполагаются ограниченными всюду на полуоси $\lambda \geq 0$. Тогда в силу формул

$$X_+(\lambda) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \lambda} (f_1 \exp(\eta_2 R \lambda) - f_2 \exp(-\eta_1 R \lambda)),$$

$$X_-(\lambda) = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \lambda} (f_1 \exp(-\eta_2 R \lambda) - f_2 \exp(\eta_1 R \lambda))$$

будут справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=\eta_1 R} &= X_+(\lambda) \exp(\eta_1 R \lambda) + X_-(\lambda) \exp(-\eta_1 R \lambda) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} (f_1 \operatorname{ch} \lambda - f_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=-\eta_2 R} &= X_+(\lambda) \exp(-\eta_2 R \lambda) + X_-(\lambda) \exp(\eta_2 R \lambda) \\ &= \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} (f_1 - f_2 \operatorname{ch} \lambda). \end{aligned}$$

Таким образом, зависимые переменные $f_1 \equiv f_1(\lambda)$ и $f_2 \equiv f_2(\lambda)$ удовлетворяют системе двух линейных возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{df_1}{d\lambda} \right) - \eta_1^2 R^2 \lambda f_1 - (\eta_1 R + 2k_W) \frac{f_1 \operatorname{ch} \lambda - f_2}{\operatorname{sh} \lambda} \\ = -2k_W \exp(-\eta_1 R \lambda), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{df_2}{d\lambda} \right) - \eta_2^2 R^2 \lambda f_2 - (\eta_2 R + 2k_W) \frac{f_2 \operatorname{ch} \lambda - f_1}{\operatorname{sh} \lambda} \\ = +2k_W \exp(-\eta_2 R \lambda). \end{aligned} \quad (2)$$

Если в уравнениях (1) и (2) выделяются при старших производных единичные множители, то нерегулярные в начале числовой полуоси $\lambda \geq 0$ переменные коэффициенты $p_i(\lambda)$ при первых производных $df_1/d\lambda$ и $df_2/d\lambda$ обладают в точке $\lambda \equiv 0$ полюсом первого порядка, а коэффициенты $q_{ij}(\lambda)$ при искомым функциях f_1 и f_2 имеют в указанной точке полюс второго порядка ($i, j = 1, 2$). Другими словами, функции $\lambda p_i(\lambda)$ и $\lambda^2 q_{ij}(\lambda)$ разлагаются в ряды Тейлора по целым положительным степеням λ . По-видимому, в этом случае точка $\lambda \equiv 0$ оказывается регулярной особой точкой.

Общие интегралы системы уравнений (1) и (2) относительно искомым функций f_1 и f_2 есть суммы общих решений соответствующей однородной системы и частных решений, обусловленных возмущающими правыми частями со множителем k_W . Для каждой структуры f_1 или f_2 общее решение однородной системы записывается в виде линейной комбинации некоторых функций, зависящих от аргумента λ и безразмерного параметра $k_W \neq 0$. Тогда с физической точки зрения такие линейные комбинации при условии $k_W \equiv 0$ тождественно обращаются в нуль (контактирующие шаровые частицы с внешней средой не реагируют). Указанное требование выполняется, если все постоянные интегрирования как коэффициенты пропорциональности равны нулю одновременно. Следовательно, для каждой структуры f_1

или f_2 фундаментальная система решений однородной системы представляет собой совокупность четырех функций, которые остаются по-прежнему линейно независимыми при значении $k_W \equiv 0$. Другими словами, при условии $k_W \neq 0$ однородная система уравнений допускает исключительно тривиальное решение и требуется найти только частные интегралы системы (1) и (2).

Если на поверхности двух реагирующих шаров химические превращения имеют различные постоянные скорости $K_{W,1}$ и $K_{W,2}$, то в уравнениях (1) и (2) вместо скаляра k_W фигурируют соответствующие безразмерные параметры $k_{W,1} \equiv \text{const}$ и $k_{W,2} \equiv \text{const}$.

Далее строится приближенное решение самосопряженной системы (1) и (2), когда константа k_W считается достаточно большой. В таком важном для практических приложений случае предполагается, что скорость гетерогенной химической реакции существенно велика по сравнению со скоростью объемной диффузии растворенного реагента. Для теоретического анализа предварительно обе стороны каждого уравнения делятся на приведенный параметр $k_W \gg 1$. Формально выполненный предельный переход $k_W \rightarrow \infty$ дает вырожденную форму уравнений (1) и (2) относительно функций $f_{1,0}(\lambda)$ и $f_{2,0}(\lambda)$

$$f_{1,0}(\lambda) \operatorname{cth} \lambda - \frac{f_{2,0}(\lambda)}{\operatorname{sh} \lambda} = \exp(-\eta_1 R \lambda),$$

$$\frac{f_{1,0}(\lambda)}{\operatorname{sh} \lambda} - f_{2,0}(\lambda) \operatorname{cth} \lambda = \exp(-\eta_2 R \lambda).$$

Отсюда следуют асимптотически исчезающие на бесконечности выражения

$$\begin{aligned} f_{1,0}(\lambda) \exp(-\eta_1 R \lambda) &\equiv \exp(-2\eta_1 R \lambda) \operatorname{cth} \lambda - \frac{\exp(-\lambda)}{\operatorname{sh} \lambda} \\ &= \exp(-2\eta_1 R \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \exp(-2n\lambda) + \exp[-2(n+1)\lambda] \} \\ &\quad - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-2(n+1)\lambda], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_{2,0}(\lambda) \exp(-\eta_2 R \lambda) &\equiv -\exp(-2\eta_2 R \lambda) \operatorname{cth} \lambda + \frac{\exp(-\lambda)}{\operatorname{sh} \lambda} \\ &= -\exp(-2\eta_2 R \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \{ \exp(-2n\lambda) + \exp[-2(n+1)\lambda] \} \\ &\quad + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-2(n+1)\lambda], \end{aligned} \quad (4)$$

полученные с учетом равенства $(\eta_1 + \eta_2)R \equiv 1$. Посредством (3) и (4) описывается исключительно полное поглощение реагента на межфазной поверхности (диффузионный режим реагирования). Действительно, вырожденная форма $\gamma|_{S_i} = 1$ заданного граничного условия

дает два интегральных соотношения

$$\mathcal{K}_0 \left[\frac{X(\lambda, \eta)}{\lambda} \Big|_{\eta=\eta_1 R}; \xi \right] \equiv \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta_1^2}},$$

$$\mathcal{K}_0 \left[\frac{X(\lambda, \eta)}{\lambda} \Big|_{\eta=-\eta_2 R}; \xi \right] \equiv \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta_2^2}}.$$

Тогда при помощи тождества Липшица получаются записанные ранее равенства

$$X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=\eta_1 R} \equiv \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} (f_{1,0} \operatorname{ch} \lambda - f_{2,0}) = \exp(-\eta_1 R \lambda),$$

$$X(\lambda, \eta) \Big|_{\eta=-\eta_2 R} \equiv \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} (f_{1,0} - f_{2,0} \operatorname{ch} \lambda) = \exp(-\eta_2 R \lambda).$$

Искомое решение системы (1) и (2) зависит от λ и k_W . Поэтому применяются обозначения $f_1(\lambda; k_W)$ и $f_2(\lambda; k_W)$, где аргумент λ и параметр k_W отделяются друг от друга точкой с запятой. Далее строятся следующие прямые асимптотические разложения по обратным степеням параметра $k_W \gg 1$

$$f_1(\lambda; k_W) = f_{1,0}(\lambda) + \frac{1}{k_W} f_{1,1}(\lambda) + \frac{1}{k_W^2} f_{1,2}(\lambda) + \dots, \quad (5)$$

$$f_2(\lambda; k_W) = f_{2,0}(\lambda) + \frac{1}{k_W} f_{2,1}(\lambda) + \frac{1}{k_W^2} f_{2,2}(\lambda) + \dots. \quad (6)$$

Нулевые члены (3) и (4) всюду ограничены на полуоси $\lambda \geq 0$, так как тождества

$$f_{1,0}(0) \equiv 1 - 2\eta_1 R = -\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2},$$

$$f_{2,0}(0) \equiv -1 + 2\eta_2 R = -\frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2}$$

легко проверяются посредством двух известных формул [17]

$$\frac{\lambda}{\operatorname{sh} \lambda} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2^{2k-1} - 1) B_k}{(2k)!} \lambda^{2k} \equiv 1 - \frac{1}{6} \lambda^2 + \dots,$$

$$\lambda \operatorname{cth} \lambda = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} \lambda^{2k}$$

$$\equiv 1 + \frac{1}{3} \lambda^2 - \frac{1}{45} \lambda^4 + \frac{2}{945} \lambda^6 - \dots,$$

которые записываются в терминах чисел Бернулли $B_k \equiv (-1)^{k+1} \beta_{2k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) при условии $0 \leq \lambda < \pi$.

В левой стороне каждого уравнения системы (1) и (2) после подстановки разложений (5) и (6) производится группировка слагаемых с одинаковыми степенями малого параметра k_W^{-1} . Затем приравняются нулю переменные коэффициенты при различных целых степенях

$k_W^{-(m+1)}$. Тогда функция $f_{1,m} \equiv f_{1,m}(\lambda)$ и $f_{2,m} \equiv f_{2,m}(\lambda)$ находятся из связанных друг с другом соотношений

$$f_{1,m+1} \operatorname{cth} \lambda - \frac{f_{2,m+1}}{\operatorname{sh} \lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \lambda \frac{d^2 f_{1,m}}{d\lambda^2} + \frac{d f_{1,m}}{d\lambda} - \eta_1^2 R^2 \lambda f_{1,m} - \eta_1 R \left(f_{1,m} \operatorname{cth} \lambda - \frac{f_{2,m}}{\operatorname{sh} \lambda} \right) \right\},$$

$$\frac{f_{1,m+1}}{\operatorname{sh} \lambda} - f_{2,m+1} \operatorname{cth} \lambda = -\frac{1}{2} \left\{ \lambda \frac{d^2 f_{2,m}}{d\lambda^2} + \frac{d f_{2,m}}{d\lambda} - \eta_2^2 R^2 \lambda f_{2,m} + \eta_2 R \left(\frac{f_{1,m}}{\operatorname{sh} \lambda} - f_{2,m} \operatorname{cth} \lambda \right) \right\}.$$

Отсюда алгебраически получаются рекуррентные тождества

$$2^{m+1} f_{1,m+1} \equiv \operatorname{cth} \lambda \left\{ (-\eta_1 R)^{m+1} \exp(-\eta_1 R \lambda) + \sum_{j=0}^{j=m} (-\eta_1 R)^j \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_1^2 R^2 \lambda \right) 2^{m-j} f_{1,m-j} \right\} - \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} \left\{ (-\eta_2 R)^{m+1} \exp(-\eta_2 R \lambda) - \sum_{j=0}^{j+m} (-\eta_2 R)^j \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_2^2 R^2 \lambda \right) 2^{m-j} f_{2,m-j} \right\}, \quad (7)$$

$$2^{m+1} f_{2,m+1} \equiv \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} \left\{ (-\eta_1 R)^{m+1} \exp(-\eta_1 R \lambda) + \sum_{j=0}^{j=m} (-\eta_1 R)^j \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_1^2 R^2 \lambda \right) 2^{m-j} f_{1,m-j} \right\} - \operatorname{cth} \lambda \left\{ (-\eta_2 R)^{m+1} \exp(-\eta_2 R \lambda) - \sum_{j=0}^{j+m} (-\eta_2 R)^j \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_2^2 R^2 \lambda \right) 2^{m-j} f_{2,m-j} \right\}, \quad (8)$$

которые путем итераций без принципиальных трудностей дают любое число членов прямых разложений (5) и (6). Если особенности асимптотического поведения функций (7) и (8) вблизи начала числовой полуоси $\lambda \geq 0$ изучаются путем их разложения в ряды Тейлора с точностью до членов порядка $O(\lambda^k)$ включительно, то в разложении каждой структуры (3) и (4) по целым положительным степеням λ удерживается $k + m + 1$ первых слагаемых. В частности, исчезающие на бесконечности

функции

$$2f_{1,1} \equiv \operatorname{cth} \lambda \left\{ -\eta_1 R \exp(-\eta_1 R \lambda) + \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_1^2 R^2 \lambda \right) f_{1,0} \right\} + \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} \left\{ \eta_2 R \exp(-\eta_2 R \lambda) + \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_2^2 R^2 \lambda \right) f_{2,0} \right\} = \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \lambda} \exp(-\eta_1 R \lambda) \times \left\{ \operatorname{ch} \lambda [2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1 - \eta_1 R (\exp(\lambda) \operatorname{sh} \lambda - 2\lambda)] + (2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1)(\eta_1 R \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) - 2\eta_2 R \lambda \operatorname{sh} \lambda \right\} - \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \lambda} \exp(-\eta_2 R \lambda) \left\{ \operatorname{ch} \lambda ((2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1)(\eta_2 R \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) - 2\eta_1 R \lambda \operatorname{sh} \lambda) + 2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1 - \eta_2 R (\exp(\lambda) \operatorname{sh} \lambda - 2\lambda) \right\}, \quad (9)$$

$$2f_{2,1} \equiv \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} \left\{ -\eta_1 R \exp(-\eta_1 R \lambda) + \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_1^2 R^2 \lambda \right) f_{1,0} \right\} + \operatorname{cth} \lambda \left\{ \eta_2 R \exp(-\eta_2 R \lambda) + \left(\lambda \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{d}{d\lambda} - \eta_2^2 R^2 \lambda \right) f_{2,0} \right\} = \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \lambda} \exp(-\eta_1 R \lambda) \times \left\{ 2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1 - \eta_1 R (\exp(\lambda) \operatorname{sh} \lambda - 2\lambda) + \operatorname{ch} \lambda ((2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1)(\eta_1 R \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) - 2\eta_2 R \lambda \operatorname{sh} \lambda) \right\} - \frac{1}{\operatorname{sh}^3 \lambda} \exp(-\eta_2 R \lambda) \left\{ (2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1)(\eta_2 R \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda) - 2\eta_1 R \lambda \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda [2\lambda \operatorname{cth} \lambda - 1 - \eta_2 R (\exp(\lambda) \operatorname{sh} \lambda - 2\lambda)] \right\} \quad (10)$$

являются аналитическими в точке $\lambda \equiv 0$. Действительно, из выражений (9) и (10) после подстановки асимптотических разложений по возрастающим степеням λ

$$f_{1,0}(\lambda) = 1 - 2\eta_1 R + \eta_1 R \lambda + \frac{1}{6}((\eta_2 R)^3 - (\eta_1 R)^3)\lambda^2 + \dots,$$

$$f_{2,0}(\lambda) = -1 + 2\eta_2 R - \eta_2 R \lambda - \frac{1}{6}((\eta_1 R)^3 - (\eta_2 R)^3)\lambda^2 + \dots$$

следует ожидаемый вывод

$$f_{1,1}(0) \equiv 1 - 2\eta_1 R = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2},$$

$$f_{2,1}(0) \equiv -1 + 2\eta_2 R = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.$$

По видимому, другие члены представлений (5) и (6) также будут регулярными в начале числовой полуоси.

Во всяком случае допущение о сходящихся тейлоровских разложениях в окрестности точки $\lambda \equiv 0$ проверяется непосредственно.

Интегральные по приведенной площади $S_i \equiv S_{i\eta} = 4\pi R_i^2 / R^2$ сферической поверхности безразмерные потоки диффундирующего реагента равны

$$I_1 \equiv \oint_{S_1} \nabla \gamma d\mathbf{S}_1 = k_W \oint_{S_{1\eta}} (\gamma - 1)|_{\eta=\eta_1 R} dS_{1\eta} = k_W \left\{ 8\pi \int_0^\infty X(\lambda, \eta)|_{\eta=\eta_1 R} d\lambda \times \int_0^\infty (\xi^2 + \eta_1^2 R^2)^{-3/2} J_0(\lambda \xi) \xi d\xi - S_1 \right\},$$

$$I_2 \equiv \oint_{S_2} \nabla \gamma d\mathbf{S}_2 = k_W \oint_{S_{2\eta}} (\gamma - 1)|_{\eta=-\eta_2 R} dS_{2\eta} = k_W \left\{ 8\pi \int_0^\infty X(\lambda, \eta)|_{\eta=-\eta_2 R} d\lambda \times \int_0^\infty (\xi^2 + \eta_2^2 R^2)^{-3/2} J_0(\lambda \xi) \xi d\xi - S_2 \right\}.$$

Обе части записанного выше тождества Липшица дифференцируются по параметру η . Тогда с учетом очевидного равенства $d|\eta|/d\eta = \eta/|\eta|$ справедлива формула

$$\mathcal{K}_0[\exp(-|\eta|\lambda); \xi] \equiv \int_0^\infty \exp(-|\eta|\lambda) J_0(\lambda \xi) \lambda d\lambda = |\eta|(\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Отсюда следует соотношение

$$|\eta| \mathcal{K}_0[(\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}}; \xi] \equiv |\eta| \int_0^\infty (\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{3}{2}} J_0(\lambda \xi) \xi d\xi = \exp(-|\eta|\lambda),$$

так как интегральное преобразование Ханкеля обратно самому себе. В результате имеем

$$I_1 \equiv 4\pi \frac{k_W}{\eta_1^2 R^2} \times \left\{ 2\eta_1 R \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} (f_1 \operatorname{ch} \lambda - f_2) \exp(-\eta_1 R \lambda) d\lambda - 1 \right\} \leq 0,$$

$$I_2 \equiv 4\pi \frac{k_W}{\eta_2^2 R^2} \times \left\{ 2\eta_2 R \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda} (f_1 - f_2 \operatorname{ch} \lambda) \exp(-\eta_2 R \lambda) d\lambda - 1 \right\} \leq 0.$$

Интенсивность удельного массообмена частиц с окружающей средой в разных точках межфазной реагирующей поверхности определяется посредством локального или дифференциального потока, который зависит от угловой координаты ξ .

В приложениях обычно практический интерес представляют безразмерные положительные коэффициенты массообмена в форме средних вспомогательных чисел Шервуда

$$\begin{aligned} \text{Sh}_1 &\equiv \frac{|I_1|}{S_1} \\ &= k_W \left\{ 1 - 2\eta_1 R \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh } \lambda} (f_1 \text{ch } \lambda - f_2) \exp(-\eta_1 R \lambda) d\lambda \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh}_2 &\equiv \frac{|I_2|}{S_2} \\ &= k_W \left\{ 1 - 2\eta_2 R \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh } \lambda} (f_1 - f_2 \text{ch } \lambda) \exp(-\eta_2 R \lambda) d\lambda \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть при диффузионном режиме гетерогенного реагирования числа Шервуда также допускают разложения по обратным степеням существенно большего параметра $k_W \gg 1$

$$\text{Sh}_i = \text{Sh}_{i,0} + \frac{1}{k_W} \text{Sh}_{i,1} + \frac{1}{k_W^2} \text{Sh}_{i,2} + \dots \quad (13)$$

Предположение о сходимости степенных рядов для чисел Sh_1 и Sh_2 проверяется стандартными способами. Очевидно, что главные значения $\text{Sh}_{1,0} \neq 0$ и $\text{Sh}_{2,0} \neq 0$ можно найти только после определения структуры функциональных членов $f_{1,1}(\lambda)$ и $f_{2,1}(\lambda)$ разложений (5) и (6), так как основные слагаемые (3) и (4) дают естественные тождества

$$\begin{aligned} 2\eta_1 R \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh } \lambda} (f_{1,0} \text{ch } \lambda - f_{2,0}) \exp(-\eta_1 R \lambda) d\lambda \\ \equiv 2\eta_1 R \int_0^\infty \exp(-2\eta_1 R \lambda) d\lambda = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\eta_2 R \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh } \lambda} (f_{1,0} - f_{2,0} \text{ch } \lambda) \exp(-\eta_2 R \lambda) d\lambda \\ \equiv 2\eta_2 R \int_0^\infty \exp(-2\eta_2 R \lambda) d\lambda = 1. \end{aligned}$$

Абсолютные величины средних интегральных размерных потоков реагента для первого и второго шара соответственно равны

$$\frac{DC_\infty}{R} \text{Sh}_1 \equiv \frac{DC_\infty}{R_1} \text{Sh}_1^*, \quad \frac{DC_\infty}{R} \text{Sh}_2 \equiv \frac{DC_\infty}{R_2} \text{Sh}_2^*.$$

Если числа Шервуда Sh_1^* и Sh_2^* разлагаются по обратным степеням параметра $k_W \gg 1$, то формулы (11)–(13) дают скалярные коэффициенты

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{1,m}^* &\equiv -2 \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh } \lambda} (f_{1,m+1} \text{ch } \lambda - f_{2,m+1}) \exp(-\eta_1 R \lambda) d\lambda, \\ \text{Sh}_{2,m}^* &\equiv -2 \int_0^\infty \frac{1}{\text{sh } \lambda} (f_{1,m+1} - f_{2,m+1} \text{ch } \lambda) \exp(-\eta_2 R \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Они вычисляются наиболее просто после предварительного преобразования вида

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left\{ \lambda \frac{d^2 f_{i,m}}{d\lambda^2} + \frac{d f_{i,m}}{d\lambda} \right\} \exp(-\eta_i R \lambda) d\lambda \\ &\equiv \int_0^\infty \exp(-\eta_i R \lambda) \frac{d}{d\lambda} \left(\lambda \frac{d f_{i,m}}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= \left(\lambda \exp(-\eta_i R \lambda) \frac{d f_{i,m}}{d\lambda} \right) \Big|_0^\infty \\ &+ \eta_i R \int_0^\infty \lambda \exp(-\eta_i R \lambda) \frac{d f_{i,m}}{d\lambda} d\lambda \\ &= \left[\lambda \exp(-\eta_i R \lambda) \left(\frac{d f_{i,m}}{d\lambda} + \eta_i R f_{i,m} \right) \right]_0^\infty \\ &+ \eta_i R \int_0^\infty (\eta_i R \lambda - 1) \exp(-\eta_i R \lambda) f_{i,m} d\lambda. \end{aligned}$$

Здесь дважды применяется интегрирование по частям. Если функции $f_{i,m}(\lambda)$ вместе со своими производными являются конечными на числовой полуоси $\lambda \geq 0$, исчезая асимптотически на бесконечности, то с учетом предыдущего выражения для несобственного интеграла получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{1,m}^* &\equiv \frac{1}{2} \{ \eta_1 R \psi_{1,m} - \text{Sh}_{1,m-1}^* \}, \quad \text{Sh}_{1,0}^* \equiv \frac{1}{2} (\eta_1 R \psi_{1,0} + 1), \\ & \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{2,m}^* &\equiv \frac{1}{2} \{ \eta_2 R \psi_{2,m} - \text{Sh}_{2,m-1}^* \}, \quad \text{Sh}_{2,0}^* \equiv \frac{1}{2} (\eta_2 R \psi_{2,0} + 1), \\ & \quad m \geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$

где фигурируют обозначения

$$\psi_{1,m} \equiv 2 \int_0^\infty \exp(-\eta_1 R \lambda) f_{1,m} d\lambda,$$

$$\psi_{2,m} \equiv -2 \int_0^\infty \exp(-\eta_2 R \lambda) f_{2,m} d\lambda, \quad m \geq 0. \quad (16)$$

В частности, для главных значений $Sh_{1,0}^*$ и $Sh_{2,0}^*$ чисел Шервуда в силу (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} \psi_{1,0} &\equiv 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\exp\{-2(n + \eta_1 R)\lambda\} + \exp\{-2(n + 1 + \eta_1 R)\lambda\} \right] d\lambda - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\{-2(n + 1)\lambda\} d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + \eta_1 R} + \frac{1}{n + 1 + \eta_1 R} - \frac{2}{n + 1} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 1 - 2\eta_1 R(n + \eta_1 R)}{(n + \eta_1 R)(n + 1 + \eta_1 R)(n + 1)} = \frac{1}{\eta_1 R(1 + \eta_1 R)} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + \eta_2 R)(n + 1 + \eta_1 R)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\eta_1 R}{(n + 1)(n + 1 + \eta_1 R)}, \\ \psi_{2,0} &\equiv 2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\exp\{-2(n + \eta_2 R)\lambda\} + \exp\{-2(n + 1 + \eta_2 R)\lambda\} \right] d\lambda - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp\{-2(n + 1)\lambda\} d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n + \eta_2 R} + \frac{1}{n + 1 + \eta_2 R} - \frac{2}{n + 1} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 1 - 2\eta_2 R(n + \eta_2 R)}{(n + \eta_2 R)(n + 1 + \eta_2 R)(n + 1)} = \frac{1}{\eta_2 R(1 + \eta_2 R)} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n + \eta_2 R)(n + 1 + \eta_2 R)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\eta_2 R}{(n + 1)(n + 1 + \eta_2 R)}. \end{aligned}$$

Каждый из параметров $\psi_{1,0}$ и $\psi_{2,0}$ представляет собой линейную комбинацию двух числовых рядов, причем их общие неотрицательные члены

$$a_n \equiv \frac{1}{(n + \eta_i R)(n + 1 + \eta_i R)}, \quad b_n \equiv \frac{1}{(n + 1)(n + 1 + \eta_i R)}$$

стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Поэтому необходимый признак сходимости этих бесконечных рядов выполняется. Так как для любого натурального $n \geq 1$ удовлетворяются неравенства $a_n < 1/n^2$ и $b_n < 1/n^2$, то из известной сходимости обобщенного гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ следует сходимость построенных рядов для каждого параметра $\psi_{1,0}$ и $\psi_{2,0}$ согласно признаку сравнения рядов с положительными членами [17]. Таким образом, величины $\psi_{1,0}$ и $\psi_{2,0}$ находятся легко при заданной степени точности.

Анализ результатов

С целью проверки согласия полученных в данной работе результатов с известными выводами для одиночной сферической реагирующей частицы далее анализируются случаи $R_1 \gg R_2$ или $R_2 \geq R_1$. Выбранный пространственный масштаб $R \leq \min(R_1, R_2)$ всегда считается отличным от нуля. Поэтому в условиях данной задачи допускаются только предельные переходы $R_1/R_2 \rightarrow 0$ или $R_2/R_1 \rightarrow 0$ вместо $R_1 \rightarrow 0$ или $R_2 \rightarrow 0$, так как последние дают бесконечно большую площадь каталитической поверхности одиночного реагирующего шара. В предельных ситуациях

$$\begin{aligned} \lim_{R_1/R_2 \rightarrow 0} \eta_1 R &\equiv \lim_{R_1/R_2 \rightarrow 0} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{R_2/R_1 \rightarrow 0} \eta_2 R \\ &\equiv \lim_{R_2/R_1 \rightarrow 0} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 1, \\ \lim_{R_2/R_1 \rightarrow 0} \eta_1 R &\equiv \lim_{R_2/R_1 \rightarrow 0} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \lim_{R_1/R_2 \rightarrow 0} \eta_2 R \\ &\equiv \lim_{R_1/R_2 \rightarrow 0} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0 \end{aligned}$$

производится учет известной суммы числового ряда [17]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} \equiv 1.$$

Тогда посредством предельных значений

$$\begin{aligned} \lim_{\eta_1 R \rightarrow 0} Sh_{1,0}^* &= \lim_{\eta_2 R \rightarrow 0} Sh_{2,0}^* \equiv 1, \\ \lim_{\eta_1 R \rightarrow 1} Sh_{1,0}^* &= \lim_{\eta_2 R \rightarrow 1} Sh_{2,0}^* \equiv 0 \end{aligned}$$

характеризуется в главном приближении интенсивность полного массообмена одиночного шара с окружающей средой, когда гетерогенное реагирование протекает в диффузионном режиме с существенно большой константой $k_W \gg 1$. Последним выводам хорошо согласуются со справочными материалами книги [16].

Заключение

Приближенное решение поставленной задачи определяется формулами (13)–(16), записанными через вспомогательные структуры (3) и (4), (7) и (8). По-видимому, результаты данной работы хорошо дополняют цикл ранее опубликованных статей [12–15, 20, 21]. Полученные выше выражения и представленный в таблице для главного приближения численный анализ применяются, например, когда при достаточно быстром гетерогенном превращении реагента оценивается суммарная интенсивность внешнего конвективного массообмена двух реагирующих соприкасающихся шаров

Результаты численного анализа

$\eta_1 R$	$\eta_2 R$	$\Psi_{1,0}$	$\Psi_{2,0}$	$Sh_{1,0}$	$Sh_{2,0}$
0.05	0.95	19.841259	−.881844	0.996031	0.081124
0.10	0.90	9.693079	−.755689	0.984654	0.159940
0.15	0.85	6.220889	−.620361	0.966567	0.236347
0.20	0.80	4.423648	−.474414	0.942365	0.310234
0.25	0.75	3.300476	−.316043	0.912559	0.381484
0.30	0.70	2.517284	−.142956	0.877593	0.449966
0.35	0.65	1.930568	0.047806	0.837849	0.515537
0.40	0.60	1.468338	0.260140	0.793668	0.578042
0.45	0.55	1.090424	0.499305	0.745345	0.637309
0.50	0.50	0.772589	0.772589	0.693147	0.693147
0.55	0.45	0.499305	1.090424	0.637309	0.745345
0.60	0.40	0.260140	1.468338	0.578042	0.793668
0.65	0.35	0.047806	1.930568	0.515537	0.837849
0.70	0.30	−.142956	2.517284	0.449966	0.877593
0.75	0.25	−.316043	3.300476	0.381484	0.912559
0.80	0.20	−.474414	4.423648	0.310234	0.942365
0.85	0.15	−.620361	6.220889	0.236347	0.966567
0.90	0.10	−.755689	9.693079	0.159940	0.984654
0.95	0.05	−.881844	19.841259	0.081124	0.996031

(твердых или жидких), которые совершают медленное установившееся поступательно-вращательное движение относительно окружающей среды или обтекаются стационарным поступательно-сдвиговым потоком при малых конечных числах Рейнольдса и Пекле. Если химическая изотремическая реакция первого порядка сопровождается выделением или поглощением тепла, то с прикладной точки зрения будет интересным анализ температурных полей вне и внутри агрегата контактирующих сферических теплопроводящих тел (твердых или жидких). Решение такой задачи с постоянными коэффициентами диффузии и теплопроводности, когда граничное условие для баланса тепла записывается с нормальной составляющей локального градиента концентрации реагента, дает относительное влияние различных параметров на термодиффузионные распределения. Средние вспомогательные числа Нуссельта Nu_1 и Nu_2 определяют средние значения плотности теплового потока на поверхности частиц. В частности, для вычисления скорости направленного переноса агрегата двух реагирующих умеренно крупных аэрозолей вдоль линии геометрических центров потребуется учет кинетических эффектов теплового и диффузионного скольжений разреженной газовой среды вдоль межфазной границы раздела [15,20,21].

Основные обозначения

— $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r \equiv |\mathbf{r}|$ — размерный радиус-вектор точки наблюдения и его модуль, м;

— \mathbf{n} — безразмерный единичный вектор внешней нормали на граничной поверхности;

— (ρ, φ, z) — размерные круговые цилиндрические координаты, м, рад, м;

— (ξ, η, φ) , $(h_\xi, h_\eta, h_\varphi)$, $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\varphi)$ — размерные тангенциально-сферические координаты, соответствующие метрические коэффициенты и орты, m^{-1} , m^{-1} , рад; m^{-2} , m^{-1} ; безразмерные;

— $R_1, R_2, R = R_1 R_2 (R_1 + R_2)^{-1}$ — радиусы контактирующих шаровых частиц и пространственный масштаб, м;

— D — коэффициент диффузии реагента в жидкости, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$;

— $K_w, k_w \equiv K_w R / D$ — размерная скорость химической гетерогенной реакции первого порядка и ее безразмерная константа, $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;

— C_∞ — численная концентрация реагента на бесконечности, m^{-3} ;

— $C \equiv C(\mathbf{r})$, $\gamma \equiv (\mathbf{r})$ — численная концентрация и степень превращения реагирующей примеси в произвольной точке внутри жидкости, m^{-3} , безразмерная;

— $J_0(u)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода нулевого порядка, безразмерная.

Список литературы

- [1] Грин Х., Лейн В. Аэрозоли — дымы, пыли и туманы. Л.: Химия, 1972. 426 с.
- [2] Carstens J.C., Williams A., Zung J.T. // J. Atmos. Sci. 1970. Vol. 27. P. 798–809.
- [3] Williams A., Carstens J.C. // J. Atmos. Sci. 1971. Vol. 28. P. 1298–1299.
- [4] Яламов Ю.И., Барина М.Ф., Островский Ю.К., Шукин Е.Р. // ДАН СССР. Физика. 1985. Т. 284. № 2. С. 341–344.
- [5] Основы практической теории горения / Под ред. В.В. Померанцева. Л.: Энергия, 1973. 263 с.
- [6] Вулс Л.А. Тепловой режим горения. М.: Госэнергоиздат, 1954. 281 с.
- [7] Шукин Е.Р., Шулиманова З.Л., Яламов Ю.И. // ФГВ. 1982. № 4. С. 42–44.
- [8] Букатый В.И., Косых О.А., Свердлов М.Ю. // ФГВ. 1985. № 4. С. 51–53.
- [9] Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967. 492 с.
- [10] Головин А.М., Дегтев Ю.Г., Курятников В.В., Песочин В.Р. // ФГВ. 1994. Т. 30. № 1. С. 20–30.
- [11] Шукин Е.Р., Яламов Г.И. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 11. С. 1–4.
- [12] Morrison F.A. (Jr.), Reed L.D. // Trans. ASME. Ser. C.J. Heat Transfer. 1975. N 4. P. 478–482.
- [13] Яламов Ю.И., Дьяконов С.Н. // ТВТ. 1997. Т. 35. № 1. С. 50–55.
- [14] Яламов Ю.И., Дьяконов С.Н. // ТВТ. 1997. Т. 35. № 1. С. 56–60.
- [15] Дьяконов С.Н., Яламов Ю.И. // ЖТФ. 1998. Т. 68. № 6. С. 25–31.
- [16] Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.

- [17] *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. со второго американск. перераб. изд. / Под общей ред. И.Г. Арамановича 5-е изд. М.: Наука, 1984. 831 с.
- [18] *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds number hydrodynamics. Prentice-Hall, 1965. Русский перевод: *Ханпель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Пер. с англ. Бермана В.С. и Маркова В.Г. / Под ред. Ю.А. Буевича. М.: Мир, 1976. 632 с.
- [19] *Олару О.О.* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 3. С. 73–76.
- [20] *Дьяконов С.Н., Котлярова Л.В.* // ТОХТ. 2007. Т. 41. № 1. С. 50–60.
- [21] *Дьяконов С.Н., Котлярова Л.В.* // ТОХТ. 2007. Т. 41. № 2. С. 262–271.