

01;03

## О структуре поля скоростей под сфероидальной свободной поверхностью осциллирующей капли вязкой жидкости в электростатическом поле

© А.И. Григорьев, А.Р. Паранин, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 1 февраля 2011 г.)

Найдено асимптотическое аналитическое решение начальной краевой задачи об исследовании временной эволюции амплитуд капиллярных осцилляций сфероидальной во внешнем однородном электростатическом поле капли вязкой жидкости и структуре поля скоростей течения жидкости в ней. Решение проведено в линейном приближении по двум малым параметрам задачи: безразмерной амплитуде осцилляций и безразмерной стационарной деформации равновесной формы капли во внешнем электрическом поле по отношению к исходной сферической форме, с сохранением слагаемых, пропорциональных произведению обоих малых параметров. В используемом приближении обнаружено взаимодействие мод осцилляций. Показано, что интенсивность вихревой компоненты поля скоростей, связанного с осцилляциями, зависит от вязкости жидкости и величины напряженности внешнего однородного электростатического поля и быстро убывает по мере удаления от свободной поверхности. Глубина проникновения вихревого движения, порождаемого периодическими движениями свободной поверхности, внутрь капли является немонотонной функцией полярного угла, увеличивается с ростом безразмерной вязкости и величины напряженности поля.

### Введение

Известно [1–5], что сферическая незаряженная капля электропроводной или диэлектрической жидкости, будучи помещена во внешнее однородное электростатическое поле, деформируется в нем в фигуру, являющуюся в линейном приближении по отношению амплитуды отклонения ее поверхности от сферической формы к радиусу вытянутым сфероидом. В связи тем, что такой физический объект представляет интерес для геофизики, технической физики, химической технологии, его экспериментальные и теоретические исследования проводились неоднократно [3,5–11]. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с этой темой, до сих пор остаются мало изученными, и в первую очередь это относится к исследованию влияния вязкости на закономерности реализации осцилляций капли во внешнем электростатическом поле и ее неустойчивости в нем, хотя определенные наработки в этом направлении имеются [6,12–14]. В [6,12–14] проведены линейные исследования, ставившие целью вывод дисперсионного уравнения и его анализ. В настоящей работе будет решена начальная краевая задача, ориентированная на исследование структуры поля скоростей в осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле сфероидальной капле.

### Формулировка задачи и ее решение

Пусть сферическая капля радиуса  $R$  вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с массовой плотностью  $\rho$ , коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$  и

коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  помещена в однородное электростатическое поле напряженностью  $E_0$ . Равновесная форма такой капли во внешнем электростатическом поле близка к вытянутому сфероиду [1–5]. В предстоящем линейном по отношению амплитуды отклонения формы поверхности капли от сферической к радиусу  $R$  приближении равновесную форму капли будем считать сфероидальной с эксцентриситетом  $e$ , величина которого в квадратичном по  $e$  приближении связана с величиной напряженности поля  $E_0$  соотношением  $e^2 = 9E_0^2/16\pi\sigma R^3$  [1–3]. Примем, что капля совершает осесимметричные осцилляции в окрестности равновесной сфероидальной формы вследствие создания в начальный момент времени виртуальной осесимметричной деформации. Ее форма в произвольный момент времени  $t$  в сферической системе координат с началом в центре масс капли определяется соотношением

$$F(r, \vartheta, t) = r - r(\vartheta) - \xi(\vartheta, t) = 0, \quad |\max |\xi(\vartheta, t)|/R| \ll 1,$$

где  $r(\vartheta)$  — функция, описывающая поверхность вытянутого сфероида;  $\xi = \xi(\vartheta, t)$  — осесимметричное возмущение равновесной сфероидальной поверхности капли, вызванное капиллярными колебаниями;  $r$  и  $\vartheta$  — сферические координаты, угол  $\vartheta$  отсчитывается от направления  $E_0$ .

Нижеследующий анализ проведем в рамках теории возмущений путем разложения по малым независимым параметрам  $e^2$  и  $\xi$  с точностью до членов, имеющих порядок малости  $\sim e^2$ ,  $\xi$  и  $e^2\xi$ , т.е. в линейном приближении по каждому из них. Соотношение между параметрами  $e^2$  и  $\xi$  нуждается в отдельном комментарии. Если

считать  $\xi \ll e^2$ , как это было сделано в [3,5–10,12–14], то необходимо было бы учитывать и слагаемые  $e^4\xi$ ,  $e^6\xi$  и т.д., но, как показано в [15–17], это привело бы к резкому увеличению громоздкости проводимых расчетов без получения качественно новых физических результатов. Поэтому в нижеследующем изложении будем полагать  $\xi < e^2$ . Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho = \sigma = 1$ . Амплитудные значения величины поля скоростей движения жидкости к капле, порождаемого периодическими движениями ее свободной поверхности  $|\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)|$ , а также связанных с осцилляциями добавок к гидродинамическому давлению в капле  $|p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t)|$  и электрическому потенциалу поляризованного в поле  $\mathbf{E}_0$  заряда на ней  $|\phi(\mathbf{r}, t)|$ , имеют тот же порядок малости, что и амплитуда деформации формы ее равновесной поверхности  $|\xi(\vartheta, t)|$ . Все физические величины, за которыми оставим прежние обозначения, будут выражены в единицах своих характерных значений

$$r_* = R, \quad t_* = R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}, \quad U_* = R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}, \\ P_* = R^{-1}\sigma, \quad v_* = R^{1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2}, \quad E_{0*} = R^{-1/2}\sigma^{1/2}.$$

Уравнение невозмущенной поверхности сфероиды, вытянутого вдоль поля  $\mathbf{E}_0$ , имеет вид

$$r(\vartheta) \equiv \frac{(1 - e^2)^{1/6}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}} \approx 1 + e^2 \frac{1}{3} P_2(\eta) + O(e^4), \\ \eta \equiv \cos \vartheta,$$

где  $P_2(\eta)$  — полином Лежандра.

Математическая формулировка линеаризованной задачи расчета осцилляций поверхности вязкой сфероидальной капли несжимаемой жидкости в однородном электростатическом поле имеет вид [13]

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p^{\text{in}} - \nu \Delta \mathbf{U} = 0, \quad \text{div} \mathbf{U} = 0, \quad \Delta \Phi = 0, \quad (1)$$

$$r = r(\vartheta): \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad (\mathbf{n}, (\boldsymbol{\tau}, \nabla) \mathbf{U}) + (\boldsymbol{\tau}, (\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{U}) = 0,$$

$$-p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t) + 2\nu (\mathbf{n}, (\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{U}) - p_E(\xi) + p_\sigma(\xi) = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{U} = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad -\nabla \Phi \rightarrow E_0 \mathbf{e}_z,$$

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta) \equiv Z_j P_j(\eta), \quad \partial_t \xi(\vartheta) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2)  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  — единичные векторы касательной и нормали к свободной поверхности жидкости,  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = U_r(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_r + U_\vartheta(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_\vartheta$  — поле скоростей течения жидкости в капле, связанного с осцилляциями ее свободной поверхности;  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\vartheta$  — орты сферической системы координат,  $p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t)$  — добавка к давлению внутри жидкости, обусловленная движением ее поверхности и имеющая первый порядок малости по  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  (т.е. по  $\xi(\vartheta, t)$ ),  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  — потенциал электрического поля (в нижеследующих расчетах первого порядка малости будем полагать, что  $\Phi(\mathbf{r}, t) \equiv \Phi_0 + \phi(\mathbf{r}, t)$ , где  $\phi(\mathbf{r}, t)$  — поправка первого порядка малости к потенциалу однородного электростатического поля  $\Phi_0$ , обусловленная

поляризационным зарядом на капле и деформацией ее равновесной формы вследствие осцилляций свободной поверхности),  $p_E$  и  $p_\sigma$  — добавки первого порядка малости к давлению электрического поля на поверхности капли и давлению сил поверхностного натяжения, обусловленные осцилляциями.

Сформулированная задача дополняется естественными условиями сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс при осцилляциях

$$\int_V r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi, \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0.$$

Здесь интегрирование выполняется по всему объему капли. В линейном по  $\xi$  приближении эти условия можно записать в виде

$$\int_0^\pi \xi(\vartheta, t) \sin \vartheta d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \xi(\vartheta, t) \mathbf{e}_r \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0. \quad (3)$$

### Решение сформулированной задачи

Решение задач (1)–(3) будем искать методом скаляризации [18] по схеме, детально описанной в [13], где было выведено и проанализировано дисперсионное уравнение сходной задачи.

Согласно методу скаляризации, векторное поле скоростей  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  представляется в виде разложения

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{N}}_1 \psi_1(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_2 \psi_2(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_3 \psi_3(\mathbf{r}, t), \quad (4)$$

где  $\psi_j$  — скалярные функции, а  $\hat{\mathbf{N}}_j$  — векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности, условиям коммутативности с оператором Лапласа

$$\hat{\mathbf{N}}_i^\dagger \hat{\mathbf{N}}_i = 0, \quad (\text{при } i \neq j); \quad \hat{\mathbf{N}}_j \Delta = \Delta \hat{\mathbf{N}}_j, \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

и имеющие в сферической системе координат вид

$$\hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv \nabla \times \mathbf{r}, \quad \hat{\mathbf{N}}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \mathbf{r}).$$

Верхний индекс „+“ у оператора означает эрмитовое сопряжение. Подставив разложение (4) в систему векторных уравнений (1) относительно функций  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$  и  $p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t)$ , несложно привести ее к системе четырех скалярных уравнений для  $p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t)$  и новых неизвестных функций  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$

$$\nu \Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) - (1 - \delta_{1j}) \partial_t \psi_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (j = 1, 2, 3);$$

$$p^{\text{in}}(\mathbf{U}, t) = -\partial_t \psi_1(\mathbf{r}, t). \quad (5)$$

Здесь  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Компоненты поля скоростей течения жидкости в капле по известным скалярным функциям  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$  вычисляются согласно соотношениям [13,18,19]:

$$U_r = \partial_r \psi_1 - \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta) \psi_3,$$

$$U_\vartheta = \partial_\vartheta \left( \frac{\psi_1}{r} \right) + \partial_\vartheta \left[ \frac{1}{r} \partial_r (r \cdot \psi_3) \right], \quad U_\varphi = -\partial_\vartheta \psi_2.$$

Следует отметить, что функция  $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ , описывающая тороидальную часть вихревого движения в капле, выделяемую оператором  $\hat{N}_2$ , не оказывает влияния на осесимметричные осцилляции свободной поверхности капли [13,18,19] и из нижеследующего рассмотрения опущена.

Решения системы (5) с соответствующими скаляризованными граничными условиями (не выписанными здесь во избежание излишней громоздкости, но приведенными в [13,14]), естественно искать в виде [14,20]

$$\begin{aligned}\xi(\vartheta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} M_n(t) P_n(\eta), \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_n(t) r^{-(n+1)} P_n(\eta), \\ \psi_1(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} C_n^{(1)}(t) r^n P_n(\eta), \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} C_n^{(3)}(t) i_n(xr) P_n(\eta),\end{aligned}\quad (6)$$

где  $i_n(z)$  — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода [21];  $x \equiv \sqrt{s/v}$ ;  $s$  — комплексная константа разделения переменных при решении дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (5),  $M_n(t)$ ,  $\Phi_n(t)$ ,  $C_n^{(j)}(t)$  — зависящие от времени коэффициенты разложений. Выражения для давлений  $p_E(\xi)$  и  $p_\sigma(\xi)$  приведены в [13,16] и имеют вид

$$\begin{aligned}p_\sigma(\xi) &\equiv \sum_{n=2}^{\infty} (e^2 \sigma_{n\pm 2} M_{\pm 2} + (e^2 \sigma_n^{(2)} + e^0 \sigma_n^{(0)}) M_n) P_n(\eta), \\ p_E(\xi) &\equiv W \sum_{n=2}^{\infty} (e^2 \rho_{n\pm 4} M_{n\pm 4} + (e^2 \rho_{n\pm 2}^{(2)} + e^0 \rho_{n\pm 2}^{(0)}) M_{n\pm 2} \\ &+ (e^2 \rho_n^{(2)} + e^0 \rho_n^{(0)}) M_n) P_n(\eta), \quad W = E_0^2 / 8\pi.\end{aligned}\quad (7)$$

Аналитические выражения для коэффициентов  $\sigma_n^{(j)}$  и  $\rho_n^{(j)}$  приведены в Приложении А.

Подставив (6), (7) в граничные условия, получим систему однородных дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $M_n(t)$ ,  $C_n^{(j)}(t)$ ,  $\Phi(t)$ , из которой выразим  $C_n^{(j)}(t)$ ,  $\Phi(t)$  через амплитуды мод осцилляций  $M_n(t)$  (соответствующие аналитические выражения приведены в Приложении В), и, сохраняя слагаемые не выше первого порядка малости по  $e^2$ , придем к бесконечной системе связанных дифференциальных уравнений относительно  $M_n(t)$

$$\begin{aligned}M_n''(t) + \nu M_n'(t) (\varepsilon_n^{(0)} + e^2 \varepsilon_n^{(2)}) + M_n (\beta_n^{(0)} + e^2 \beta_n^{(2)}) \\ + e^2 M_{n-2}''(t) \eta_{n-2} + \nu e^2 M_{n-2}'(t) \varepsilon_{n-2} + e^2 M_{n-2} \beta_{n-2} \\ + e^2 M_{n+2}''(t) \eta_{n+2} + \nu e^2 M_{n+2}'(t) \varepsilon_{n+2} + e^2 M_{n+2} \beta_{n+2} = 0,\end{aligned}\quad (8)$$

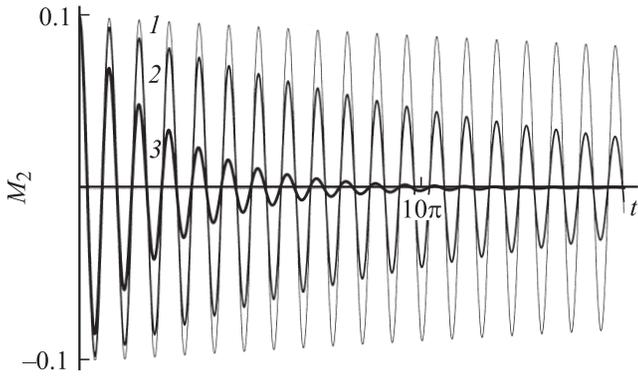
где аналитические выражения для коэффициентов  $\beta_n^{(0)}$ ,  $\beta_n^{(2)}$ ,  $\beta_{n\pm 2}$ ,  $\eta_{n\pm 2}$ ,  $\varepsilon_n^{(0)}$ ,  $\varepsilon_n^{(2)}$  приведены в Приложении С. Из (8) видно, что наличие внешнего электрического поля приводит к появлению взаимодействия мод осцилляций, которого не было для заряженной и незаряженной капле в отсутствие поля [3,4]. Впрочем, корректнее будет говорить о взаимодействии мод осцилляций с возникающей во внешнем электростатическом поле стационарной сфероидальной деформацией исходной сферической формы капли [4,22]. В гидродинамических асимптотических расчетах взаимодействие мод осцилляций или волн на поверхности жидкости реализуется лишь, начиная со второго порядка малости по безразмерным амплитудам [4], и то обстоятельство, что в данном случае оно появляется в расчетах, линейных по  $|\xi|$  и  $e^2$ , на первый взгляд необычно. Но из (8) видно, что слагаемые, отвечающие за взаимодействие мод, пропорциональны  $e^2$ , а сами амплитуды  $M_n \sim |\xi|$ . В итоге компоненты уравнения (8), отвечающие за взаимодействие, оказываются пропорциональными произведению двух малых параметров  $|\xi|$  и  $e^2$ , т. е. являются нелинейными.

Решения системы (8), удовлетворяющие начальным условиям (2), естественно искать методом последовательных приближений по  $e^2$ . В первом порядке малости можно найти

$$\begin{aligned}M_n(t) = Z_j \left\{ \exp(i b_n^{(0)}) \left( a_n^{(0)} \delta_{nj} + \frac{1}{a_n^{(0)}} e^2 [q_{n-2}^{(1)} \delta_{(n-2)j} \right. \right. \\ \left. \left. + q_n^{(2)} \delta_{nj} + q_{n+2}^{(1)} \delta_{(n+2)j}] \right) \exp((s_n^{(0)} + e^2 s_n^{(1)})t) \right. \\ \left. - e^2 \alpha_{n-2} a_{n-2}^{(0)} \exp(i b_{n-2}^{(0)}) \exp(s_{n-2}^{(0)} t) \delta_{(n-2)j} \right. \\ \left. - e^2 \alpha_{n+2} a_{n+2}^{(0)} \exp(i b_{n+2}^{(0)}) \exp(s_{n+2}^{(0)} t) \delta_{(n+2)j} \right\},\end{aligned}\quad (9)$$

где  $\delta_{nj}$  — символ Кронекера,  $s_n^{(0)}$  — решение уравнения  $s_n^{(0)} = \frac{1}{2} (\varepsilon_n^{(0)} + \sqrt{(\varepsilon_n^{(0)})^2 - 4\beta_n^{(0)}})$ ,  $s_n^{(1)}$  — пропорциональная  $e^2$  поправка к  $s_n^{(0)}$ . Полная частота  $s_n \equiv s_n^{(0)} + e^2 s_n^{(1)}$  является решением дисперсионного уравнения  $s_n = -\lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 - 4\omega_n}$ , где  $\lambda_n \equiv e^0 \varepsilon_n^{(0)} + e^2 \varepsilon_n^{(2)}$ ,  $\omega_n \equiv e^0 \beta_n^{(0)} + e^2 \beta_n^{(2)}$ . Коэффициенты  $a_n^{(0)}$ ,  $b_n^{(0)}$ ,  $s_n^{(0)}$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $s_n$ ,  $\alpha_{n\pm 2}$  приведены в Приложении Д. Дисперсионное уравнение в линейном по  $e^2$  приближении несложно получить, полагая в (8)  $M_n(t) \sim \exp(st)$  (см. [13]).

Подставляя найденные выражения для коэффициентов  $M_n(t)$  в выражение для  $\xi(\vartheta, t)$  (6), можно получить аналитическое выражение для деформации формы поверхности капли как функции времени. На рис. 1 приведены результаты численного расчета по (9) для различных значений безразмерной вязкости. Величина полевого параметра  $W$  на рис. 1 и на всех нижеследующих рисунках считалась в долях от  $W_{cr}$  — критического



**Рис. 1.** Зависимость от безразмерного времени безразмерной амплитуды осцилляций основной ( $n = 2$ ) моды, когда начальная деформация определяется основной модой рассчитанная при  $Z_2 = 0.1$ ,  $\vartheta = \pi/4$ ,  $W = 0.3W_{cr}$ ,  $e^2 = 0.27$ . Кривые построены при  $\nu = 0.001$  (1), 0.005 (2), 0.025 (3).

для реализации неустойчивости капли во внешнем однородном электростатическом поле значения.

Окончательные аналитические выражения для коэффициентов  $C_n^{(1)}(t)$ ,  $C_n^{(3)}(t)$ ,  $\Phi(t)$  для записи искомых полей скоростей и электрического поля получаются при подстановке соотношения (9) в формулы (B.1)–(B.3) Приложения В.

### Структура поля скоростей

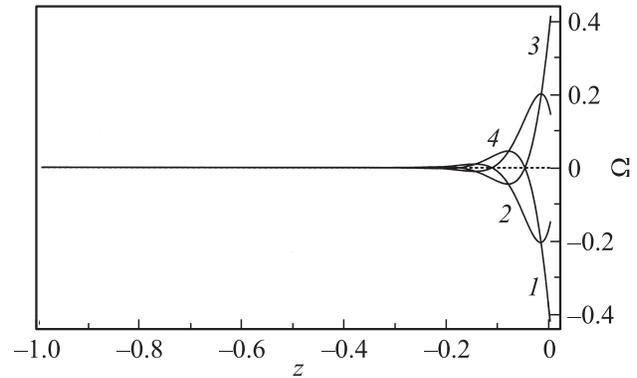
Согласно (4), в общем случае полное векторное поле скоростей течения жидкости в капле вязкой жидкости представляется в виде суперпозиции потенциального поля (определяемого функцией  $\psi_1(\mathbf{r}, t)$  и векторным оператором  $\hat{N}_1$ ) и вихревого поля, состоящего из тороидальной и полоидальной компонент [13,14,18]. Тороидальная компонента поля скоростей определяется функцией  $\psi_2(\mathbf{r}, t)$  и векторным оператором  $\hat{N}_2$ , в случае осесимметричных осцилляций не связана с деформацией поверхности  $\xi(\vartheta, t)$ , функциями  $\psi_1(\mathbf{r}, t)$  и  $\psi_3(\mathbf{r}, t)$  и может быть принята тождественно равной нулю [13,18]. Вихревая полоидальная компонента поля скоростей определяется функцией  $\psi_3(\mathbf{r}, t)$  и векторным оператором  $\hat{N}_3$  и связана с функциями  $\xi(\vartheta, t)$  и  $\psi_1(\mathbf{r}, t)$  через граничные условия.

Имея в виду исследование распределения вихревой компоненты поля скоростей течения жидкости по объему капли, порождаемого осцилляциями ее поверхности, построим график распределения ротора поля скоростей вдоль радиальной координаты  $r$ . Аналитическое выражение для ротора целиком определяется функцией  $\Psi_3(\mathbf{r}, t)$  и имеет вид

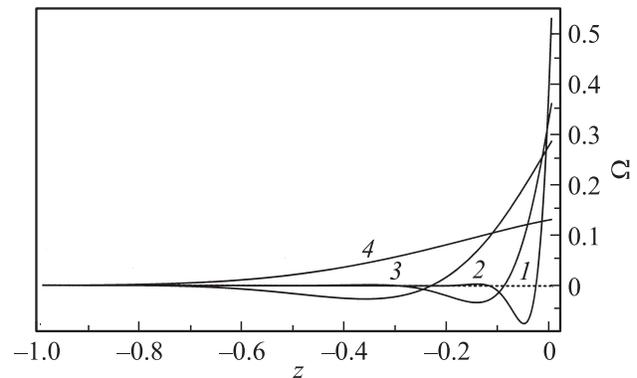
$$\Omega \equiv \text{rot } \mathbf{U} \equiv \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( r \frac{\partial \psi_3}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi_3}{\partial \vartheta} \right) \right) \right) \mathbf{e}_\varphi, \quad (10)$$

$\mathbf{e}_\varphi$  — орт азимутального угла. Для большей наглядности нижеследующих расчетов по (10) от радиальной переменной  $r$  перейдем к новой переменной  $z$  на основе соотношения  $r = (z + 1)r(\vartheta)$ . Если переменная  $r$  изменялась в диапазоне  $0 \leq r \leq r(\vartheta) \equiv 1 + e^2 \frac{1}{3} P_n(\eta)$ , т.е. диапазон зависел от полярного угла, то переменная  $z$  изменяется в диапазоне  $-1 \leq z \leq 0$ . Центру капли соответствует  $z = -1$ , а свободной поверхности —  $z = 0$ .

Графики зависимости амплитуды ротора поля скоростей от радиальной переменной  $z$ , построенные при  $\vartheta = \text{const}$  для различных моментов времени, приведены на рис. 2. Видно, что вихревое движение сосредоточено в приповерхностном слое капли конечной толщины. На рис. 3 приведены зависимости амплитуды ротора поля скоростей от радиальной переменной  $z$ , построенные при  $\vartheta = \text{const}$  для различных значений коэффициента безразмерной вязкости капли. Видно, что уже для коэффициента безразмерной вязкости  $\nu = 0.125$



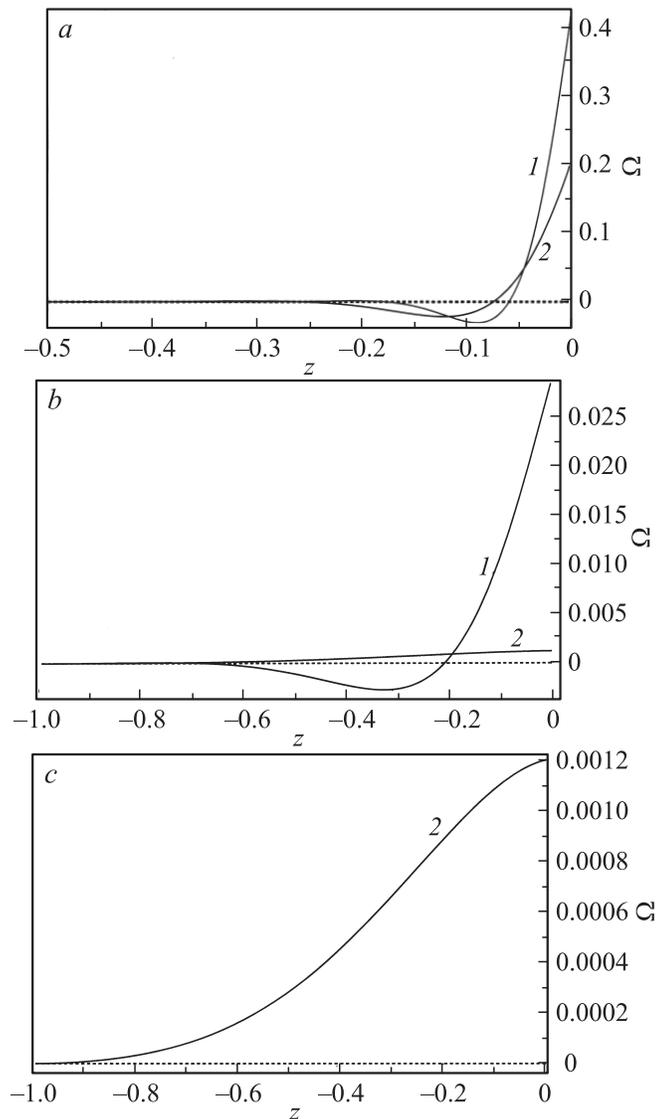
**Рис. 2.** Зависимость безразмерной амплитуды ротора поля скоростей от радиальной переменной  $z$ , когда начальная деформация определяется основной ( $n = 2$ ) модой, построенная при  $Z_2 = 0.1$ ,  $\vartheta = \pi/4$ ,  $W = 0.3W_{cr}$ ,  $e^2 = 0.27$ ,  $\nu = 0.002$  для различных моментов времени: 1 —  $t = 0.25T$ , 2 —  $0.5T$ , 3 —  $0.75T$ , 4 —  $T$ , где  $T$  — период осцилляций основной моды.



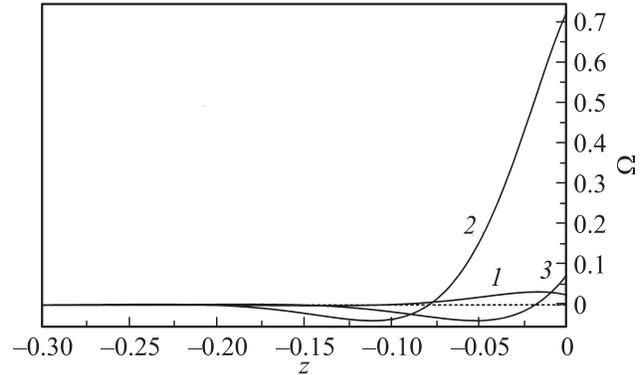
**Рис. 3.** Те же зависимости, что на рис. 2, построенные при  $Z_2 = 0.1$ ,  $\vartheta = \pi/4$ ,  $W = 0.3W_{cr}$ ,  $e^2 = 0.27$ ,  $t = 0.75T$  для различных значений коэффициента безразмерной кинематической вязкости капли. 1 — коэффициенту безразмерной вязкости  $\nu = 0.001$ , 2 — 0.005, 3 — 0.025, 4 — 0.125.

вихревое движение охватывает практически весь объем капли. Напомним, что коэффициент кинематической вязкости обезразмеривается на  $\nu_* = R^{1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}$ , поэтому величина безразмерной вязкости для фиксированной жидкости существенно зависит от радиуса капли. Например, для воды с  $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $\sigma = 72 \text{ dyne/cm}$  значение коэффициента безразмерной вязкости  $\nu = 0.125$  достигается при  $R \approx 0.09 \mu\text{m}$ . Для более крупных капель вихревое движение будет сосредотачиваться в приповерхностном слое.

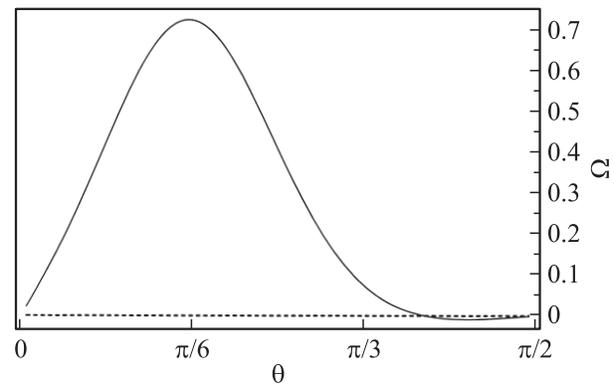
На рис. 4 приведены зависимости амплитуды ротора поля скоростей от радиальной переменной  $z$ , построенные при  $\vartheta = \text{const}$  для различных значений полевого па-



**Рис. 4.** *a*: те же зависимости, что на рис. 2, построенные при  $Z_2 = 0.1$ ,  $\vartheta = \pi/4$ ,  $e^2 = 0.27$ ,  $t = 0.75T$ ,  $\nu = 0.002$  для различных значений полевого параметра  $W$ . 1 —  $W \approx 0.1W_{\text{cr}}$  ( $e^2 = 0.08$ ), 2 —  $W \approx 0.45W_{\text{cr}}$  ( $e^2 = 0.36$ ); *b*: то же что на рис. 4, *a*, для других значений полевого параметра. 1 —  $W \approx 0.6W_{\text{cr}}$  ( $e^2 = 0.36$ ), 2 —  $W \approx 0.99W_{\text{cr}}$  ( $e^2 = 0.8$ ); *c*: 2 с рис. 4, *b* в более крупном масштабе.



**Рис. 5.** Те же зависимости, что на рис. 2, построенные при  $Z_2 = 0.1$ ,  $\nu = 0.002$ ;  $W = 0.3W_{\text{cr}}$ ,  $e^2 = 0.27$ ,  $t = 0.75T$  для различных значений полевого угла  $\vartheta$ . 1 — угол  $\vartheta = 1$ ; 2 — 30; 3 — 60 deg.



**Рис. 6.** Зависимость безразмерной амплитуды ротора поля скоростей от полевого угла  $\vartheta$  в первой четверти диапазона его изменения, когда начальная деформация определяется основной ( $n = 2$ ) модой, построенная при  $Z_2 = 0.1$ ,  $\nu = 0.002$ ,  $W = 0.3W_{\text{cr}}$ ,  $e^2 = 0.27$ ,  $t = 0.75T$ ,  $z = 0$ .

раметра  $W$ . На рис. 4, *c* приведена кривая 2 с рис. 4, *b*, но в более крупном масштабе. Видно, что с увеличением  $W$  интенсивность вихревого движения уменьшается, но оно охватывает все больший объем.

На рис. 5 приведены зависимости амплитуды ротора поля скоростей от переменной  $z$ , построенные для различных значений полевого угла  $\vartheta$ . На рис. 6 приведена зависимость амплитуды ротора поля скоростей при  $r = \text{const}$  от полевого угла  $\vartheta$  в первой четверти диапазона его изменения. Из рис. 5 и 6 видно, что интенсивность вихревого движения жидкости в капле, порождаемого осцилляциями свободной поверхности, является немонотонной функцией  $\vartheta$ .

## Заключение

Найдено аналитическое решение начальной краевой задачи о расчете поля скоростей течения жидкости в вытянутой сфероидальной капле вязкой жидкости, ос-

циллирующей во внешнем электростатическом поле за счет задания виртуальной деформации конечной амплитуды в начальный момент времени. Решение проведено в линейном приближении по двум малым параметрам задачи: безразмерной амплитуде осцилляций  $Z_j$  и квадрату эксцентриситета сфероида  $e^2$ , с сохранением слагаемых  $e^2 Z_j$ . В используемом приближении обнаружено взаимодействие мод осцилляций. Показано, что в общем случае полное векторное поле скоростей течения жидкости в капле представляется в виде суперпозиции векторного потенциального поля и векторного вихревого поля, состоящего из тороидальной и полоидальной компонент. Для ситуации начальной осесимметричной деформации, приводящей к возникновению осесимметричных же течений жидкости, тороидального вихревого поля не возникает. Полоидальное вихревое поле для капель с малой безразмерной вязкостью (если безразмерный коэффициент кинематической вязкости  $\nu \ll 0.1$ ) сосредоточено в узком приповерхностном слое капли, а для капель с большой безразмерной вязкостью ( $\nu \geq 0.1$ ) охватывает весь объем капли.

### Приложение А. Лапласовское и электростатическое давления

Лапласовское давление.

$$\sigma_{n-2} \equiv -\frac{(n-1)n(6-3n+n^2)}{(2n-1)(2n-3)}, \quad \sigma_n^{(0)} \equiv (n-1)(2+n);$$

$$\sigma_n^{(2)} \equiv -\frac{2n(1+n)(4+n+n^2)}{3(2n-1)(2n+3)},$$

$$\sigma_{n+2} \equiv -\frac{(1+n)(2+n)(10+5n+n^2)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

Давление электрического поля.

$$\rho_{n-4}(n) \equiv -\frac{9(14-3n)(n-3)(n-2)(n-1)n}{(35-24n+4n^2)(2n-1)(2n-3)},$$

$$\rho_{n-2}^{(0)}(n) \equiv -\frac{18(2-n)(n-1)n}{(2n-1)^2},$$

$$\rho_{n-2}^{(2)}(n) \equiv \frac{3(n-1)n(-1980-3291n+3416n^2+1252n^3-1376n^4+224n^5)}{5(2n-5)(2n-3)^2(2n-1)(2n+1)(2n+3)},$$

$$\rho_n^{(0)}(n) \equiv -\frac{18(n+6n^2-2n^3-4n^4)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)},$$

$$\rho_n^{(2)}(n) \equiv \frac{6n(105+902n+1308n^2-84n^3-941n^4-212n^5+44n^6)}{5(2n-3)(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)(2n+5)},$$

$$\rho_{n+2}^{(0)}(n) = \frac{18n(2+3n+n)^2}{(2n+3)(2n+5)},$$

$$\rho_{n+2}^{(2)}(n) \equiv \frac{3(2+3n+n^2)(810-355n-8376n^2-3676n^3+384n^4+224n^5)}{5(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)^2(2n+7)},$$

$$\rho_{n+4}(n) \equiv \frac{27-48-76n-20n^2+15n^3+8n^4+n^5}{(2n+3)(2n+5)(2n+7)(2n+9)}.$$

### Приложение В. Аналитические выражения для коэффициентов $C_n^{(1)}(t)$ , $C_n^{(3)}(t)$ , $\Phi_n(t)$

$$C_n^{(1)}(t) \equiv c_{n-2}e^2M'_{n-2}(t) + (c_n^{(2)}e^2 + c_n^{(0)}e^0)M'_n(t) + c_{n-2}e^2M'_{n+2}(t), \quad (B.1)$$

$$c_{n-2} \equiv \frac{(1-n)}{2(n-2)(3-8n+4n^2)x^2[x-2\tau_{n-2}(x)][x-2\tau_n(x)]}$$

$$\times \left[ 2x\tau_{n-2}(44n^3-10n^4+n^2(x^2-34)-8(x^2-5) - n(48+x^2) + 2(8-2n-3n^2+n^3)x\tau_n(x)) \right. \\ \left. + (n-2)(48-46x^2-x^4+6n^2(-8+x^2) + 2n^3(8+x^2) + n(-16-10x^2+x^4) - 2x[-24-x^2 + n(8+x^2)]\tau_n(x)) \right], \quad \tau_n(x) \equiv i_{n+1}(x)/i_n(x),$$

$$c_n^2 \equiv \frac{-(n+1)}{3n(4n+4n^2-3)x^2[x-2\tau_n(x)]^2} \\ \times \left[ n^4x^2 - 2n^3(12+x^2) + n^2(24-32x^2+x^4) - 3(8-12x^2+x^4) - n(16x^2+x^4-24) \right. \\ \left. + 2x(34n^3+2n^4-2n^2(x^2-11)+3(x^2-4) + n(-34+5x^2))\tau_n(x) + 4n(n+n^2-5)x^2\tau_n(x)^2 \right],$$

$$c_n^{(0)} \equiv \frac{2n^2+x^2-2x\tau_n(x)-2}{nx[x-2\tau_n(x)]},$$

$$c_{n+2} \equiv \frac{-(n+1)}{2n(15+16n+4n^2)x^2[x-2\tau_n(x)][x-2\tau_{n+2}(x)]}$$

$$\times \left[ 48+64n-32n^2-64n^3-16n^4+2(3n^2+5n^3 + n^4-8-11n)x^2 + (n+n^2-4)x^4 - 2x(8+16n^3 + 2n^4-4x^2+3n(8+x^2)+n^2(34+3x^2))\tau_{n+2}(x) \right. \\ \left. + 2x\tau_n(x)(n(32-x^2)-n^2(-8+x^2)+4(6+x^2) + 2(-4+4n+5n^2+n^3)x\tau_{n+2}(x)) \right],$$

$$C_n^{(3)}(t) \equiv [d_{n\pm 2}e^2M'_{n\pm 2}(t) + (d_n^{(2)}e^2 + d_n^{(0)}e^0)M'_n(t)]/i_n(x), \quad (B.2)$$

$$d_{n-2} \equiv \frac{(n-1)}{(19n-16n^2+4n^3-6)x^2[x-2\tau_{n-2}(x)][x-2\tau_n(x)]} \times \left[ (n-2)(24-11x^2+2n(-16+x^2)+n^2(8+x^2)) + x(40-10n^3+n^2(54+x^2)-n(88+3x^2))\tau_{n-2}(x) \right],$$

$$d_n^{(0)} \equiv \frac{2-2n}{nx[x-2\tau_n(x)]},$$

$$d_n^{(1)} \equiv \frac{2(n-1)}{3(3-7n+4n^3)x^2[x-2\tau_n(x)]^2n} \left[ (1+n) \times (n^2x^2+n(24-14x^2)+12(x^2-1)-2n^2(6+x^2)) + nx(-46+22n+2n^3-x^2+n^2(34+x^2))\tau_n(x) \right],$$

$$d_{n+2} \equiv \frac{n-1}{(12n^2+4n^3-15-n)nx^2[x-2\tau_n(x)][x-2\tau_{n+2}(x)]} \times \left[ n^4(-8+x^2)+4(6+x^2)+n^3(5x^2-32) + n(32+5x^2)+n^2(7x^2-16)+x(n(x^2-24) + 2n^2(x^2-17)-8-2n^4+n^3(-16+x^2))\tau_{n+2}(x) \right],$$

$$\Phi_n(t) \equiv e^2 M_{n\pm 3}(t)\phi_{\pm 3} + M_{n\pm 1}(t)(e^0\phi_{\pm 1}^{(0)} + e^2\phi_{\pm 1}^{(2)}), \quad (\text{B.3})$$

$$\phi_{-3} \equiv E_0 \frac{3n(1+n)(2-3n+n^2)}{-30+92n-72n^2+16n^3},$$

$$\phi_{+3} \equiv E_0 \frac{3(30+61n+41n^2+11n^3+n^4)}{2(105+142n+60n^2+8n^3)},$$

$$\phi_{-1}^{(0)} \equiv \frac{3E_0n}{-1+2n},$$

$$\phi_{-1}^{(2)} \equiv \frac{E_0n(-27+39n-103n^2+n^3+50n^4)}{10(1-2n)^2(-9+4n^2)},$$

$$\phi_{+1}^{(0)} \equiv \frac{3E_0(1+n)}{3+2n},$$

$$\phi_{+1}^{(2)} \equiv \frac{E_0(1+n)(-180+278n+621n^2+321n^3+50n^4)}{10(3+2n)^2(-5+8n+4n^2)}.$$

## Приложение С

$$\varepsilon_n^{(0)} \equiv -\frac{2(n-1)nx[2(2+n)\tau_n(x)-x]}{2(n^2-1)+x^2-2x\tau_n(x)},$$

$$\varepsilon_n^{(2)} \equiv \frac{4n(1+n)x}{3(4n+4n^2-1)(2n^2+x^2-2)[x\tau_n(x)+1]^2} \times \left[ (1-n)x(-9+4n^3+2n^4+n^2(10+x^2)+n(2x^2-1)) + (10n^5+4n^6+9x^2-12n(-4+x^2)+2n^4(9+x^2) + n^3(5x^2-22)-2n^2(29+5x^2))\tau_n(x) + nx(18n+2n^3+2n^4-x^2+n^2(14+x^2)-24)\tau_n(x)^2 \right],$$

$$\beta_n^{(0)} \equiv \frac{(n-1)n(2+n)x[x-2\tau_n(x)]}{-2+2n^2+x^2-2x\tau_n(x)},$$

$$\beta_n^{(2)} \equiv \frac{n}{3(12n^2+8n^3-3-2n)(2n^2+x^2-2x\tau_n(x)-2)^2} \times \left[ -3(4n^7(4+x^2)+n^6(24+62x^2)+n^2(56-16x^2-17x^4)+n(-24+52x^2-7x^4)-2(8-12x^2+x^4) + 2n^5(-28+45x^2+x^4)+n^3(64-146x^2+21x^4) + n^4(-64-70x^2+23x^4))+2x(326n^6+96n^7+8n^8) + n(136-33x^2)-6(x^2-4)+2n^5(50+9x^2) - 3n^2(-74+39x^2)+n^3(-332+111x^2) + n^4(-580+147x^2))\tau_n(x) + 4n(14+71n-50n^2-88n^3) - 14x^4+5n^5+2n^6)x^2\tau_n(x)^2 \right],$$

$$\eta_{n-2} \equiv$$

$$\equiv \frac{(n-1)n}{2(n-2)(3-8n+4n^2)x[x-2\tau_{n-2}(x)]} \left[ 2x\tau_{n-2}(x) \times (2n^2+x^2-2x\tau_n(x)-2) \times (-44n^3+10n^4-2n^2(-17+x^2)+8(-5+x^2) + 3n(16+x^2)-2(8-4n^2+n^3)x\tau_n(x)) - (n-2) \times (48+16n^3-46x^2-x^4-16n(1+x^2)+2n^2(-24+7x^2)+2x\tau_n(x)[24-2n-8n^2+2n^3+x^2]) \right],$$

$$\eta_{n+2} \equiv \frac{-(1+n)}{2(15+16n+4n^2)x(2n^2+x^2)} \left[ 48+64n-32n^2 - 2x\tau_n(x)-2[x-2\tau_{n+2}(x)] \right. \\ \left. - 64n^3-16n^4-2(8+17n+8n^2+n^3)x^2-(4+n)x^2 - 2x(8+16n^3+2n^4-4x^2+2n^2(17+x^2) + n(24+x^2))\tau_{n+2}(x) + 2x\tau_n(x)(30n^2+12n^3+2n^4) + 4(6+x^2)+n(44+x^2) + 2\tau_{n+2}(x)(2n+4n^2+n^3-4)x \right],$$

$$\varepsilon_{n-2} \equiv$$

$$\equiv \frac{(n-1)n^2}{(19n-16n^2+4n^3-6)[x-2\tau_{n-2}(x)]} \left[ 2x\tau_{n-2}(x) \times (2n^2+x^2-2x\tau_n(x)-2) \times ((-8+28n-14n^2-n^3+n^4)x+\tau_n(x)[56-12n^4-2n^2(3+x^2)+n^3(46+x^2)-n(104+3x^2)]) + (n-2)(x(-24+5x^2-2n^2(4+x^2)+n(32+3x^2))+2\tau_n(x)(-16(-3+x^2)+n^3(8+x^2)-4n(10+3x^2)+n^2(-16+5x^2))) \right],$$

$$\varepsilon_{n+2} \equiv \frac{n(1+n)}{(15+16n+4n^2)(2n^2+x^2-2x\tau_n(x)-2)} \times [x-2\tau_{n+2}(x)] \times \left[ x(n^2(24-9x^2)-2n^3(x^2-4)-8(3+2x^2)) - n(8+15x^2)+2\tau_{n+2}(x)[28+34n+20n^2+7n^3+n^4]x \right. \\ \left. 2\tau_n(x)(48+20x^2+n^4(-8+x^2)+20n(2+x^2)+8n^2(-5+2x^2)+n^3(-40+7x^2)+x\tau_{n+2}(x)[-64-4n^4+n(-92+x^2)+2n^2(-37+x^2)+n^3(-30+x^2)]) \right],$$

$$\beta_{n-2} \equiv -\frac{n^2(2-3n+n^3)x[x-2\tau_n(x)]}{(3-8n+4n^2)[-2+2n^2+x^2-2x\tau_n(x)]},$$

$$\beta_{n+2} \equiv \frac{n(20+48n+39n^2+12n^3+n^4)x[x-2\tau_n(x)]}{(15+16n+4n^2)[-2+2n^2+x^2-2\tau_n(x)x]}.$$

## Приложение D

$$a_n^{(0)} \equiv \sqrt{1 + (\operatorname{Re} s_n^{(0)} / \operatorname{Im} s_n^{(0)})^2} \delta_{nj}, \quad b_n^{(0)} \equiv \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Re} s_n^{(0)}}{\operatorname{Im} s_n^{(0)}} \right),$$

$$s_n^{(0)} \equiv \frac{1}{2} \left( \varepsilon_n^{(0)} + \sqrt{(\varepsilon_n^{(0)})^2 - 4\varepsilon_n^{(0)}\beta_n^{(0)}} \right),$$

$$\lambda_n \equiv e^0 \varepsilon_n^{(0)} + e^2 \varepsilon_n^{(2)}, \quad \omega_n \equiv e^0 \beta_n^{(0)} + e^2 \beta_n^{(2)},$$

$$q_{n\pm 2}^{(1)} = a_{n\pm 2}^{(0)} \alpha_{n\pm 2} \left( \cos(b_{n\pm 2}^{(0)}) |s_{n\pm 2}^{(0)}|^2 - [\cos(b_{n\pm 2}^{(0)}) \operatorname{Re} s_{n\pm 2}^{(0)} - \operatorname{Im} s_{n\pm 2}^{(0)} \sin(b_{n\pm 2}^{(0)})] s_{n\pm 2}^{(0)} \right),$$

$$q_n^{(2)} = (\operatorname{Im} s_n^{(0)} \operatorname{Re} s_n^{(1)} - \operatorname{Im} s_n^{(1)} \operatorname{Re} s_n^{(0)}) \left( i + \frac{\operatorname{Re} s_n^{(0)}}{\operatorname{Im} s_n^{(0)}} \right),$$

$$\alpha_{n\pm 2} \equiv \frac{(s_{n\pm 2}^{(0)})^2 \eta_{n\pm 2} + s_{n\pm 2}^{(0)} \varepsilon_{n\pm 2} + \beta_{n\pm 2}}{(s_{n\pm 2}^{(0)})^2 + \lambda s_{n\pm 2}^{(0)} + \omega_n}.$$

Выражения для  $\varepsilon_n^{(0)}$ ,  $\varepsilon_n^{(2)}$ ,  $\beta_n^{(0)}$ ,  $\beta_n^{(2)}$ ,  $\beta_{n\pm 2}$ ,  $\varepsilon_{n\pm 2}$  приведены в Приложении С.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособразования № РНП 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и № 09-08-00148.

## Список литературы

- [1] O'Konski C.T., Thacher H.C. // J. Phys. Chem. 1953. Vol. 57. N 9. P. 955–958.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1707–1713.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
- [4] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93–95.
- [5] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль. Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [6] Cheng K.J. // Phys. Lett. 1985. Vol. 112. N 11. P. 392–296.
- [7] Sherwood J.D. // J. Fluid Mech. 1988. Vol. 188. P. 133–146.
- [8] Incelett I.I., Floryan J.M., Haywood R.J. // IEEE Trans. Ind. Appl. Vol. 1A–28. N5. P. 12032–1209.
- [9] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.
- [10] Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. Вып. 24. С. 36–40.
- [11] Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 34–42.
- [12] Ширяева С.О. // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 4. С. 84–88.
- [13] Ширяева С.О. // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 4. С. 20–27.
- [14] Ширяева С.О. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 4. С. 28–36.
- [15] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [16] Паранин А.Р., Григорьев А.И. // Электронный журнал „Исследовано в России“. 2009. № 114. С. 1500–1509. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/114.pdf>
- [17] Паранин А.Р., Григорьев А.И. // Электронный журнал „Исследовано в России“. 2009. № 119. С. 1545–1554. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/119.pdf>
- [18] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Скаляризация векторных краевых задач гидродинамики. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2010. 180 с.
- [19] Григорьев А.И., Лазарянец А.Э. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 10. С. 12–19.
- [20] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Паранин А.Р. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 30–36.
- [21] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [22] Ширяева С.О. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 44–54.